Mesure continue d'un ensemble statistique de systèmes quantiques

Mazyar Mirrahimi, Pierre Rouchon

Ecole des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes
60, Bd Saint-Michel, 75272 Paris cedex 06, France

mazyar.mirrahimi@polytechnique.org
pierre.rouchon@ensmp.fr

Résumé— **Nous considérons un ensemble de systèmes quantiques dont l'évolution moyenne est décrite par la matrice densité solution d'une équation différentielle matricielle sous forme de Lindblad. Nous supposons que le terme de décohérence est uniquement dû à un état excité hautement instable. Nous mesurons alors les photons émis de façon spontanée. Lorsque l'on considère des champs laser résonnants, nous pouvons éliminer les dynamiques rapides associées à l'état excité pour obtenir une autre équation différentielle pour la partie lente. Nous démontrons que cette équation différentielle matricielle lente est alors de la forme de Lindblad. Les termes de décohérence sont alors d'ordre deux et la structure de la mesure dépend alors explicitement du champ laser résonnant. Ce dernier peut être ajusté pour donner des informations sur une combinaison linéaire spécifique des coefficients de la matrice densité. Le cas d'un système à 3 états est traité en détail et avant le cas général. Sur ce système à 3 niveaux, nous montrons comment un simple régulateur PI nous permet de contrôler de façon robuste le sous-système lent à 2 niveaux.**

Mots-clés— **contrôle quantique, mesure, Équations de Lindblad, perturbations singulières, approximations séculaires, moyennisation, régulateur PI.**

I. Introduction

La différence fondamentale entre le contrôle par feedback au sens classique et au sens quantique est due au fait qu'observer un système quantique le perturbe. L'idée exploitée dans les travaux antérieurs consiste à prendre en compte les fluctuations induites par l'environnement en considérant le système comme un système ouvert qui s'intrique avec son environnement. La description des systèmes ouverts se fait, essentiellement, à l'aide de l'opérateur densité. Ce dernier remplace la fonction d'onde de la mécanique quantique élémentaire. Nous avons ainsi la possibilité d'analyser le comportement d'un ensemble statistique des systèmes [?], [?], [?] aussi bien que celui d'un système unique [?], [?], [?].

Pour éviter le phénomène d'écroulement du paquet d'onde suite à la mesure, nous considérons un ensemble de systèmes quantiques identiquement préparés. Chaque membre de l'ensemble subit une évolution identique. La dynamique considérée représente la moyenne des dynamiques de tous ses membres, tandis que l'observation porte sur un élément aléatoire de cet ensemble. Ainsi le coté destructeur du concept de mesure disparaît. Cette approche a été déjà considérée dans d'autres contextes (voir par exemple [?], [?]).

Nous couplons donc le système à un appareil de mesure qui perturbe faiblement le système. Nous allons voir que cette perturbation peut être dans certains cas négligeable lorsque la dynamique associée à la mesure est beaucoup plus rapide que la dynamique du système principal. L'objet de cette communication est de montrer d'abord sur un système avec trois niveaux (avec un niveau très instable) comment ramener la dynamique à celle d'un système à deux niveaux d'énergie avec un contrôle et une sortie scalaires. Sur ce système réduit nous montrons comment PI pourrait être utilisé. Ensuite nous traitons le cas général avec une description par la matrice densité vérifiant une équation différentielle matricielle incluant l'évolution cohérente ainsi que l'évolution dissipative sous forme de Lindblad (voir, e.g., [?]).

Dans la section II, nous présentons la dynamique d'un système à 3 états couplé à un champ de laser cohérent et résonnant. Nous considérons également les émissions spontanées. Nous supposons qu'un des états excités est très instable et se désexcite rapidement sur l'état fondamental en émettant des photons, photons que l'on observe via un photo-détecteur. Lorsque le laser est en résonance avec cet état instable, nous montrons, à l'aide de la théorie des systèmes lents/rapides, que le nombre moyen des photons par unité de temps (signal du photo-détecteur) peut être interprété comme une mesure continue de certaines composantes de la matrice densité de la dynamique lente. Cette dernière correspond alors à celle d'un système à deux niveaux. Nous montrons en outre qu'une telle mesure continue ne perturbe la dynamique lente qu'uniquement via des termes dissipatifs du second ordre. Ainsi, dans une première approximation, nous pouvons négliger ces termes de décohérence. Nous avons alors un système conservatif à deux états, représenté par un vecteur sur la sphère de Bloch et disposant une mesure continue (voir le système (4)). Dans la Section III, nous montrons que ce système réduit peut être efficacement contrôler avec un simple régulateur PI. Dans la Section IV, nous étendons la démarche de la Section II à un nombre arbitraire n de niveaux d'énergie. La dynamique de la matrice densité est de type Lindblad [?], [?] et l'un des états est très instable. Nous démontrons que l'équation lente est encore sous la forme Lindblad, que la décohérence due à l'état très instable est du deuxième ordre et qu'elle peut donc être négligée.

II. Système à 3 états

Prenons un atome à 3 états couplé avec des champs laser résonnants. Notons les trois états de l'atome par $|1\rangle$, $|2\rangle$ et $|3\rangle$ correspondant respectivement aux énergies E_1, E_2 et E_3 avec $E_1 < E_2, E_3$. Nous considérons ici les équations de Bloch-optique qui prennent en compte l'émission spontanée (voir par exemple, [?], [?]). Le système sans contrôle est décrit par les équations suivantes avec $\omega_{ij} = \frac{E_i - E_j}{\hbar}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_1 &= \Gamma_2\sigma_2 + \Gamma_3\sigma_3 \\
\frac{d}{dt}\sigma_2 &= -\Gamma_2\sigma_2 \\
\frac{d}{dt}\sigma_3 &= -\Gamma_3\sigma_3 \\
\frac{d}{dt}\sigma_{12} &= -\iota\omega_{12}\sigma_{12} - \frac{\Gamma_2}{2}\sigma_{12} \\
\frac{d}{dt}\sigma_{23} &= -\iota\omega_{23}\sigma_{23} - \frac{(\Gamma_2+\Gamma_3)}{2}\sigma_{23} \\
\frac{d}{dt}\sigma_{31} &= -\iota\omega_{31}\sigma_{31} - \frac{\Gamma_3}{2}\sigma_{31}.
\end{aligned}$$

Les termes $\{\sigma_i\}$ correspondent aux populations des différents états, et les termes σ_{ij} sont les termes de cohérence. Ainsi la quantité $\mathrm{Tr}\,[\sigma] = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ est conservée durant l'évolution du système. Nous avons supposé que la relaxation est seulement due à l'émission spontanée avec Γ_2^{-1} et Γ_3^{-1} les durées de vie atomiques des états $|2\rangle$ et $|3\rangle$, respectivement.

Prenons maintenant en compte l'effet du laser. Nous supposons que le laser agit sur le système à travers les transitions entre les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$, les états $|2\rangle$ et $|3\rangle$ et les états $|3\rangle$ et $|1\rangle$. L'Hamiltonien de couplage est donné par :

$$\begin{aligned}
&\hbar[a_{12}\ u\ (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \\
&\quad + a_{23}\ u\ (|2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|) + a_{31}\ u\ (|3\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3|)]
\end{aligned}$$

où a_{12}, a_{23} et a_{31} sont des coefficients réels. Un calcul simple montre que dans la description de la matrice densité, les équations, lorsque l'effet du contrôle est pris en compte, peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_1 &= \Gamma_2\sigma_2 + \Gamma_3\sigma_3 - 2\ a_{12}\ u\ \Im(\sigma_{12}) + 2\ a_{31}\ u\ \Im(\sigma_{31}) \\
\frac{d}{dt}\sigma_2 &= -\Gamma_2\sigma_2 - 2\ a_{23}\ u\ \Im(\sigma_{23}) + 2\ a_{12}\ u\ \Im(\sigma_{12}) \\
\frac{d}{dt}\sigma_3 &= -\Gamma_3\sigma_3 - 2\ a_{31}\ u\ \Im(\sigma_{31}) + 2\ a_{23}\ u\ \Im(\sigma_{23}) \\
\frac{d}{dt}\sigma_{12} &= -\iota\omega_{12}\sigma_{12} - \frac{\Gamma_2}{2}\sigma_{12} \\
&\quad + \iota\ a_{12}\ u\ \sigma_1 - \iota\ a_{12}\ u\ \sigma_2 - \iota\ a_{31}\ u\ \sigma_{23}^* + \iota a_{23} u \sigma_{31}^* \\
\frac{d}{dt}\sigma_{23} &= -\iota\omega_{23}\sigma_{23} - \frac{(\Gamma_2+\Gamma_3)}{2}\sigma_{23} \\
&\quad + \iota\ a_{23}\ u\ \sigma_2 - \iota\ a_{23}\ u\ \sigma_3 - \iota\ a_{12}\ u\ \sigma_{31}^* + \iota a_{31} u \sigma_{23}^* \\
\frac{d}{dt}\sigma_{31} &= -\iota\omega_{31}\sigma_{13} - \frac{\Gamma_3}{2}\sigma_{31} \\
&\quad + \iota\ a_{31}\ u\ \sigma_3 - \iota\ a_{31}\ u\ \sigma_1 - \iota\ a_{23}\ u\ \sigma_{12}^* + \iota a_{12} u \sigma_{31}^*
\end{aligned}$$

où $\Im$ et $*$ signifient respectivement la partie imaginaire et le complexe conjugué d'un nombre complexe.

Nous supposons le champ laser résonnant avec les fréquences de transitions :

$$u = \frac{v_{12}}{a_{12}} e^{\iota\omega_{12}t} + \frac{v_{23}}{a_{23}} e^{\iota\omega_{23}t} + \frac{v_{31}}{a_{31}} e^{\iota\omega_{31}t} + C.C.$$

où $C.C.$ signifie le complexe conjugué et v_{12}, v_{23}, v_{31} sont des amplitudes complexes.

A. Moyennisation

Nous supposons ici que les fréquences $|\omega_{12}|$, $|\omega_{23}|$ et $|\omega_{31}|$ sont différentes et que les durées de vie atomiques des états $|2\rangle$ et $|3\rangle$ sont suffisamment longues pour avoir

$$\Gamma_2, \Gamma_3 \ll |\omega_{12}|, |\omega_{23}|, |\omega_{31}|.$$

Nous supposons aussi que les amplitudes sur u ne sont pas très grandes (champ faible) :

$$|v_{12}|, |v_{23}|, |v_{31}| \ll |\omega_{12}|, |\omega_{23}|, |\omega_{31}|.$$

Toutes ces hypothèses ensembles nous permettent d'appliquer l'*approximation du champ tournant*, dite aussi approximation séculaire et qui se justifie sans difficulté par des arguments type moyennisation.

En considérant le changement de variables, dépendant du temps :

$$\tilde{\sigma}_{12} = e^{\iota\omega_{12}t}\sigma_{12}, \quad \tilde{\sigma}_{23} = e^{\iota\omega_{23}t}\sigma_{23} \qquad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_{31} = e^{\iota\omega_{31}t}\sigma_{31}$$

et éliminant les termes de hautes fréquences, nous obtenons le système moyen suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_1 &= \Gamma_2\sigma_2 + \Gamma_3\sigma_3 \\
&\quad + \iota\ (v_{12}\tilde{\sigma}_{12} - v_{12}^*\tilde{\sigma}_{12}^*) - \iota\ (v_{31}\tilde{\sigma}_{31} - v_{31}^*\tilde{\sigma}_{31}^*) \\
\frac{d}{dt}\sigma_2 &= -\Gamma_2\sigma_2 \\
&\quad + \iota\ (v_{23}\tilde{\sigma}_{23} - v_{23}^*\tilde{\sigma}_{23}^*) - \iota\ (v_{12}\tilde{\sigma}_{12} - v_{12}^*\tilde{\sigma}_{12}^*) \\
\frac{d}{dt}\sigma_3 &= -\Gamma_3\sigma_3 \\
&\quad + \iota\ (v_{31}\tilde{\sigma}_{31} - v_{31}^*\tilde{\sigma}_{31}^*) - \iota\ (v_{23}\tilde{\sigma}_{23} - v_{23}^*\tilde{\sigma}_{23}^*) \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{12} &= -\frac{\Gamma_2}{2}\tilde{\sigma}_{12} \\
&\quad + \iota\ v_{12}^*(\sigma_1 - \sigma_2) - \iota v_{31}\tilde{\sigma}_{23}^* + \iota v_{23}\tilde{\sigma}_{31}^* \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{23} &= -\frac{(\Gamma_2+\Gamma_3)}{2}\tilde{\sigma}_{23} \\
&\quad + \iota\ v_{23}^*(\sigma_2 - \sigma_3) - \iota v_{12}\tilde{\sigma}_{31}^* + \iota v_{31}\tilde{\sigma}_{12}^* \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{31} &= -\frac{\Gamma_3}{2}\tilde{\sigma}_{31} \\
&\quad + \iota\ v_{31}^*(\sigma_3 - \sigma_1) - \iota v_{23}\tilde{\sigma}_{12}^* + \iota v_{12}\tilde{\sigma}_{23}^*.
\end{aligned}$$

B. Approximation lente

La conservation de probabilité est toujours satisfaite : $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1$ reste constante durant l'évolution du système. Ainsi nous pouvons éliminer l'équation correspondante à $\frac{d}{dt}\sigma_1$, en remplaçant σ_1 par $1-\sigma_2-\sigma_3$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_2 &= -\Gamma_2\sigma_2 \\
&\quad + \imath\ (v_{23}\tilde{\sigma}_{23} - v_{23}^*\tilde{\sigma}_{23}^*) - \imath\ (v_{12}\tilde{\sigma}_{12} - v_{12}^*\tilde{\sigma}_{12}^*) \\
\frac{d}{dt}\sigma_3 &= -\Gamma_3\sigma_3 \\
&\quad + \imath\ (v_{31}\tilde{\sigma}_{31} - v_{31}^*\tilde{\sigma}_{31}^*) - \imath\ (v_{23}\tilde{\sigma}_{23} - v_{23}^*\tilde{\sigma}_{23}^*) \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{12} &= -\frac{\Gamma_2}{2}\tilde{\sigma}_{12} \\
&\quad + \imath\ v_{12}^*(1-2\sigma_2-\sigma_3) - \imath v_{31}\tilde{\sigma}_{23}^* + \imath v_{23}\tilde{\sigma}_{31}^* \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{23} &= -\frac{(\Gamma_2+\Gamma_3)}{2}\tilde{\sigma}_{23} \\
&\quad + \imath\ v_{23}^*(\sigma_2-\sigma_3) - \imath v_{12}\tilde{\sigma}_{31}^* + \imath v_{31}\tilde{\sigma}_{12}^* \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{31} &= -\frac{\Gamma_3}{2}\tilde{\sigma}_{31} \\
&\quad + \imath\ v_{31}^*(-1+\sigma_2+2\sigma_3) - \imath v_{23}\tilde{\sigma}_{12}^* + \imath v_{12}\tilde{\sigma}_{23}^*.
\end{aligned}
$$

Supposons que la durée de vie du troisième état (Γ_3^{-1}) soit beaucoup plus courte que celle du deuxième état (Γ_2^{-1}). Ainsi la dynamique de la population du troisième état est beaucoup plus rapide que celle du deuxième. Le système ne reste que très peu de temps dans ce troisième état $|3\rangle$. Dès qu'il y est, il émet de façon spontanée un photon et redescend dans $|1\rangle$, l'état fondamental. Si l'on couple à cette transition entre $|1\rangle$ et $|3\rangle$ une lumière résonnante et que l'on détecte les photons de fluorescence émis à partir de $|3\rangle$, nous allons voir que nous pouvons en déduire une mesure partielle. Ce troisième état peut être vu comme une partie de l'appareil de mesure.

Retournons maintenant aux équations. Les inégalités

$$|v_{12}|, |v_{23}|, |v_{31}|, \Gamma_2 \ll \Gamma_3$$

nous permettent d'utiliser la théorie des perturbations singulières (on parle aussi d'approximation adiabatique) [?]. Prenons $\Gamma_3 = \bar{\Gamma}_3/\epsilon$ où $0 < \epsilon \ll 1$ et $\bar{\Gamma}_3$ est de même ordre que Γ_2. Les dynamiques s'écrivent

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_2 &= -\Gamma_2\sigma_2 + \imath\ (v_{23}\tilde{\sigma}_{23} - v_{23}^*\tilde{\sigma}_{23}^*) - \imath\ (v_{12}\tilde{\sigma}_{12} - v_{12}^*\tilde{\sigma}_{12}^*) \\
\frac{d}{dt}\sigma_3 &= -\frac{\bar{\Gamma}_3}{\epsilon}\sigma_3 + \imath\ (v_{31}\tilde{\sigma}_{31} - v_{31}^*\tilde{\sigma}_{31}^*) - \imath\ (v_{23}\tilde{\sigma}_{23} - v_{23}^*\tilde{\sigma}_{23}^*) \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{12} &= -\frac{\Gamma_2}{2}\tilde{\sigma}_{12} + \imath\ v_{12}^*(1-2\sigma_2-\sigma_3) - \imath v_{31}\tilde{\sigma}_{23}^* + \imath v_{23}\tilde{\sigma}_{31}^* \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{23} &= -\frac{\bar{\Gamma}_3}{2\epsilon}\tilde{\sigma}_{23} - \frac{\Gamma_2}{2}\tilde{\sigma}_{23} \\
&\quad + \imath\ v_{23}^*(\sigma_2-\sigma_3) - \imath v_{12}\tilde{\sigma}_{31}^* + \imath v_{31}\tilde{\sigma}_{12}^* \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{31} &= -\frac{\bar{\Gamma}_3}{2\epsilon}\tilde{\sigma}_{31} \\
&\quad + \imath\ v_{31}^*(-1+\sigma_2+2\sigma_3) - \imath v_{23}\tilde{\sigma}_{12}^* + \imath v_{12}\tilde{\sigma}_{23}^*.
\end{aligned}
$$

Celles-ci admettent exactement la même structure que le système lent/rapide de l'Annexe A où x correspond à $(\sigma_2, \tilde{\sigma}_{12})$ et y correspond à $(\sigma_3, \tilde{\sigma}_{23}, \tilde{\sigma}_{31})$. Ainsi, pour les termes dont l'ordre par rapport à ϵ est inférieur ou égal à 1, nous avons l'approximation suivante (utiliser le changement d'échelle $\sigma_3 \mapsto \frac{\bar{\Gamma}_3}{\epsilon}\sigma_3$ pour pouvoir appliquer directement l'approximation de l'Annexe A) :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{23} &= \frac{2\imath\epsilon}{\bar{\Gamma}_3}\left[v_{23}^*\sigma_2 + v_{31}\tilde{\sigma}_{12}^*\right] + O(\epsilon^2) \\
\tilde{\sigma}_{31} &= \frac{2\imath\epsilon}{\bar{\Gamma}_3}\left[v_{31}^*(\sigma_2-1) - v_{23}\tilde{\sigma}_{12}^*\right] + O(\epsilon^2) \\
\frac{\bar{\Gamma}_3}{\epsilon}\sigma_3 &= \frac{4\epsilon}{\bar{\Gamma}_3}\left[|v_{31}|^2(1-\sigma_2) + |v_{23}|^2\sigma_2 + 2\Re(v_{23}v_{31}\tilde{\sigma}_{12}^*)\right] \\
&\qquad + O(\epsilon^2).
\end{aligned}
$$

En prenant les termes d'ordre inférieur ou égal à 1, pour les dynamiques lentes réduites, nous avons (rappelons que $\Gamma_3 = \bar{\Gamma}_3/\epsilon$)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_2 &= -\Gamma_2\sigma_2 + \imath(v_{12}^*\tilde{\sigma}_{12}^* - v_{12}\tilde{\sigma}_{12}) \\
&\quad - \frac{4}{\Gamma_3}\left[|v_{23}|^2\sigma_2 + \Re(v_{23}v_{31}\tilde{\sigma}_{12}^*)\right] \qquad (1) \\
\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_{12} &= \imath\ v_{12}^*(1-2\sigma_2) - \frac{\Gamma_2}{2}\tilde{\sigma}_{12} \\
&\quad - \frac{2}{\Gamma_3}\left[(|v_{23}|^2 + |v_{31}|^2)\tilde{\sigma}_{12} + v_{23}v_{31}\right] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

avec la sortie

$$Y = \Gamma_3\sigma_3 = \frac{4}{\Gamma_3}\left[|v_{31}|^2(1-\sigma_2) + |v_{23}|^2\sigma_2 + 2\Re(v_{23}v_{31}\tilde{\sigma}_{12}^*)\right] \qquad (3)$$

et où les contrôles sont les trois amplitudes complexes v_{12}, v_{23} et v_{31}. Rappelons que le modèle lent, ci-dessus, est valable lorsque

$$|v_{12}|, |v_{23}|, |v_{31}|, \Gamma_2 \ll \Gamma_3$$

et

$$\left|\frac{d}{dt}v_{12}\right| \ll |\omega_{12}||v_{12}|, \quad \left|\frac{d}{dt}v_{23}\right| \ll |\omega_{23}||v_{23}|,$$
$$\left|\frac{d}{dt}v_{31}\right| \ll |\omega_{31}||v_{31}|.$$

Pour conclure, ces calculs justifient le modèle suivant (Γ_3 grand) :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dt}x_1 &=& u_1x_3 - \frac{\Gamma_2}{2}x_1 \\
\frac{d}{dt}x_2 &=& u_2x_3 - \frac{\Gamma_2}{2}x_1 \\
\frac{d}{dt}x_3 &=& -u_1x_1 - u_2x_2 - \Gamma_2(x_3+1) \\
y &=& v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3
\end{array}
\right. \qquad (4)
$$

avec

$$
\begin{aligned}
&x_1 + \imath\ x_2 = \tilde{\sigma}_{12}/2, \quad x_3 = 2\sigma_2 - 1 \\
&u_1 + \imath\ u_2 = -\imath\ v_{12}^*, \quad v_1 + \imath\ v_2 = v_{23}v_{31} \\
&v_3 = (|v_{23}|^2 - |v_{31}|^2)/2, \quad y = \Gamma_3 Y/4 - (|v_{23}|^2 + |v_{31}|^2)/2.
\end{aligned}
$$

Ce modèle montre comment on peut coupler les dynamiques quantiques de l'état $x = (x_1, x_2, x_3)$ appartenant à la sphère de Bloch (la sphère unité de $\mathbb{R}^3$) aux entrées classiques $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ (amplitudes des modes résonnants du champ) et à une sortie classique y (le nombre moyen de photons émis par unité de temps). Notons l'influence directe des entrées v_i sur la sortie y.

III. Un simple régulateur PI

Prenons (4) comme modèle du contrôle, avec $u_2 = v_2 = v_3 = 0$, $v_1 = 1$. Supposons aussi que $\Gamma_2 = 0$: les états 1 et 2 sont sans décohérence (une sorte d'état noir). Supposons que $x_2 = 0$ (cela est toujours le cas quitte à effectuer une rotation autour de l'axe x_3). Nous avons alors

$$\frac{d}{dt}x_1 = u_1 x_3, \quad \frac{d}{dt}x_3 = -u_1 x_1, \quad y = x_1.$$

L'état (x_1, x_3) évolue sur le cercle $\mathbb{S}^1$. Supposons que le but est de stabiliser le système autour de $x_1 = 0$ et $x_3 = 1$ à l'aide du terme de contrôle $u_1 \in [-u^{\max}, u^{\max}]$ ($u^{\max} > 0$). Ainsi le régulateur (PI) de gains $K_p > 0$ et $K_i > 0$

$$u_1 = \begin{cases} -u^{\max}, & \text{si} - K_p y + I < -u^{\max} \\ -K_p y + I, & \text{si } - u^{\max} \le -K_p y + I \le u^{\max} \\ u^{\max}, & \text{si } u^{\max} < -K_p y + I \end{cases}$$

avec l'anti-emballement (pour gérer les contraintes sur u_1)

$$\frac{d}{dt}I = \frac{K_i}{K_p}(u_1 - I)$$

assure la stabilisation quasi-globale autour de $(x_1 = 0, x_3 = 1)$. En fait, le système en boucle fermée (un système sur le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$) admet seulement deux états stationnaires : $(x_1, x_3) = (0, 1)$ avec $I = 0$ est asymptotiquement stable, $(x_1, x_3) = (0, -1)$ avec $I = 0$ est instable. Toutes les trajectoires en boucle fermée différentes de l'état stationnaire instable convergent asymptotiquement et exponentiellement vers l'état stationnaire stable.

À l'exception du fait que le système original évolue sur $\mathbb{S}^1$ et pas sur $\mathbb{R}$, ce régulateur PI est l'analogue du régulateur PI classique couramment appliqué pour le système du première ordre $\frac{d}{dt}y = u$ et dont l'intérêt pratique ainsi que la robustesse sont bien établis.

IV. Généralisation

Dans cette section, nous adaptons les calculs de la Section II lorsqu'à la place des équations de Bloch, une équation de type Lindblad est considérée. Nous montrons que le système lent réduit obéit, de même, à une équation du type Lindblad avec les opérateurs qui peuvent être déduits directement des opérateurs originaux.

Considérons l'équation maîtresse suivante, pour la matrice densité ρ (matrice hermitienne $n \times n$ positive) associée à un système de dimension n :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho &= -\frac{\imath}{\hbar}[H_0 + u(t)H_1, \rho] + \Gamma\mathcal{D}[Q](\rho), \\ Y &= \Gamma \mathrm{Tr}\left[Q^\dagger Q \rho\right]. \end{aligned}$$

Les opérateurs Hermitiens H_0 et H_1 sont, respectivement, l'Hamiltonien libre et l'Hamiltonien d'interaction avec une source cohérente de photons $u(t) \in \mathbb{R}$. Pour les opérateurs A et B arbitraires, le super-opérateur $\mathcal{D}$ est défini par

$$\mathcal{D}[A](B) = \frac{1}{2}(2ABA^\dagger - A^\dagger AB - BA^\dagger A).$$

L'opérateur Q modélise la décohérence associée à la mesure Y. $\Gamma > 0$ est une constante de normalisation liée à l'inverse du temps de décohérence associé à la mesure Y. Ainsi Q n'a pas de dimension et nous supposons partout dans cette section que Q est un opérateur de transition de la forme $|g\rangle\langle e|$, où $|g\rangle$ et $|e\rangle$ sont deux états propres de l'Hamiltonien libre H_0. Bien évidement, nous avons les deux relations suivantes :

$$Q^2 = 0, \qquad Q^\dagger Q = P = |e\rangle\langle e|,$$

où P est l'opérateur de projection sur l'état excité $|e\rangle$.

Les fréquences de transition, $\omega_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ (où les λ_i's sont les valeurs propres de $H_0/\hbar$), sont supposées beaucoup plus grandes que la décohérence Γ. Donc, nous avons la possibilité d'utiliser l'approximation séculaire. Nous considérons la transformation $\rho \mapsto U\rho U^\dagger$, où $U = e^{iH_0 t/\hbar}$ est le propagateur de l'évolution libre. D'autre part, nous supposons que le champ de contrôle $u(t)$ est dans le régime résonnant par rapport aux fréquences naturelles du système, et nous modulons les amplitudes $u_{ij}(t)$:

$$u(t) = \sum_{i,j} u_{ij}(t)\sin(\omega_{ij}t).$$

Les amplitudes $u_{ij}(t)$'s sont lentement variables.

Après moyennisation, nous obtenons l'équation maîtresse suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho &= -\frac{\imath}{\hbar}[H, \rho] + \frac{\Gamma}{2}\left(2Q\rho Q^\dagger - Q^\dagger Q\rho - \rho Q^\dagger Q\right), \\ Y &= \Gamma\mathrm{Tr}\left[Q^\dagger Q\rho\right] \end{aligned} \tag{5}$$

où H correspond aux termes séculaires de $uUH_1U^\dagger$. Une telle approximation est valable lorsque les amplitudes u_{ij} sont suffisamment petites.

Nous supposons aussi que la relaxation de l'état $|e\rangle$ vers l'état $|g\rangle$, qui aboutit à la détection des photons, est beaucoup plus rapide que les autres dynamiques de l'équation (5) (durée de vie atomique courte pour l'état $|e\rangle$). Alors nous pouvons prendre $\Gamma = \bar{\Gamma}/\epsilon$ où ϵ est un petit paramètre positif. Ainsi, dans le repère d'interaction et pour les amplitudes suffisamment petites u_{ij}, nous avons l'équation maîtresse suivante :

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{\imath}{\hbar}[H, \rho] + \frac{\bar{\Gamma}}{2\epsilon}\left(2Q\rho Q^\dagger - Q^\dagger Q\rho - \rho Q^\dagger Q\right),$$

où $0 < \epsilon \ll 1$.

Définissons :

$$\begin{aligned} \rho_f &= P\rho + \rho P - P\rho P \\ \rho_s &= (1 - P)\rho(1 - P) + Q\rho Q^\dagger. \end{aligned}$$

Comme $\rho = \rho_s + \rho_f - QP\rho_f PQ^\dagger$, il y a une correspondance bijective entre ρ et (ρ_f, ρ_s) : nous avons une sorte de "changement de variables" pour ρ qui découple la partie lente et la partie rapide de la dynamique, et qui nous propose une "forme standard de Tikhonov" :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_f &= -\frac{\bar{\Gamma}}{2\epsilon}(\rho_f + P\rho_f P) \\ &\qquad - \frac{\imath}{\hbar}(P[H, \rho] + [H, \rho]P - P[H, \rho]P), \\ \imath\hbar\frac{d}{dt}\rho_s &= (1 - P)[H, \rho](1 - P) + Q[H, \rho]Q^\dagger. \end{aligned}$$

Alors ρ_f est associée à la partie rapide des dynamiques et ρ_s représente la partie lente. La partie rapide est asymptotiquement stable puisque $-\frac{\bar{\Gamma}}{2\epsilon}(\rho_f+P\rho_f P)$ définit un super-opérateur défini-négatif sur l'espace des opérateurs Hermitiens :

$$\mathrm{Tr}\left[-(\rho_f + P\rho_f P)\rho_f\right] = -(\|\rho_f\|^2 + \|P\rho_f\|^2).$$

Ici nous pouvons appliquer les calculs d'approximation de la variété lente comme ils sont décrits dans l'Annexe A. En calculant les termes du premier ordre, nous trouvons l'approximation suivante pour ρ_f par rapport à ρ_s :

$$\rho_f = \frac{-2\imath\epsilon}{\hbar\bar{\Gamma}}\,(PH\rho_s - \rho_s HP) + O(\epsilon^2).$$

Les dynamiques lentes sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_s &= -\frac{\imath}{\hbar}[H_s,\rho_s] \\ &\quad + 4\epsilon\bar{\Gamma}\left(\bar{Q}\rho_s\bar{Q}^\dagger - \frac{1}{2}\bar{Q}^\dagger\bar{Q}\rho_s - \frac{1}{2}\rho_s\bar{Q}^\dagger\bar{Q}\right) + O(\epsilon^2),\end{aligned}$$

où

$$H_s = (1-P)H(1-P)$$

et

$$\bar{Q} = \frac{1}{\hbar\bar{\Gamma}}(1-P)QH(1-P), \quad \bar{Q}^\dagger = \frac{1}{\hbar\bar{\Gamma}}(1-P)HQ^\dagger(1-P).$$

Notons que, comme Q, l'opérateur $\bar{Q}$ est sans dimension. Cela se passe différemment pour la sortie Y. Nous avons :

$$\begin{aligned}Y(t) = \frac{\bar{\Gamma}}{\epsilon}\mathrm{Tr}\left[Q^\dagger Q\rho\right] &= \frac{\bar{\Gamma}}{\epsilon}\mathrm{Tr}\left[Q^\dagger Q\rho_f\right] \\ &= \frac{-2\imath}{\hbar}\,\mathrm{Tr}\left[P(PH\rho_s - \rho_s HP)\right] + O(\epsilon).\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{Tr}\left[P(PH\rho_s - \rho_s HP)\right] = 0$. Il nous faut donc aller jusqu'à l'ordre 2. À l'aide de l'Annexe A, des calculs simples mais fastidieux aboutissent à l'approximation naturelle suivante

$$Y(t) = 4\epsilon\bar{\Gamma}\mathrm{Tr}\left[\bar{Q}^\dagger\bar{Q}\rho_s\right] + O(\epsilon^2).$$

Mais $\bar{\Gamma}/\epsilon = \Gamma$. Ainsi, nous avons montré que quand Γ est grand (par rapport à $\frac{H}{\hbar}$), l'équation maîtresse lente associée à (5) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_s &= -\frac{\imath}{\hbar}[H_s,\rho_s] + \frac{2}{\Gamma}(2Q_s\rho_s Q_s^\dagger - Q_s^\dagger Q_s\rho_s - \rho_s Q_s^\dagger Q_s), \\ Y &= \frac{2}{\Gamma}\mathrm{Tr}\left[Q_s Q_s \rho_s\right]\end{aligned}$$

où

$$\rho_s = (1-P)\rho(1-P),$$
$$H_s = (1-P)H(1-P), \qquad Q_s = (1-P)Q\left(\frac{H}{\hbar}\right)(1-P)$$

avec $P = Q^\dagger Q$. Rappelons que H est l'Hamiltonien dans le repère d'interaction avec des modes laser résonnants et après l'approximation séculaire.

Pour conclure, nous remarquons que pour un ensemble de systèmes quantiques indépendants et identiques, et lorsque la décohérence due à la mesure subit des dynamiques rapides par rapport au reste du système, les approximations adiabatiques nous aident à trouver la dynamique lente du système ainsi que la mesure par rapport à cette dynamique lente. Notons que dans ce nouveau système, le terme de décohérence peut être éliminé dans une approximation du premier ordre (Γ grand). Nous obtenons alors un système de la forme

$$\frac{d}{dt}\rho_s = -\frac{\imath}{\hbar}[H_s,\rho_s],$$

où le contrôle apparaît de façon linéaire dans l'Hamiltonien réduit H_s. Ce système correspond alors à un système bilinéaire avec les fonctions d'onde comme variables d'état. Nous avons en plus la mesure issue de cette évolution lente donnée par Y. Nous pouvons désormais nous intéresser aux problèmes de contrôle avec mesure continue associés à ce système.

V. Conclusion

Dans cette communication, nous avons utilisé les équations de Lindblad pour représenter la dynamique d'un système quantique ouvert, incluant entre autre le processus de mesure. En utilisant les perturbations singulières, nous avons réduit le modèle lorsque certaines hypothèses sur les paramètres du systèmes sont vérifiées. Cette réduction de modèle nous permet de comprendre sous quelles conditions il est possible de modéliser une système quantique avec mesure continu par une équation conservative de type Schrödinger et où la matrice densité évolue de façon cohérente. Cette réduction permet aussi de mieux comprendre dans quelles situations il est envisageable de poser le feedback d'un système quantique en termes classiques et usuels.

Appendix

I. Systèmes lents/rapides

Nous rappelons ici une approximation qui peut être justifiée parfaitement à l'aide des techniques géométriques de perturbation singulière et de variété centre [?], [?], [?].

Considérons le système lent/rapide (x et y ont des dimensions arbitraires, f et g sont des fonctions régulières)

$$\frac{d}{dt}x = f(x,y), \qquad \frac{d}{dt}y = -\frac{1}{\epsilon}Ay + g(x,y)$$

où x et y sont respectivement les états lent et rapide (coordonnés de Tikhonov), toutes les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles strictement négatives, et ϵ est un petit paramètre strictement positif. Alors la variété invariante attractive admet pour l'équation

$$y = \epsilon A^{-1}g(x,0) + O(\epsilon^2)$$

et la restriction des dynamiques sur cette variété invariante lente s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= f(x,\epsilon A^{-1}g(x,0)) + O(\epsilon^2) \\ &= f(x,0) + \epsilon\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x,0)}A^{-1}g(x,0) + O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Le développement de Taylor pour g peut être utilisé pour trouver les termes d'ordres plus élevés. Par exemple, le terme d'ordre deux dans le développement de y est donné par :

$$y = \epsilon A^{-1} g(x,0)$$
$$+\epsilon^2 A^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial y}|_{(x,0)} A^{-1} g(x,0) - A^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}|_{(x,0)} f(x,0)\right) + O(\epsilon^3),$$

et ainsi de suite.