

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS  
PRINCIPE DE MOINDRE ACTION  
STABILITÉ LAGRANGIENNE

P. Rouchon<sup>1</sup>

Août 1991

<sup>1</sup>Adresse permanente : École des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes, 60, Bd. Saint-Michel, 75006 Paris.

Adresse provisoire : Direction de l'Énergétique, ONERA, 29 av. de la Division Leclerc, BP 72, 92322 Châtillon Cedex.

La description lagrangienne du mouvement d'un mélange de fluides parfaits permet de mettre en évidence, au moins de façon formelle, le caractère hamiltonien de la dynamique : le mouvement d'un mélange de fluides parfaits compressibles est similaire à celui d'un point matériel soumis à une force dérivant d'un potentiel ; le mouvement d'un mélange de fluides parfaits incompressibles est analogue à celui d'un point matériel assujéti à une liaison holonome. De telles analogies fournissent, à partir du principe de moindre action de Maupertuis(-Euler-Lagrange-Jacobi), une interprétation géométrique du mouvement en tant que géodésiques sur des variétés riemanniennes de dimension infinie (groupes de difféomorphismes). La stabilité lagrangienne du mouvement correspond ainsi à la stabilité du flot des géodésiques, stabilité conditionnée par le signe de la courbure. Les calculs de courbure permettent alors de caractériser, à partir d'une analyse non complètement justifiée mathématiquement, la stabilité lagrangienne par des champs spatiaux de matrices symétriques (définies à partir des champs de pression, vitesse et densité) et par leurs propriétés spectrales.



# Contents

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Point matériel</b>	<b>11</b>
1.1 Mouvement rectiligne uniforme . . . . .	11
1.1.1 Équation de Newton . . . . .	11
1.1.2 Minimisation de l'action . . . . .	11
1.1.3 Interprétation géométrique . . . . .	12
1.2 Mouvement dérivant d'un potentiel . . . . .	12
1.2.1 Équation de Newton . . . . .	13
1.2.2 Minimisation de l'action . . . . .	13
1.2.3 Interprétation géométrique . . . . .	13
1.3 Liaison holonome . . . . .	15
1.3.1 Équation de Newton . . . . .	15
1.3.2 Minimisation de l'action . . . . .	15
1.3.3 Interprétation géométrique . . . . .	16
1.4 Approximation d'une liaison holonome par un potentiel . . . . .	16
1.5 Frottement . . . . .	17
<b>2 Masse fluide</b>	<b>19</b>
2.1 Points de vues eulérien et lagrangien . . . . .	19
2.2 Fluide sans cohésion et équation de Burgers . . . . .	20
2.2.1 Équation de Newton . . . . .	20
2.2.2 Minimisation de l'action . . . . .	21
2.2.3 Interprétation géométrique . . . . .	22
2.2.4 Problème de Cauchy et conditions aux limites . . . . .	23
2.3 Fluide parfait compressible . . . . .	24
2.3.1 Équation de Newton . . . . .	24
2.3.2 Minimisation de l'action . . . . .	26
2.3.3 Interprétation géométrique . . . . .	26
2.4 Fluide parfait incompressible . . . . .	27
2.4.1 Équation de Newton . . . . .	27
2.4.2 Minimisation de l'action . . . . .	28
2.4.3 Interprétation géométrique . . . . .	28
2.5 Fluide faiblement compressible . . . . .	29
2.6 Viscosité . . . . .	30
<b>3 Stabilité lagrangienne</b>	<b>33</b>

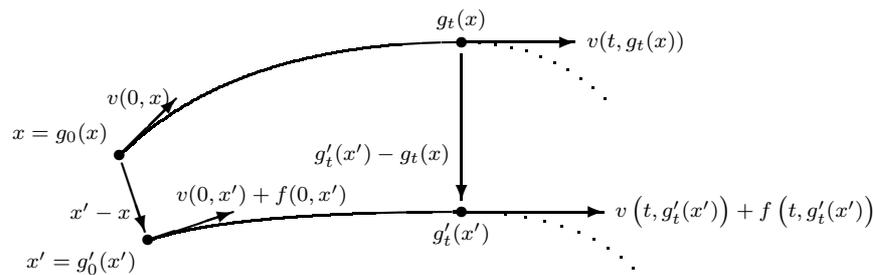
3.1	Relations cinématiques . . . . .	34
3.2	Fluide sans cohésion . . . . .	34
3.2.1	Connexion . . . . .	35
3.2.2	Courbure . . . . .	36
3.3	Fluide parfait compressible . . . . .	37
3.3.1	Connexion . . . . .	37
3.3.2	Courbure . . . . .	38
3.3.3	Equation dérivée de celle de Jacobi . . . . .	40
3.4	Fluide parfait incompressible . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Mélanges de fluides parfaits</b>	<b>47</b>
4.1	Mélange de fluides parfaits compressibles . . . . .	47
4.2	Mélange de fluides parfaits incompressibles . . . . .	47
	<b>Conclusions</b>	<b>51</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>53</b>
	<b>A Notations</b>	<b>55</b>
	<b>B Rappels de géométrie riemannienne</b>	<b>59</b>

# Introduction

Le recours aux modèles statistiques en mécanique des fluides a vraisemblablement pour origine le caractère fortement instable des écoulements turbulents [19]. Il est donc logique d'attendre d'une analyse de ces instabilités des renseignements utiles à l'élaboration des modèles probabilistes de turbulence.

La turbulence apparaît aux nombres de Reynolds élevés pour lesquels les effets convectifs non linéaires deviennent majoritaires. Il est donc intéressant d'étudier, tout d'abord, la stabilité des écoulements pour les fluides parfaits où les effets dissipatifs dus à la viscosité et à la conduction de la chaleur sont négligés.

La méthode la plus répandue pour caractériser la stabilité d'un écoulement est eulérienne. Elle consiste à étudier l'évolution temporelle de petites perturbations du champ initial des vitesses [10]. Nous proposons ici une méthode lagrangienne beaucoup moins développée que la précédente. Pour un écoulement nominal, a priori instationnaire et de vitesse  $v(t, x)$ , il s'agit d'analyser la sensibilité des trajectoires, trajectoires notées  $g_t(x)$  ( $\dot{g}_t(x) = v(t, g_t(x))$ ), à des petites perturbations portant à la fois sur la position initiale,  $x'$  au lieu de  $x$ , et sur la vitesse initiale  $v + f$  au lieu de  $v$ . Comme l'illustre la figure ci-dessous, on s'intéresse donc à l'écart entre la trajectoire nominale  $g_t(x)$  dans l'écoulement nominal  $v$  et la trajectoire perturbée  $g'_t(x')$  dans l'écoulement perturbé  $v + f$ .



**La stabilité lagrangienne d'un écoulement  $v$  est caractérisée par l'écart  $g'_t(x') - g_t(x)$  entre les trajectoires nominale  $g_t(x)$  et perturbée  $g'_t(x')$ .**

Une telle analyse pour un fluide parfait incompressible a récemment été conduite [17]. Elle fait apparaître l'échelle de temps de Kolmogorov  $\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}$  en tant que constante de temps de divergence exponentielle caractéristique d'une instabilité lagrangienne.

Ce rapport reprend cette analyse pour l'étendre aux mélanges de fluides parfaits in-

compressibles et incompressibles. L'exposé s'articule autour des deux points suivants :

1. une interprétation géométrique du mouvement où les courbes  $t \rightarrow g_t$  sont des géodésiques pour des métriques bien choisies sur des groupes de difféomorphismes ; cette interprétation a été initiée par Arnol'd [5] pour les fluides parfaits incompressibles (voir aussi [12, 11]) ;
2. une caractérisation de la stabilité lagrangienne du mouvement (i.e. du flot des géodésiques) par le calcul et l'étude du signe de la courbure sectionnelle (voir [3], fin de l'appendice 2).

Le chapitre 2 contient l'interprétation géométrique pour les fluides parfaits compressibles et incompressibles : ce chapitre s'appuie sur le chapitre 1 et l'analogie formelle entre la dynamique d'un fluide parfait compressible (resp. incompressible) et celle du point matériel soumis à une force extérieure dérivant d'un potentiel (resp. assujetti à une liaison holonome). Dans le chapitre 3, nous calculons le tenseur de courbure dans les cas compressible et incompressible. Nous étudions aussi le signe de la courbure sectionnelle, ce qui permet, dans une certaine mesure, de caractériser la stabilité lagrangienne. Dans le chapitre 4, nous étendons les résultats des chapitres 2 et 3 aux mélanges. Pour conclure, nous traduisons, dans un langage que nous espérons directement compréhensible par un mécanicien des fluides, les principales conséquences de cette étude géométrique de la stabilité lagrangienne. Les notions nécessaires de géométrie riemannienne sont rappelées dans l'annexe B. La liste des principales notations forme l'annexe A.

# Chapter 1

## Point matériel

Le contenu de ce chapitre se trouve dans de très nombreux cours de mécanique à des degrés divers de formalisation. Nous avons tenu à rappeler ici les divers points de vue, tous équivalents, pour décrire la dynamique d'un point matériel obéissant aux lois de Newton. Dans le chapitre 2, nous allons développer, pour décrire le mouvement d'un ensemble de points matériels constituant une masse fluide, exactement les mêmes points de vue : pour cela, il nous suffira de remplacer la position du point matériel  $q(t) \in R^3$  par le difféomorphisme  $g_t \in \mathcal{D}$  décrivant de façon lagrangienne le mouvement.

### 1.1 Mouvement rectiligne uniforme

A ce type de mouvement correspond celui d'une masse fluide sans cohésion et l'équation de Burgers  $\frac{\partial v}{\partial t} + Dv v = 0$ .

#### 1.1.1 Équation de Newton

Considérons un point de position  $q(t)$  de masse  $m$  qui se déplace dans l'espace usuel euclidien  $R^3$ . Supposons qu'il ne soit soumis à aucune force extérieure. D'après le principe d'inertie de Galilée, on sait que son mouvement est extrêmement simple : il est rectiligne et la vitesse reste constante. Le mouvement est décrit par l'équation de Newton suivante :

$$\ddot{q} = 0. \quad (1.1)$$

#### 1.1.2 Minimisation de l'action

Il est possible de décrire de manière parfaitement équivalente le mouvement de la façon suivante. La courbe  $t \rightarrow q(t)$  décrite par le point matériel entre les instants  $t = a$  et  $t = b > a$  (instants fixés a priori) pour aller des points  $q_a = q(a)$  à  $q_b = q(b)$  (points fixés a priori) est solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\substack{\text{courbes } q(t) \text{ tq.} \\ q(a) = q_a \text{ et } q(b) = q_b}} \int_a^b T(\dot{q}(t)) dt \quad (1.2)$$

où  $T(\dot{q}) = m\dot{q}^2/2$  correspond à l'énergie cinétique du point. L'intégrale ci-dessus est généralement appelée action. Ceci explique l'expression "principe de la moindre action" due à Maupertuis.

La preuve de l'équivalence entre les principes de Galilée et de moindre action est simple et instructive pour la suite. Soit  $q(t) + \delta q(t)$  une courbe voisine de  $q(t)$  allant de  $q_a$  à  $q_b$  entre les instants  $a$  et  $b$ . On a, au premier ordre en  $\delta q$ ,

$$\int_a^b T(\dot{q}(t) + \dot{\delta q}(t)) dt \approx \int_a^b m\dot{q}(t) \cdot \dot{\delta q}(t) dt = m [\dot{q} \cdot \delta q]_{t=a}^{t=b} - m \int_a^b \ddot{q}(t) \cdot \delta q(t) dt.$$

Mais  $\delta q(a) = 0$  et  $\delta q(b) = 0$  (les extrémités doivent rester fixes) donc

$$\int_a^b T(\dot{q}(t) + \dot{\delta q}(t)) dt \approx \int_a^b m\dot{q}(t) \cdot \dot{\delta q}(t) dt = -m \int_a^b \ddot{q}(t) \cdot \delta q(t) dt.$$

Il est capital de bien remarquer dans les calculs précédents, l'intégration par partie. Elle permet de transformer  $\dot{\delta q}$  en  $\delta q$  et ainsi de s'affranchir de la contrainte intégrale sur la variation  $\delta q$ ,  $\int_a^b \dot{\delta q} dt = 0$ , liée au fait que les extrémités restent fixes.

La condition d'extrémalité du première ordre

$$\frac{1}{2} \delta \left[ \int_a^b m\dot{q}(t) \cdot \dot{q}(t) dt \right] = - \int_a^b m\ddot{q}(t) \cdot \delta q(t) dt = 0$$

est équivalente à  $\ddot{q} = 0$  car la variation  $\delta q(t)$  est arbitraire (à l'exception des extrémités pour  $t = a, b$ , ce qui n'est pas gênant). Réciproquement, le mouvement rectiligne uniforme  $q(t)$  tel que  $\ddot{q} = 0$  avec  $q(a) = q_a$  et  $q(b) = q_b$  correspond effectivement à un minimum.

### 1.1.3 Interprétation géométrique

Le principe de moindre action peut être interprété géométriquement. Des calculs similaires montrent que, si au lieu de prendre l'énergie cinétique on avait pris le module de la vitesse,  $\|\dot{q}\| = \sqrt{\dot{q} \cdot \dot{q}}$ , pour calculer l'action, la condition d'extrémalité reste la même, i.e.  $\ddot{q} = 0$ . Dans ce cas l'action, i.e. l'intégrale  $\int_a^b \|\dot{q}\| dt$ , n'est autre que la longueur de la courbe joignant  $q_a$  à  $q_b$  ( $d\tau = \|\dot{q}\| dt$ ,  $\tau$  abscisse curviligne). Or, dans l'espace euclidien usuel, les courbes de longueur minimale, i.e. les géodésiques, sont des droites.

Il y a donc équivalence entre l'étude du mouvement inertiel d'un point matériel dans l'espace euclidien et celle de ses géodésiques. Ici les équations sont triviales et une telle équivalence est sans aucun intérêt. Cependant, la situation est rigoureusement similaire si, au lieu de l'espace usuel, on a, par exemple, une surface (plus généralement une variété riemannienne). Dans ce cas, l'étude du mouvement inertiel d'un point matériel qui glisse sans frotter sur cette surface peut être notablement simplifié si l'on sait que la courbe suivie par le point est une géodésique de la surface (cf. la sphère dont les géodésiques sont les grands cercles). Cette équivalence est à la base de notre étude qui utilise cette vision géométrique du mouvement dans le cas d'un fluide.

## 1.2 Mouvement dérivant d'un potentiel

A ce type de mouvement correspond celui d'un fluide parfait compressible.

### 1.2.1 Équation de Newton

Supposons que le point de masse  $m$  soit soumis à une force dérivant du potentiel  $U(q)$ . Le mouvement est alors régi par l'équation de Newton

$$m\ddot{q} = -\text{grad}U(q). \quad (1.3)$$

### 1.2.2 Minimisation de l'action

Comme précédemment, une description équivalente du mouvement par principe variationnel est encore possible. Soit  $q(t)$  solution de (1.3). La courbe  $t \rightarrow q(t)$  décrite par le point matériel entre les instants  $t = a$  et  $t = b > a$  et pour aller des points  $q_a = q(a)$  à  $q_b = q(b)$  est solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\substack{\text{courbes } q(t) \text{ telles que} \\ q(a) = q_a \text{ et } q(b) = q_b}} \int_a^b [T(\dot{q}(t)) - U(q(t))] dt \quad (1.4)$$

où  $T(\dot{q}) = m\dot{q}^2/2$  correspond à l'énergie cinétique et  $U(q)$  à l'énergie potentielle. L'intégrale ci-dessus est également appelée action. L'intégrande  $L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q)$  porte le nom de lagrangien.

La preuve de l'équivalence entre ces deux descriptions du mouvement est très similaire à la précédente. On a :

$$\delta \left( \int_a^b (T(\dot{q}) - U(q)) dt \right) = \int_a^b [\delta(T(\dot{q})) - \delta(U(q))] dt.$$

Or  $\delta(T(\dot{q})) = m\dot{q} \cdot \delta\dot{q}$  et  $\delta(U(q)) = \text{grad}U(q) \cdot \delta q$ . Donc

$$\delta \left( \int_a^b (T(\dot{q}) - U(q)) dt \right) = \int_a^b [m\dot{q} \cdot \delta\dot{q} - \text{grad}U(q) \cdot \delta q] dt = - \int_a^b (m\ddot{q} + \text{grad}U(q)) \cdot \delta q dt$$

(intégration par partie du premier terme avec  $\delta q(a) = \delta q(b) = 0$ ). La condition d'extrémalité du première ordre,

$$\delta \left( \int_a^b (T(\dot{q}) - U(q)) dt \right),$$

est équivalente à  $m\ddot{q} + \text{grad}U(q) = 0$ . Le mouvement  $q(t)$  tel que  $m\ddot{q} = -\text{grad}U(q)$  avec  $q(a) = q_a$  et  $q(b) = q_b$  correspond effectivement à un minimum si les points de départ et d'arrivée,  $q_a$  et  $q_b$ , sont proches.

### 1.2.3 Interprétation géométrique

Une interprétation géométrique d'un tel mouvement existe également. Elle est sensiblement plus complexe que celle du point matériel libre et résulte de la forme de Maupertuis du principe de moindre action (voir, par exemple, [3] page 243 ou [1], pages 246-251). Nous en donnons ici une démonstration directe et autonome qui peut être rendue totalement rigoureuse si nécessaire.

Considérons une constante  $h$  et un domaine de l'espace où  $U(q) < h$ . Soient deux points  $q_a$  et  $q_b$  dans ce domaine et  $\tau_a < \tau_b$  deux réels. Soit le problème de minimisation suivant

$$\min_{\substack{\text{courbes } q(\tau) \text{ telles que} \\ q(\tau_a) = q_a \text{ et } q(\tau_b) = q_b}} \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{[h - U(q(\tau))] T(q'(\tau))} d\tau$$

où  $q' = \frac{dq}{d\tau}$ . Ce problème n'est autre que la recherche de la courbe de plus petite longueur joignant  $q_a$  et  $q_b$  lorsque la longueur  $dl$  d'un élément infinitésimal de courbe dépend de la position de cet élément dans l'espace. Plus précisément, au lieu de calculer l'abscisse curviligne  $l$  par la relation différentielle,  $dl = \sqrt{q'(\tau) \cdot q'(\tau)} d\tau$ , en faisant appel à la métrique euclidienne usuelle, on utilise une autre métrique, a priori non euclidienne, en prenant la formule  $dl = \sqrt{[h - U(q(\tau))] T(q'(\tau))} d\tau$ , qui fait intervenir explicitement  $q(\tau)$ . Pour un même  $q'$  nous voyons que l'élément de longueur associé sera différent, si l'on se trouve en  $q_1$  ou en  $q_2$ , dès que  $U(q_1) \neq U(q_2)$ .

Une courbe  $q(\tau)$  réalisant le minimum, vérifie nécessairement

$$\delta \left[ \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{(h - U(q)) T(q')} d\tau \right] = \frac{1}{2} \int_{\tau_a}^{\tau_b} \frac{1}{\sqrt{(h - U(q)) T(q')}} \delta [(h - U(q)) T(q')] d\tau = 0.$$

Une intégration par partie, avec  $\delta q(\tau_a) = \delta q(\tau_b) = 0$ , donne la condition d'extrémalité du premier ordre :

$$m \left( \sqrt{\frac{h - U(q)}{T(q')}} q' \right)' + \sqrt{\frac{T(q')}{h - U(q)}} \text{grad}U(q) = 0. \quad (1.5)$$

Il s'agit de l'équation des géodésiques pour la métrique  $dl = \sqrt{(h - U(q)) T(q')} d\tau$ .

Soit une géodésique  $q(\tau)$ , i.e. une solution de (1.5). On sait que  $(h - U(q))T(q')$  est une constante du mouvement que l'on peut prendre égale à 1. Considérons le changement de paramétrage  $\tau \rightarrow t$  défini par

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{h - U(q(\tau))}$$

et notons

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dq}{d\tau} = (h - U) q'.$$

Avec ce nouveau paramétrage  $t$ , la courbe  $t \rightarrow q(t)$  est solution de l'équation de Newton  $m\ddot{q} = -\text{grad}U(q)$  puisque  $(h - U)T(q') = 1$ . Ainsi toute courbe  $\tau \rightarrow q(\tau)$  solution de (1.5) est, à un reparamétrage près, solution de l'équation de Newton (1.3).

Réciproquement, considérons une solution  $q(t)$  de l'équation de Newton (1.3). On sait que l'énergie mécanique  $H(q, \dot{q}) = U(q) + T(\dot{q})$  est indépendante du temps. Notons  $h$  sa valeur pour la solution  $q(t)$  :  $h = H(q(t), \dot{q}(t))$ . On a  $T(\dot{q}) = h - U(q)$ . Soit le nouveau paramétrage  $\tau \rightarrow q(\tau)$  défini par  $\frac{d\tau}{dt} = h - U(q(\tau)) = T(\dot{q}(t))$ . On note

$$q' = \frac{dq}{d\tau} = \frac{1}{h - U(q(t))} \dot{q}.$$

On vérifie alors que

$$m \left( \sqrt{\frac{h - U(q)}{T(\dot{q})}} \dot{q} \right)' = - \sqrt{\frac{T(\dot{q})}{h - U(q)}} \operatorname{grad} U(q).$$

En résumé, nous avons redémontré le résultat classique suivant : les courbes  $t \rightarrow q(t)$ , solutions de l'équation de Newton  $m\ddot{q} = -\operatorname{grad} U(q)$  et de même énergie mécanique  $h = T(\dot{q}) + U(q)$ , correspondent, après un changement de paramétrage  $t \rightarrow \tau$  défini par  $d\tau = (h - U(q(t))) dt$ , aux géodésiques de l'espace doté de la métrique riemannienne où toute courbe  $t \rightarrow q(t)$  admet pour élément de longueur  $dl = \sqrt{(h - U(q)) T(\dot{q})} dt$ . Il est à noter que, si  $U$  est constant, on retrouve bien les résultats précédents: la métrique induite est alors, à une constante près, identique à la métrique euclidienne usuelle; les géodésiques sont alors les droites.

## 1.3 Liaison holonome

A ce type de mouvement correspond celui d'un fluide parfait incompressible.

### 1.3.1 Équation de Newton

Nous supposons, pour simplifier, que  $q$  glisse sans frotter sur la sphère  $S_{\bar{r}}$  de rayon  $\bar{r}$  et de centre  $O$ .  $q$  est soumis à une force de réaction  $F$  perpendiculaire à la sphère en  $q$ . On pose  $F = R e_r(q)$  où  $e_r = \frac{1}{\|q\|} q$  est le vecteur unitaire radial en  $q$ . Le mouvement obéit alors aux deux équations suivantes,

$$\begin{cases} m\ddot{q} &= R e_r(q) \\ \|q\| &= \bar{r}, \end{cases} \quad (1.6)$$

l'équation de Newton et l'équation de la liaison à la sphère (liaison holonome). Il est à noter que ce système détermine complètement le mouvement. Il comporte autant d'équations que d'inconnues à savoir 4 : les trois composantes de  $q$  et la réaction  $R$ .

### 1.3.2 Minimisation de l'action

Une description équivalente du mouvement par principe variationnel est toujours possible. Soit  $q(t)$  une solution de (1.6). La courbe  $t \rightarrow q(t)$  décrite par le point matériel est tracée sur la sphère  $S_{\bar{r}}$ . Entre les instants  $t = a$  et  $t = b > a$  elle va du point  $q_a = q(a)$  au point  $q_b = q(b)$ . Cette courbe est solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\substack{\text{courbes } q(t) \in S_{\bar{r}} \text{ tq.} \\ q(a) = q_a \text{ et } q(b) = q_b}} \int_a^b T(\dot{q}(t)) dt \quad (1.7)$$

où  $T(\dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2$  correspond à l'énergie cinétique.

La preuve de l'équivalence entre ces deux descriptions du mouvement est la suivante. On a :

$$\delta \left( \int_a^b T(\dot{q}) dt \right) = - \int_a^b (m\ddot{q}) \cdot \delta q dt = 0$$

où la variation  $\delta q(t)$  est tangent à  $S_{\bar{r}}$  en  $q(t)$ . La minimisation porte sur des courbes tracées sur la sphère. Pour que, au premier ordre  $q + \delta q$  reste sur  $S_{\bar{r}}$ , il suffit que  $\delta q$  soit tangent en  $q$  à  $S_{\bar{r}}$ .

La condition d'extrémalité du première ordre montre que  $\ddot{q}$  est orthogonal à  $S_{\bar{r}}$  en  $q$ . Ce qui correspond exactement à l'équation de Newton où la réaction est perpendiculaire à la sphère .

### 1.3.3 Interprétation géométrique

On aurait obtenu le même résultat si, au lieu de prendre l'énergie cinétique  $T(\dot{q})$ , on avait pris le module de la vitesse  $\sqrt{\dot{q} \cdot \dot{q}}$  pour calculer l'action. Cela signifie que les courbes paramétrées  $t \rightarrow q(t)$  solutions de (1.6) sont les courbes tracées sur la sphère de longueur minimale (pour calculer la longueur d'un petit vecteur nous prenons la norme euclidienne usuelle), i.e. les géodésiques de la sphère. Or, on sait que les géodésiques de la sphère sont les grands cercles, i.e. les cercles donc le plan passe par le centre de  $S_{\bar{r}}$ .

Ainsi, sans aucun calcul, nous savons que les solutions de (1.6) sont données par les grands cercles tracés sur  $S_{\bar{r}}$  parcourus à vitesse constante.

## 1.4 Approximation d'une liaison holonome par un potentiel

A ce type d'approximation correspond celle du mouvement d'un fluide parfait incompressible par un fluide parfait très peu compressible (cf. le long papier d'Ebin [11]).

Approcher une liaison holonome par un potentiel est une idée ancienne et naturelle (cf. [14], pages 260-262). Un exposé succinct de cette idée est proposé au début du chapitre 4 de [3].

Cette approximation repose sur une intuition mécanique que nous allons développer pour la sphère. L'idée de base est la suivante : le mouvement inertiel d'un point sur la sphère (cf. système (1.6)) peut être vu comme la limite (dont le sens est à préciser) du mouvement d'un point soumis à un potentiel  $U$  (équation (1.3)), constant et minimum sur la sphère, très important dès que l'on s'en éloigne légèrement. Ainsi pour s'écarter sensiblement de la sphère, il faut fournir une énergie très grande. Aussi le point ne peut rester que très proche de la sphère.

Soient les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\pi[ \times [0, 2\pi[$  et le potentiel  $U(q) = U(r) = \frac{mA}{2}(r - \bar{r})^2$  avec  $A > 0$  très grand. L'équation de Newton (1.3), écrite en coordonnées sphériques, donne alors

$$\begin{cases} \ddot{r} &= -A(r - \bar{r}) + r\dot{\theta}^2 + r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ \ddot{\theta} &= \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - 2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta} \\ \ddot{\phi} &= -2\dot{\theta}\dot{\phi}\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\phi}. \end{cases} \quad (1.8)$$

L'énergie mécanique  $H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + m\frac{A}{2}(r - \bar{r})^2$  est constante au cours du mouvement. Donc, si l'on fixe une position initiale sur  $S_{\bar{r}}$  ( $r(0) = \bar{r}$ ) la solution de (1.8) ne peut s'éloigner de la sphère d'au plus de  $\sqrt{\frac{2H}{mA}}$ , distance qui tend vers 0 lorsque  $A$  devient grand.

De façon plus précise, si l'on suppose, en plus, que la vitesse initiale est tangente à  $S_{\bar{r}}$ , i.e.  $\dot{r}(0) = 0$ , le mouvement est proche (sur un intervalle de temps borné) du mouvement inertiel sur  $S_{\bar{r}}$  lorsque  $A$  devient grand. En effet, le raisonnement qualitatif est le suivant<sup>1</sup>. Dans (1.8), l'évolution de  $r$  est rapide et correspond approximativement à celle d'un oscillateur inhomogène de pulsation  $\sqrt{A}$  :

$$\ddot{r} \approx -A(r - \bar{r}) + \bar{r}\dot{\theta}_0^2 + \bar{r}\dot{\phi}_0^2 \sin^2 \theta_0.$$

Compte tenu des conditions initiales  $r_0 = \bar{r}$  et  $\dot{r}_0 = 0$ , on a, par quadrature,

$$\begin{aligned} r(t) &\approx \bar{r} + (\bar{r}\dot{\theta}_0^2 + \bar{r}\dot{\phi}_0^2 \sin^2 \theta_0) \frac{1 - \cos(\sqrt{A}t)}{A} \\ \dot{r}(t) &\approx (\bar{r}\dot{\theta}_0^2 + \bar{r}\dot{\phi}_0^2 \sin^2 \theta_0) \frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}. \end{aligned}$$

Donc  $r$  reste proche de  $\bar{r}$  et  $\dot{r}$  reste proche de 0 sur un intervalle de temps **borné**. Ainsi les deux dernières équations de (1.8) permettant de calculer les deux angles  $\theta$  et  $\phi$  peuvent être approximées par

$$\begin{cases} \ddot{\theta} &= \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ \ddot{\phi} &= -2\dot{\theta}\dot{\phi} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{cases}$$

Ce système correspond exactement aux équations, écrites dans les coordonnées locales  $(\theta, \phi)$ , du mouvement par inertie sur la sphère  $S_{\bar{r}}$ .

La force  $-\text{grad}U$  qui agit sur le point  $q$ , n'approxime la réaction  $F$  du mouvement inertiel sur  $S_{\bar{r}}$  **qu'en valeur moyenne et non en valeur instantanée**. En effet, on a

$$-\text{grad}U(t) = -mA(r(t) - \bar{r})e_r \approx -m\bar{r}(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\phi}_0^2 \sin^2 \theta_0)(1 - \cos(\sqrt{A}t)).$$

En valeur moyenne sur une période  $2\pi/\sqrt{A}$  on obtient

$$-\overline{\text{grad}U} \approx -m\bar{r}(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\phi}_0^2 \sin^2 \theta_0).$$

Un calcul direct sur (1.6) avec les angles  $\theta$  et  $\phi$  donne  $F$  à chaque instant :

$$F = -m\bar{r}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta).$$

En résumé, les valeurs instantanées de position et de vitesse du système avec potentiel convergent vers celles du système à liaison(s) holonome(s). Cependant, l'accélération (ou, de façon équivalente, la force) ne converge qu'en moyenne au cours du temps vers celle du système à liaison(s) holonome(s).

<sup>1</sup>Nous avons repris ici le raisonnement d'Ebin [11], paragraphe 3.

## 1.5 Frottement

A ce type de forces correspond, pour les fluides incompressibles, les effets visqueux.

Il est classique (cf. livre second des Principes Mathématique de la Philosophie Naturelle de Newton, section première, intitulée “Du mouvement des corps qui éprouvent une résistance en raison de leur vitesse”) de modéliser les frottements et leurs effets irréversibles par le rajout d’une force de friction  $F$ , dépendant de la vitesse  $\dot{q}$  et dont le travail est toujours négatif, i.e.  $F \cdot \dot{q} \leq 0$ . Physiquement, on doit avoir  $F = 0$  lorsque  $\dot{q} = 0$ . L’approximation linéaire conduit alors à la loi approchée suivante :

$$F = -M(q)\dot{q} \quad (1.9)$$

où  $M(q)$  est un opérateur linéaire positif dépendant de  $q$  :  $\dot{q} \cdot M(q)\dot{q} \geq 0$ .

Sous ces hypothèses, le mouvement inertiel avec frottement d’un point sur la sphère  $S_r$  est régi par (cf. équation (1.6))

$$\begin{cases} m\ddot{q} &= Re_r(q) - M(q)\dot{q} \\ \|q\| &= \bar{r} \end{cases} \quad (1.10)$$

où, pour chaque position  $q$ ,  $M(q)$  est un opérateur linéaire positif du plan tangent à  $S_{\bar{r}}$  dans lui même. Il est alors clair que l’énergie mécanique  $H(q, \dot{q})$  vérifie

$$\frac{d(H(q, \dot{q}))}{dt} = -\dot{q} \cdot M(q)\dot{q} \leq 0$$

et donc décroît au cours du temps.

## Chapter 2

### Masse fluide

Ce chapitre est nettement moins classique que le précédent. Le formalismes sur lequel repose la description lagrangienne d'un mouvement fluide reste cependant structurellement identique à celui utilisé pour le mouvement d'un point matériel dans l'espace physique à trois dimensions.

#### 2.1 Points de vues eulérien et lagrangien

Le mouvement d'un fluide remplissant un domaine borné fixe  $\Omega$  peut être décrit de deux façons équivalentes :

- d'une façon eulérienne où l'on s'intéresse, pour chaque position fixe  $x$  dans  $\Omega$ , à l'évolution de la vitesse  $v(t, x)$  au cours du temps ;
- d'une façon lagrangienne où l'on étudie les positions successives au cours du temps,  $g_t(x)$ , d'un élément de fluide qui, à l'instant initial  $t = 0$ , occupait la position  $x \in \Omega$ .

L'équivalence entre ces deux descriptions repose sur les deux relations cinématiques suivantes :

- si l'on connaît, à chaque instant  $t$  et pour chaque position  $x \in \Omega$ , la vitesse  $v(t, x)$ , alors  $g_t(x)$  est donné par l'intégration sur l'intervalle  $[0, t]$  de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = v(\tau, z) \\ z_{\tau=0} = x \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $g_t(x) = z(t)$  ; lorsque  $x$  parcourt  $\Omega$ ,  $g_t(x)$  parcourt aussi  $\Omega$  ; l'intégration à l'envers, pour les temps décroissants de  $t$  à 0, de cette équation différentielle permet de calculer  $x$  à partir de  $g_t(x)$  ; ainsi  $g_t(x)$  est une bijection de  $\Omega$  dans lui-même ;  $g_t(x)$  admet la même régularité que  $v(t, x)$ , régularité que nous supposons ici suffisante<sup>1</sup> ;  $x \rightarrow g_t(x)$  est un difféomorphisme de  $\Omega$  dans lui-même dont on peut calculer l'application linéaire tangente en chaque point  $x$ ,  $Dg_t(x)$ , avec la première variation de (2.1) autour de la trajectoire  $(g_\tau(x))_{\tau \in [0, t]}$ .

---

<sup>1</sup>Nous ne considérons pas ici les singularités comme les chocs, les discontinuités de contact ... Il est probable que l'approche lagrangienne puisse être généralisée à ces cas qui sont d'un intérêt pratique et théorique certain.

- si l'on connaît, à chaque instant  $t$  et pour tout  $x \in \Omega$ ,  $g_t(x)$ , le champ des vitesses  $v$  est donné par

$$\dot{g}_t(x) = \left. \frac{\partial g_t(x)}{\partial t} \right|_{x=\text{cte}} = v(t, g_t(x)), \quad (2.2)$$

c'est à dire,  $v(t, x) = \dot{g}_t(g_t^{-1}(x))$  où  $g_t^{-1}$  est l'inverse du difféomorphisme  $g_t$ .

Dans les sections qui suivent, nous partons des équations classiques et eulériennes où le champ des vitesses  $v$  est l'inconnue principale, pour obtenir des équations lagrangiennes équivalentes où le flot  $g_t$  (difféomorphisme) est l'inconnue principale.

## 2.2 Fluide sans cohésion et équation de Burgers

Le champ des vitesses  $v$  d'une masse fluide sans cohésion est solution de l'équation de Burgers,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Dv v = 0, \quad (2.3)$$

où  $Dv$  désigne le jacobien du champ des vitesses par rapport à l'espace<sup>2</sup>, avec comme conditions au limite  $v$  tangent au bord, a priori.

### 2.2.1 Équation de Newton

Soit  $v(t, x)$  une solution régulière sur un petit intervalle de temps de (2.3). Notons  $g_t(x)$  le flot associé par intégration de (2.1). On a

$$\dot{g}_t(x) = \frac{\partial}{\partial t} [g_t(x)] = v(t, g_t(x)).$$

Donc

$$\ddot{g}_t(x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [g_t(x)] = \frac{\partial}{\partial t} [v(t, g_t(x))] = \frac{\partial v}{\partial t}(t, g_t(x)) + Dv_{(t, g_t(x))} v(t, g_t(x)) = 0.$$

Ainsi,  $g_t(x)$  vérifie l'équation de Newton généralisée suivante

$$\ddot{g}_t = 0. \quad (2.4)$$

Elle correspond exactement à celle du point matériel (1.1), mis à part que l'espace de configuration n'est plus l'espace physique mais l'ensemble  $\mathcal{D}$  des difféomorphismes de  $\Omega$  dans lui même. Les conditions initiales portent sur  $g_{t=0}$  que l'on prend généralement égal à l'identité  $I_d$ , et sur  $\dot{g}_{t=0}$  qui n'est autre que le champ initial des vitesses  $v(0, x)$ .

L'espace de configuration  $\mathcal{D}$  est de dimension infinie. Il possède cependant une structure naturelle de groupe pour la composition des applications : si  $g$  et  $h$  sont deux difféomorphismes de  $\Omega$ ,  $g^{-1}$  et  $g \circ h$  sont aussi des difféomorphismes de  $\Omega$ . Cette structure de groupe est compatible avec la dynamique. En effet, si  $t \rightarrow g_t$  est solution de (2.4), alors, pour tout  $h \in \mathcal{D}$ ,  $g_t \circ h$  est aussi solution de (2.4). Ceci correspond à une renumérotation des éléments fluides par le difféomorphisme  $h$  : au lieu de caractériser la position initiale et l'élément par  $x$ , on prend  $h(x)$ . L'utilisation des compositions à droite ou à gauche avec un difféomorphisme (translations à droite ou à gauche), est ici fondamentale (cf. les travaux d'Arnol'd [5] et la sous-section 2.2.3).

<sup>2</sup>En coordonnées euclidiennes  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $Dv$  peut être assimilé à une matrice carrée dont les composantes sont  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ .

### 2.2.2 Minimisation de l'action

Soit  $g_t$  une solution de (2.4). La courbe  $t \rightarrow g_t$  est tracée sur  $\mathcal{D}$ . Entre les instants  $t = a$  et  $t = b > a$ , elle part du point généralisé  $g_a \in \mathcal{D}$  pour aboutir au point généralisé  $g_b \in \mathcal{D}$ .

**Proposition 1** *Soit  $g_t$  une solution régulière de (2.4) sur l'intervalle de temps  $[a, b]$  avec  $a < b$ . On note  $f_a = g_a$  et  $f_b = g_b$ . Alors la courbe tracée sur  $\mathcal{D}$ ,  $[a, b] \ni t \rightarrow g_t \in \mathcal{D}$ , est une extrémale du problème de minimisation suivant :*

$$\min_{\substack{\text{courbes } g_t \in \mathcal{D} \\ g_a = f_a \text{ et } g_t = f_b}} \int_a^b T(\dot{g}_t) dt \quad (2.5)$$

où  $T(\dot{g}) = \iiint_{\Omega} \frac{\varrho_0(x)}{2} \dot{g}(x) \cdot \dot{g}(x) dx$  correspond à l'énergie cinétique du fluide ( $\varrho_0$  est la masse volumique du fluide à l'instant initial).

**Preuve** On ne peut pas considérer brutalement qu'une courbe  $g'_t$  voisine de  $g_t$  s'écrive  $g_t + \delta g_t$  car la somme de deux difféomorphismes de  $\Omega$  n'est pas une opération bien définie (l'image par la somme de  $\Omega$  n'est pas contenu dans  $\Omega$  en général). Il convient d'utiliser comme opération la loi de composition.

Soit donc,  $g'_t$  une courbe voisine de  $g_t$  partant et allant aux points  $g_a$  et  $g_b$ , entre les instants  $a$  et  $b$ , respectivement. Il nous faut définir et surtout quantifier ce qu'est une courbe voisine de  $g_t$  dans  $\mathcal{D}$ . Pour cela on utilise la structure de groupe sur  $\mathcal{D}$  et les translations (compositions à droite ou à gauche) par des difféomorphismes proches de l'identité.

Soit un petit champ de vecteurs  $\delta\xi$  sur  $\Omega$  et tangent à  $\partial\Omega$ . Le difféomorphisme  $h$ , associé à  $\delta\xi$  et défini par l'intégration sur  $[0, 1]$  de  $\dot{z} = \delta\xi(z)$  ( $z_0 = x$  avec  $z(1) = h(x)$ ), est proche de l'identité. Au premier ordre, on a  $h(x) = x + \delta\xi(x)$ . Si on fait dépendre  $\delta\xi$  du temps  $t$  et si on considère les difféomorphismes proches de l'identité  $h_t$  qui en résultent, on obtient, par translation à gauche<sup>3</sup>, une courbe,  $t \rightarrow g'_t = h_t \circ g_t$ , voisine de  $t \rightarrow g_t$ . On peut alors donner un sens à  $\delta g$  grâce à  $\delta\xi$  par l'approximation du premier ordre,

$$g'_t(x) = h_t(g_t(x)) \approx g_t(x) + \delta\xi_t(g_t(x)),$$

en posant

$$\delta g_t(x) = \delta\xi_t(g_t(x)). \quad (2.6)$$

Ainsi,  $\delta g_t \circ g_t^{-1}(x)$  peut être assimilé à un petit champ de vecteurs sur  $\Omega$ , tangent au bord  $\partial\Omega$ , donc appartenant à  $\mathcal{U}$ .

On peut vérifier qu'avec (2.6), on obtient bien la formule classique de commutation entre  $\delta$  et  $\dot{\phantom{g}}$ ,  $\delta\dot{g} = \dot{\delta g}$ , où  $\delta\dot{g}_t$  est égal à  $\frac{\partial}{\partial t} [\delta\xi_t \circ g_t]$ .

Le reste de la preuve est formellement identique à celle du point matériel. On a, au premier ordre en  $\delta g$ ,

$$\delta[T(\dot{g}_t)] \approx \iiint_{\Omega} \varrho_0(x) \delta[\dot{g}_t](x) \cdot \dot{g}_t(x) dx = \iiint_{\Omega} \varrho_0(x) \dot{\delta g}_t(x) \cdot \dot{g}_t(x) dx.$$

<sup>3</sup>On aurait pu choisir, de façon tout à fait équivalente, les translations à droite. Les calculs sont un peu plus compliqués pour cet autre choix.

Donc

$$\delta \left[ \int_a^b T(\dot{g}_t) dt \right] = \int_a^b \left( \iint \int_{\Omega} \varrho_0(x) \delta \dot{g}_t(x) \cdot \dot{g}_t(x) dx \right) dt.$$

En permutant les intégrations en temps et en espace on obtient

$$\begin{aligned} \delta \left[ \int_a^b T(\dot{g}_t) dt \right] &= \iint \int_{\Omega} \varrho_0(x) \left( \int_a^b \delta \dot{g}_t(x) \cdot \dot{g}_t(x) dt \right) dx \\ &= \iint \int_{\Omega} \varrho_0(x) \left( [\delta g_t(x) \cdot \dot{g}_t(x)]_a^b - \int_a^b \delta g_t(x) \cdot \ddot{g}_t(x) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Mais  $\delta g_a(x) = 0$  et  $\delta g_b(x) = 0$ , donc

$$\delta \left[ \int_a^b T(\dot{g}_t) dt \right] = - \iint \int_{\Omega} \varrho_0(x) \left( \int_a^b \delta g_t(x) \cdot \ddot{g}_t(x) dt \right) dx.$$

Puisque  $\delta g_t(x) = \delta \xi_t(g_t(x))$  avec, pour  $t \neq a, b$ ,  $\delta \xi_t$  quelconque dans  $\mathcal{U}$ , la condition d'extrémalité du première ordre implique  $\ddot{g} = 0$ . ■

### 2.2.3 Interprétation géométrique

Des calculs similaires montrent que, si, au lieu de prendre l'énergie cinétique  $T$ , on prend  $\sqrt{T}$  pour calculer l'action, la condition d'extrémalité reste la même, i.e.  $\ddot{g} = 0$ . Ceci permet de munir  $\mathcal{D}$ , au moins formellement, d'une structure de variété riemannienne, de telle sorte que  $\int_a^b \sqrt{2T(\dot{g}_t)} dt$  représente la longueur de la courbe  $[a, b] \ni t \longrightarrow g_t \in \mathcal{D}$ .

Pour cela, il convient d'utiliser les translations à droite et à gauche, i.e. la structure de groupe associée à  $\mathcal{D}$ . Nous avons vu, dans la preuve de la proposition 1, qu'un difféomorphisme  $h$  proche de l'identité  $I_d$  peut être approximé grâce à l'application exponentielle :

$$h(x) = \exp \xi(x) \approx x + \xi(x)$$

où  $\xi$  est un petit champ de vecteurs sur  $\Omega$ , tangent au bord, i.e un élément de l'espace vectoriel  $\mathcal{U}$  (la condition de tangence au bord est nécessaire car  $h(\Omega)$  doit être égal à  $\Omega$ ). Ainsi  $\mathcal{U}$  s'identifie à l'espace tangent à  $\mathcal{D}$  en  $I_d$  :  $T\mathcal{D}_{I_d} = \mathcal{U}$  est muni du produit scalaire, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{I_d}$ , issu de l'énergie cinétique :

$$\forall u, v \in \mathcal{U}, \quad \langle u, v \rangle_{I_d} = \iint \int_{\Omega} \varrho_0(x) u(x) \cdot v(x) dx.$$

Soit  $g \in \mathcal{D}$  et soit  $h \in \mathcal{D}$  proche de  $I_d$  ( $h(x) = x + \xi(x)$ ). Alors,  $h \circ g$  est proche de  $g$  et on a

$$h \circ g(x) = g(x) + \xi(g(x)).$$

Ainsi un vecteur tangent à  $\mathcal{D}$  en  $g$  peut être obtenu par la composition à droite avec  $g$  d'un élément de  $\mathcal{U}$ . On définit alors le produit scalaire de deux vecteurs tangents en  $g$  à  $\mathcal{D}$ ,  $u_1(x) = \xi_1(g(x))$  et  $u_2(x) = \xi_2(g(x))$ , par l'intégrale

$$\langle u_1, u_2 \rangle_g = \iint \int_{\Omega} \varrho_0(x) \xi_1(g(x)) \cdot \xi_2(g(x)) dx. \quad (2.7)$$

Par construction, cette structure métrique redonne l'énergie cinétique en  $I_d$ . Vérifions qu'elle la redonne partout ailleurs. Soit donc  $g_t(x)$  le flot associé par (2.1) à une solution

régulière  $v(t, x)$  de l'équation de Burgers (2.3). Comme  $\varrho_0(x)$  est la masse volumique du fluide à  $t = 0$ , la conservation de la matière implique que la masse volumique du fluide à l'instant  $t$ ,  $\varrho_t(x)$ , est égale à  $|Dg_t^{-1}(x)| \varrho_0(g_t^{-1}(x))$ . Or, l'énergie cinétique à l'instant  $t$  est donnée égale à

$$1/2 \iint_{\Omega} \varrho_t(x) v(t, x) \cdot v(t, x) dx.$$

Le changement de variable  $x = g_t(x')$  transforme cette intégrale en

$$1/2 \iint_{\Omega} \varrho_0(x') v(t, g_t(x')) \cdot v(t, g_t(x')) dx'.$$

qui est égal à  $\frac{1}{2} \langle \dot{g}_t, \dot{g}_t \rangle_{g_t}$  puisque  $\dot{g}_t(x) = v(t, g_t(x))$ . Ainsi  $T(g_t) = \frac{1}{2} \langle \dot{g}_t, \dot{g}_t \rangle_{g_t}$ .

Il y a donc équivalence entre l'étude du mouvement d'un fluide sans cohésion et celle des géodésiques du groupe de difféomorphismes  $\mathcal{D}$  muni de la métrique définie par (2.7).

## 2.2.4 Problème de Cauchy et conditions aux limites

Cette vision géométrique du mouvement permet d'interpréter un problème de fond lié aux conditions aux limites et au problème de Cauchy.

Dans notre approche, l'équation (2.4) est sensée définir une équation différentielle du premier ordre et un champ de vecteurs sur le fibré tangent de  $\mathcal{D}$ , i.e. la variété des phases. Or, ce champ de vecteurs n'est pas toujours défini correctement, i.e. n'est pas dans l'espace tangent à la variété des phases. Les problèmes viennent du bord de  $\Omega$ .

La cause peut se voir directement sur l'équation (2.3). Soit  $x$  sur le bord de  $\Omega$  et  $v_0 \in \mathcal{U}$ . A chaque instant, la vitesse  $v(t, x)$  en  $x$  doit être tangente à  $\Omega$ . Si on note  $n(x)$  la normale au bord en  $x$ , on doit avoir  $v(t, x) \cdot n(x) = 0$ . Donc, en dérivant par rapport au temps,  $\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) \cdot n(x) = 0$ . Or  $\frac{\partial v}{\partial t} = -Dv v$ . Donc  $Dv(t, x) v(t, x) \cdot n(x) = 0$ . En particulier  $Dv_0(x) v_0(x) \cdot n(x) = 0$ , ce qui, en général, est faux. Pour s'en convaincre il suffit, par exemple, de prendre pour  $\Omega$  une boule de centre  $O$  et pour champ initial de vitesse celui d'un solide de vecteur rotation instantanée  $\omega$  :  $v_0(m) = \omega \wedge \vec{Om}$  est orthogonal à  $n(m) = \vec{Om}/\|Om\|$  mais  $Dv_0(m) v_0(m) \cdot n(m) = -\det(\omega, \vec{Om}, \omega \wedge \vec{Om})/\|Om\|$  est différent de zéro dès que les vecteurs  $\omega$  et  $\vec{Om}$  sont libres.

On peut contourner cette question **soit** en s'éloignant des bords avec un champ des vitesses à support compact dans l'intérieur du domaine  $\Omega$ , **soit** en éliminant les bords avec des conditions périodiques (on se place alors sur un tore).

Moyennant cet artifice, le problème reste un problème de Cauchy bien posé : si le champ initial des vitesses  $v_0(x)$  est suffisamment régulier et à support compact dans l'intérieur de  $\Omega$  alors, il existe une solution régulière et locale en temps au problème de Cauchy  $\ddot{g} = 0$  avec  $g_0 = I_d$  et  $\dot{g}_0(x) = v_0(x)$ . Cependant, rien n'interdit qu'au bout d'un temps fini, des singularités puissent apparaître (chocs, ...). Dans ce rapport, nous n'aborderons pas ce genre de difficultés.

## 2.3 Fluide parfait compressible

Le mouvement d'un fluide parfait compressible remplissant le domaine  $\Omega$  est régi par les équations d'Euler suivantes (cf. [13]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + Dv v = -\frac{1}{\varrho} \text{grad} p \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho v) = 0 \\ \frac{\partial(\varrho v^2/2 + \varrho e)}{\partial t} + \text{div}(\varrho(v^2 + h)v) = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où  $v$  est la vitesse,  $p$  la pression,  $\varrho$  la masse volumique,  $e$  l'énergie massique et  $h$  l'enthalpie massique. Nous supposons ici que le fluide n'est composé que d'une seule espèce thermodynamique, ce qui donne les relations suivantes ( $s$  est l'entropie massique) :

$$h = e + p/\varrho \quad \text{et} \quad de = \theta ds + \frac{p}{\varrho^2} d\varrho.$$

Les équations (2.8) sont valables même en présence de chocs où leur formulation faible doit être utilisée : en effet, elles correspondent à la conservation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie dans le cas où les phénomènes dissipatifs liés à la viscosité et à la propagation de la chaleur sont négligeables. Cependant, lorsque tout est régulier en espace et en temps, le bilan d'énergie est équivalent à la conservation de l'entropie, i.e.

$$\frac{\partial \varrho s}{\partial t} + \text{div}(\varrho s v) = 0.$$

Il est à noter que les résultats qui suivent ainsi que ceux du chapitre 3 peuvent être étendus sans difficulté au cas où les particules fluides sont soumises, en plus, à un champ de force dérivant d'un potentiel.

### 2.3.1 Équation de Newton

Soit  $g_t$  défini par (2.1) pour une solution régulière  $v(t, x)$  de (2.8). La conservation de la masse et de l'entropie implique que, pour tout  $x \in \Omega$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho(t, x) = |Dg_t^{-1}(x)| \varrho_0(g_t^{-1}(x)) \\ s(t, x) = s_0(g_t^{-1}(x)). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Comme la pression est une fonction de  $\varrho$  et  $s$ , nous voyons, d'après (2.8), que  $\ddot{g}$  ne dépend que de  $g_t$  et de ses dérivées par rapport à  $x$  jusqu'à l'ordre 2, mais pas, et c'est capital, de  $\dot{g}$ , i.e. des dérivées par rapport au temps de  $g_t$ . Cette propriété est à la base de la proposition suivante

**Proposition 2** *Soit  $v(t, x)$  une solution régulière en temps et espace de (2.8). Notons  $g_t$  le flot associé par (2.1). Alors,  $g_t$  vérifie l'équation de Newton généralisée*

$$\ddot{g} = -\text{grad}U(g) \quad (2.10)$$

où

- le potentiel généralisé est la fonction  $U(g)$  de  $\mathcal{D}$  dans  $R$ , égale à l'énergie interne du fluide et donnée par

$$U(g) = \iiint_{\Omega} \varrho_0(x) e \left( s_0(x), \frac{\varrho_0(x)}{|Dg(x)|} \right) dx; \quad (2.11)$$

- l'opérateur **grad** est l'opérateur de gradient sur  $\mathcal{D}$  muni de la métrique riemannienne définie par (2.7).

Cette formulation n'est pas entièrement nouvelle. Par exemple, Ebin [11] l'utilise dans le cas où la distribution initiale d'entropie est uniforme  $s_0(x) = s_0 = cte$ .

**Preuve** D'après (2.8), il suffit de montrer<sup>4</sup> :  $\mathbf{grad}U(g_t)(x) = \frac{1}{\varrho(t, g_t(x))} (\mathbf{grad}p)(t, g_t(x))$ .

Considérons, comme lors de la preuve de la proposition 1, un difféomorphisme voisin de  $g$ ,  $h \circ g$  avec  $h$  proche de l'identité et  $h(x) = x + \delta\xi(x)$ ,  $\delta\xi$  un petit vecteur de  $\mathcal{U}$  :  $h \circ g = g + \delta\xi \circ g$ . Par définition du gradient (cf. (B.4)), on a pour tout  $\delta\xi$  :

$$U(h \circ g) \approx U(g) + \langle \mathbf{grad}U(g), \delta\xi \circ g \rangle_g = U(g) + \iiint_{\Omega} \varrho_0(x) \mathbf{grad}U(g)(x) \cdot \delta\xi(g(x)) dx.$$

Par définition de  $U$  :

$$U(h \circ g) - U(g) \approx - \iiint_{\Omega} \varrho_0^2(x) \frac{\partial e}{\partial \varrho} \Big|_{s=cte} \left( s_0(x), \frac{\varrho_0(x)}{|Dg(x)|} \right) \frac{1}{|Dg(x)|^2} (|D(h \circ g)(x)| - |Dg(x)|) dx.$$

$$\text{Mais } \frac{\partial e}{\partial \varrho} \Big|_{s=cte} = \frac{p^2}{\varrho} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} |D(h \circ g)(x)| &= |Dg(x) + D(\delta\xi)(g(x)) Dg(x)| \\ &= |I_d + D(\delta\xi)(g(x))| |Dg(x)| \\ &\approx (1 + \text{div}(\delta\xi)(g(x))) |Dg(x)|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} U(h \circ g) - U(g) &\approx - \iiint_{\Omega} \frac{1}{|Dg(x)|} p \left( s_0(x), \frac{\varrho_0(x)}{|Dg(x)|} \right) \text{div}(\delta\xi)(g(x)) dx \\ &= - \iiint_{\Omega} p \left( s_0(g^{-1}(x)), \frac{\varrho_0(g^{-1}(x))}{|Dg(g^{-1}(x))|} \right) \text{div}(\delta\xi)(x) dx. \end{aligned}$$

Si l'on prend  $g = g_t$  alors

$$p \left[ s_0(g_t^{-1}(x)), \frac{\varrho_0(g_t^{-1}(x))}{|Dg_t(g_t^{-1}(x))|} \right] = p[s(t, x), \varrho(t, x)] = p(t, x).$$

Donc, en intégrant par partie en espace, on a

$$\begin{aligned} U(h \circ g_t) - U(g_t) &\approx \iint_{\Omega} \mathbf{grad}p(t, x) \cdot \delta\xi(x) dx \\ &= \iint_{\Omega} \varrho_0(x) \left( \frac{1}{\varrho(t, g_t(x))} \mathbf{grad}p(t, g_t(x)) \right) \cdot \delta\xi(g_t(x)) dx. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure puisque  $\delta\xi$  est quelconque dans  $\mathcal{U}$ . ■

<sup>4</sup>On a déjà  $\dot{g}_t(x) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, g_t(x)) + Dv(t, g_t(x)) v(t, g_t(x))$ .

### 2.3.2 Minimisation de l'action

Il est assez étonnant de remarquer l'émergence tardive d'une telle caractérisation variationnelle du mouvement (cf. [20], chapitre 13).

**Proposition 3** *Soit  $g_t$  une solution régulière de (2.4) sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ . On note  $f_a = g_a$  et  $f_b = g_b$ . Alors la courbe tracée sur  $\mathcal{D}$ ,  $[a, b] \ni t \longrightarrow g_t \in \mathcal{D}$ , est une extrémale du problème de minimisation suivant :*

$$\min_{\substack{\text{courbes } g_t \in \mathcal{D} \text{ tq.} \\ g_a = f_a \text{ et } g_t = f_b}} \int_a^b [T(\dot{g}_t) - U(g_t)] dt \quad (2.12)$$

où

- $T(\dot{g}) = \iiint_{\Omega} \frac{\varrho_0(x)}{2} \dot{g}(x) \cdot \dot{g}(x) dx$  est l'énergie cinétique du fluide ( $\varrho_0$  est la masse volumique du fluide à l'instant initial);
- $U(g)$  est l'énergie interne du fluide définie par (2.11).

Nous ne détaillons pas la preuve car elle est formellement identique à celle du point matériel dans un champ de force dérivant d'un potentiel : lors de la preuve de la proposition 1, nous avons défini ce qu'est une courbe voisine d'une autre courbe tracée sur  $\mathcal{D}$  et donné un sens précis à  $\delta g_t$ ; ceci nous autorise à transcrire quasiment mots pour mots les calculs faits pour un point matériel.

Ainsi, en l'absence de singularités (chocs, ...), la dynamique d'un fluide parfait compressible remplissant un domaine  $\Omega$  fixe, est un système lagrangien naturel :

- l'espace de configuration est la variété riemannienne de dimension infinie  $\mathcal{D}$  (cf. sous-section (2.2.3));
- l'énergie cinétique est celle du fluide;
- l'énergie potentielle  $U$  est égale à l'énergie interne du fluide.

De fait, pour toute solution  $g_t$ , l'énergie mécanique  $H = T + U$  reste constante :

$$\frac{d}{dt} \left[ \iiint_{\Omega} \frac{\varrho_0(x)}{2} \dot{g}_t(x) \cdot \dot{g}_t(x) dx + \iiint_{\Omega} \varrho_0(x) e \left( s_0(x), \frac{\varrho_0(x)}{|Dg_t(x)|} \right) dx \right] = 0.$$

### 2.3.3 Interprétation géométrique

Pour obtenir une interprétation géométrique du mouvement, il nous suffit de transcrire celle du point matériel et d'utiliser directement le principe de Maupertuis. Les courbes  $t \rightarrow g_t$ , tracée sur  $\mathcal{D}$ , solution de l'équation de Newton généralisée (2.10), de même énergie mécanique  $h = T(\dot{g}) + U(g)$  correspondent formellement, après le re paramétrage  $t \rightarrow \tau$  défini par  $d\tau = (h - U(g_t)) dt$ , aux géodésiques de  $\mathcal{D}$  muni de la métrique riemannienne définie comme suit.

Soit  $g \in \mathcal{D}$ . On sait que l'espace tangent à  $\mathcal{D}$  en  $g$  s'identifie à  $\mathcal{U}$  grâce à la composition à droite par  $g$ . Donc, pour  $u_1$  et  $u_2$  dans cet espace tangent, on pose  $u_1 = \xi_1 \circ g$  et  $u_2 = \xi_2 \circ g$  avec  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}$ . On définit le produit scalaire entre  $u_1$  et  $u_2$ , noté  $\langle u_1, u_2 \rangle_g^h$ , par

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle_g^h &= (h - U(g)) \langle u_1, u_2 \rangle_g \\ &= (h - U(g)) \iiint_{\Omega} \varrho_0(x) \xi_1(g(x)) \cdot \xi_2(g(x)) dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

Remarquons, pour conclure, que les questions liées au bord de  $\Omega$  et au problème de Cauchy restent quasiment identiques à celles de la section précédente. C'est pourquoi, dans ses travaux sur les fluides faiblement compressibles, Ebin [11] prend pour domaine  $\Omega$  un tore euclidien de dimension 3.

## 2.4 Fluide parfait incompressible

Le mouvement d'un fluide parfait incompressible remplissant le domaine  $\Omega$  est régi par les équations d'Euler suivantes (cf. [13]) :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + Dv v = -\frac{1}{\varrho} \text{grad} p \\ \text{div} v = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $v$  est la vitesse, tangente au bord,  $p$  la pression,  $\varrho$  la masse volumique constante et uniforme. Nous supposons ici que le fluide homogène est composé d'une seule espèce.

Cette section est une reformulation, moins mathématique et plus spécifique aux fluides parfaits incompressibles, de certains travaux d'Arnol'd [5] où l'inconnue est le flot  $g_t$  défini par (2.1) et associé à une solution régulière  $v$  de (2.14) (voir aussi [1]).

### 2.4.1 Équation de Newton

La condition d'incompressibilité  $\text{div} v = 0$  se traduit par une contrainte géométrique sur le flot  $g_t$ . En effet, à chaque instant  $t$ , le difféomorphisme  $g_t$  préserve le volume, i.e.  $|Dg_t| \equiv 1$ . Ainsi  $g_t$  appartient, au moins formellement, à une sous-variété de  $\mathcal{D}$ , notée  $\mathcal{D}_\mu$ , l'ensemble des difféomorphismes de  $\Omega$  qui préservent l'élément de volume euclidien sur  $\Omega$ . Tout comme  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_\mu$  est un groupe pour l'opération de composition.

L'espace tangent en  $I_d$  à  $\mathcal{D}_\mu$  est l'ensemble des champs de vecteurs sur  $\Omega$ , tangents au bord et de divergence nulle. Cet espace vectoriel, noté  $\mathcal{U}_\mu$ , est strictement contenu dans  $\mathcal{U}$ , l'espace tangent à  $\mathcal{D}$  en  $I_d$ . Grâce aux translations, on identifie, comme pour  $\mathcal{D}$ , l'espace tangent à  $\mathcal{D}_\mu$  en  $g$ , à l'ensemble des champs de vecteurs sur  $\Omega$  obtenus par composition à droite avec  $g$  d'un élément de  $\mathcal{U}_\mu$ . En 2.2.3, nous avons muni  $\mathcal{D}$  d'une métrique euclidienne issue de l'énergie cinétique. Par restriction,  $\mathcal{D}_\mu$  est aussi doté d'une métrique associée à l'énergie cinétique. Cette métrique possède, en plus, la propriété remarquable suivante : elle est invariante par rapport aux translations à droite sur  $\mathcal{D}_\mu$  (i.e. les translations à droite sont des isométries). Cette propriété vient de l'identité

$$\iiint_{\Omega} \alpha(x) dx = \iiint_{\Omega} \alpha(g(x)) dx$$

pour toutes fonctions  $\alpha$  sur  $\Omega$  et tout élément de  $g \in \mathcal{D}_\mu$  puisque  $|Dg| = 1$ . La réécriture dans un cadre lagrangien des équations (2.14) donne l'interprétation suivante.

La courbe tracée sur  $\mathcal{D}_\mu$ ,  $t \rightarrow g_t$ , vérifie l'équation de Newton généralisée

$$\ddot{g} = R(g, \dot{g}) \quad (2.15)$$

où  $R(g, \dot{g})$ , qui n'est autre que  $-(\text{grad}p) \circ g/\varrho$ , correspond à la force généralisée due à la liaison et orthogonale à l'espace tangent à  $\mathcal{D}_\mu$  en  $g$ . En effet, pour tout vecteur tangent  $\xi \circ g$  en  $g$  à  $\mathcal{D}$  ( $\xi \in \mathcal{U}_\mu$ ), on a ( $\varrho$  est une constante ici)

$$\begin{aligned} \langle \xi \circ g, R(g, \dot{g}) \rangle_g &= \varrho \iiint_{\Omega} (\text{grad}p)(g(x)) \cdot \xi(g(x)) \, dx \\ &= \varrho \iiint_{\Omega} (\text{grad}p)(x) \cdot \xi(x) \, dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque  $\text{div}\xi = 0$  et  $\xi$  tangent au bord.

Ainsi nous voyons que la situation semble être identique à celle du point sur la sphère : à la force de réaction orthogonale au plan tangent de la sphère en  $q$  correspond le gradient de la pression  $p$  orthogonal à l'espace tangent à  $\mathcal{D}_\mu$  en  $g$ . L'analogie complète avec le point sur la sphère souffre cependant d'une difficulté, qui n'a pas réellement d'importance pour la suite, mais qui mérite d'être relevée. Il est tentant d'effectuer les correspondances suivantes :

- à l'espace physique euclidien correspond  $\mathcal{D}$  ;
- à la sphère  $S_{\overline{r}}$  correspond  $\mathcal{D}_\mu$ .

Dans ce cas, il est naturel d'espérer que, comme pour le point sur la sphère où la force de réaction est dans l'orthogonal du plan tangent à  $S_{\overline{r}}$  dans  $R^3$ , la force de réaction généralisée  $R = -(\text{grad}p) \circ g/\varrho$  soit dans l'orthogonal de  $\mathcal{U}_\mu$  dans  $\mathcal{U}$ . Mais, **si  $\Omega$  admet un bord**, cela implique nécessairement que le gradient de pression soit tangent à  $\partial\Omega$ . Ce qui est faux en général. Cependant, si  $\Omega$  est un tore euclidien, l'analogie complète avec le point sur la sphère est possible car alors les bords et les questions qui leurs sont attachées disparaissent.

## 2.4.2 Minimisation de l'action

**Proposition 4** Soit  $g_t$  une solution régulière de (2.15) sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ . On note  $f_a = g_a$  et  $f_b = g_b$ . Alors la courbe tracée sur  $\mathcal{D}_\mu$ ,  $[a, b] \ni t \rightarrow g_t \in \mathcal{D}$ , est une extrémale du problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\text{courbes } g_t \in \mathcal{D}_\mu \text{ tq.} \\ g_a = f_a \text{ et } g_b = f_b}} \int_a^b T(\dot{g}_t) \, dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

où  $T(\dot{g}) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \varrho \dot{g}(x) \cdot \dot{g}(x) \, dx$  est l'énergie cinétique du fluide.

Nous ne détaillons pas la preuve car elle est formellement identique à celle du point matériel sur la sphère.

### 2.4.3 Interprétation géométrique

On aurait obtenu le même résultat si, au lieu de prendre l'énergie cinétique  $T(\dot{g})$ , on avait pris sa racine carrée. Formellement, les courbes paramétrées  $t \rightarrow g_t$  solutions de (2.15) sont les courbes tracées sur  $\mathcal{D}_\mu$  de longueur minimale, i.e. les géodésiques de  $\mathcal{D}_\mu$  muni de la métrique issue de l'énergie cinétique et précisée ci-dessus.

Cette interprétation géométrique a été présentée par Moreau [16] et pleinement établie par Arnol'd [5]. Comme la métrique est invariante par rapport aux translations à droite la structure de groupe de Lie pour  $\mathcal{D}_\mu$  est d'une importance toute particulière ; structurellement, le mouvement par inertie d'un solide autour d'un point fixe et celui d'un fluide parfait incompressible sont identiques. Seuls le groupe de Lie et la métrique invariante changent : au lieu de  $SO(3)$ , on a ici  $\mathcal{D}_\mu$ .

Cette vision géométrique du mouvement a servi comme point de départ aux travaux d'Ebin et Marsden [12] où l'existence et l'unicité locale en temps sont démontrées dans un cadre fonctionnel rigoureux : si  $v_0 \in \mathcal{U}_\mu$  est assez régulier, alors l'équation de Newton généralisée (2.15) admet, sur un petit intervalle de temps incluant 0, une unique solution régulière  $g_t$  passant par  $I_d$  à la vitesse  $v_0$ . Cependant rien n'empêche l'apparition de singularités en temps fini comme, par exemple, des discontinuités de contact.

## 2.5 Fluide faiblement compressible

Ebin [11] a montré que, lorsque  $\Omega$  est un tore (absence de bord), le mouvement du fluide parfait incompressible est la limite du mouvement du fluide parfait faiblement compressible. Plus précisément, désignons par  $\varepsilon \geq 0$  le petit paramètre qui mesure le degré de compressibilité du fluide,  $\varepsilon = 0$  correspondant au fluide incompressible (nous verrons plus loin que  $\varepsilon$  est l'inverse du carré de la célérité du son). Si, pour une même condition initiale,  $g_0 = I_d$  et  $\dot{g}_0 \in \mathcal{U}_\mu$ ,  $t \rightarrow \bar{g}_t \in \mathcal{D}_\mu$  (resp.  $t \rightarrow g_t^\varepsilon \in DD$ ) correspond au mouvement incompressible (resp. faiblement compressible), alors  $g_t^\varepsilon$  (resp.  $\dot{g}_t^\varepsilon$ ) tend, uniformément sur tout intervalle de temps fini, vers  $\bar{g}_t$  (resp.  $\dot{\bar{g}}_t$ ), lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

Afin d'éviter les problèmes de bord, nous supposons que  $\Omega$  est un tore euclidien de dimension 3. Nous rappelons ici les raisons physiques et mécaniques qui font que, dans un cadre à peine plus général que celui choisi par Ebin [11], cette approximation a toutes les chances d'être encore valable. Nous ne supposons donc plus les distributions initiales d'entropie  $s_0(x)$  et de masse volumique uniformes même pour le fluide incompressible<sup>5</sup>.

Nous allons raisonner par analogie avec le point matériel (cf. section 1.4). Dans ce cas simple, l'approximation repose sur les deux propriétés suivantes :

- le potentiel reste constant sur la sphère ;
- le potentiel devient très grand lorsque l'on s'éloigne légèrement de la sphère.

Sous forme différentielle, ces deux propriétés deviennent :

- le gradient du potentiel est orthogonal à la sphère ;
- le hessien du potentiel est très grand selon la direction orthogonale à la sphère.

---

<sup>5</sup>Fluide incompressible de densité variable, fonction de la température par exemple.

Nous allons simplement vérifier ici que ces deux propriétés restent encore vraies dans le cas du fluide parfait faiblement compressible, à savoir :

- $\mathbf{grad}U$  est orthogonal à  $\mathcal{D}_\mu$  ;
- $\mathbf{hess}U$  est très grand selon les champs de gradient sur  $\Omega$ .

Le potentiel  $U(g)$  est donné par (2.11). Soit  $g \in \mathcal{D}_\mu$ .  $\mathbf{grad}U(g)$  vérifie

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{grad}U(g), u \rangle_g &= \iiint_{\Omega} \mathbf{grad}p \cdot \xi \, dx \\ &= - \iiint_{\Omega} p \left( s_0(g^{-1}(x)), \frac{\varrho_0(g^{-1}(x))}{|Dg(g^{-1}(x))|} \right) \operatorname{div}\xi(x) \, dx \end{aligned}$$

pour tout  $u = \xi \circ g$  tangent à  $\mathcal{D}$  en  $g$  ( $\xi \in \mathcal{U}$ ). Si  $u$  est en plus dans l'espace tangent à  $\mathcal{D}_\mu$  en  $g$ , alors  $\xi \in \mathcal{U}_\mu$ . Donc  $\operatorname{div}\xi = 0$  et  $\langle \mathbf{grad}U(g), u \rangle_g = 0$ . La première propriété est bien vérifiée.

Le hessien  $\mathbf{hess}U(g)$  de  $U$  en  $g$  est une forme quadratique sur l'espace tangent à  $\mathcal{D}$  en  $g$  (cf. annexe B). Nous verrons plus loin (lemme 5) que pour  $u = \xi \circ g$  tangent en  $g$  à  $\mathcal{D}$ , on a

$$\mathbf{hess}U(g)[\xi \circ g, \xi \circ g] = \iiint_{\Omega} \left[ \varrho_g(x) \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_g (x) (\operatorname{div}\xi(x))^2 + 2 \mathbf{grad}p_g(x) \cdot (\operatorname{div}\xi(x) \xi(x)) + D^2p_g(\xi(x), \xi(x)) \right] dx$$

où

- $\varrho_g(x) = |Dg^{-1}(x)|\varrho_0(g^{-1}(x))$ ,
- $p_g(x) = p(s_0(g^{-1}(x)), \varrho_g(x))$ ,
- $\left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_g (x) = \left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{s=cte} (s_0(g^{-1}(x)), \varrho_g(x))$ .

Les éléments tangents à  $\mathcal{D}$  en  $g$  et orthogonaux à  $\mathcal{D}_\mu$  sont de la forme  $\frac{1}{\varrho_0} \mathbf{grad}\alpha \circ g$  avec  $\alpha$  fonction de  $\Omega$  dans  $R$ . Pour ces éléments, on a

$$\mathbf{hess}U(g)\left[\frac{1}{\varrho_0} \mathbf{grad}\alpha \circ g, \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{grad}\alpha \circ g\right] = \iiint_{\Omega} \left[ \left( p_g(x) \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_g (x) - p_g(x) \right) (\Delta\alpha(x))^2 + p_g(x) \operatorname{trace}(D^2\alpha(x) D^2\alpha(x)) \right] dx.$$

Il est clair que lorsque  $\left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{s=cte}$  devient grand, le fluide devient de moins en moins compressible et l'intégrale ci-dessus devient de plus en plus grande. La seconde propriété est donc aussi satisfaite.

Nous voyons que le petit paramètre  $\varepsilon$  peut être pris égal à l'inverse de  $\left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{s=cte}$ , le carré de la célérité du son :  $\left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{s=cte}$  joue ici un rôle similaire au paramètre  $A$  du potentiel pour le point matériel (cf. section 1.4).

En conclusion, il est naturel de supposer, comme pour le point matériel, les convergences suivantes :

- à chaque instant  $t$ ,  $g_t^\varepsilon$  et  $\dot{g}_t^\varepsilon$  sont proches de  $\bar{g}_t$  et  $\dot{\bar{g}}_t$ , respectivement ;
- $\ddot{g}_t^\varepsilon$  et  $\text{grad}p^\varepsilon$  ne sont proches de  $\ddot{\bar{g}}_t$  et  $\text{grad}\bar{p}$  qu'en valeur moyenne sur un intervalle de temps grand par rapport aux échelles de temps acoustiques.

## 2.6 Viscosité

Pour un fluide incompressible de densité uniforme et constante, le rajout d'effets visqueux conduit, dans l'approximation linéaire, à l'équation de Navier,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Dv v = -\frac{1}{\varrho} \text{grad} p + \nu \Delta v, \quad (2.17)$$

où  $\nu > 0$  est la viscosité cinématique. Il est encore possible d'écrire cette équation d'un point de vue lagrangien. Avec les notations de la formule (2.15), on obtient :

$$\ddot{g} = R(g, \dot{g}) - F(g, \dot{g})$$

où  $F(g, \dot{g})$  est l'opérateur linéaire en  $\dot{g}$  suivant :

$$F(g, \dot{g}) = -\nu(\Delta v) \circ g$$

avec  $\dot{g} = v \circ g$  et  $v \in \mathcal{U}_\mu$ . Comme pour le point matériel (cf. (1.10)), l'opérateur linéaire  $F(g, \cdot)$  est positif. En effet, par la formule de Green on a

$$\langle F(g, \dot{g}), \dot{g} \rangle_g = \iint \int_\Omega \nu \varrho (\text{grad} v(x)) \cdot (\text{grad} v(x)) dx \geq 0.$$

Il semble difficile d'étendre cette analogie aux fluides compressibles visqueux car, dans ce cas, l'entropie ne se conserve plus le long des trajectoires.



## Chapter 3

# Stabilité lagrangienne

La stabilité d'un écoulement fluide peut être abordée de deux points de vue :

- le point de vue eulérien où l'on considère, pour la même position  $x$ , l'évolution au cours du temps de la différence  $f(t, x)$  entre la vitesse de l'écoulement de référence  $v(t, x)$  et la vitesse d'un écoulement voisin  $v'(t, x) = v(t, x) + f(t, x)$  ;
- le point de vue lagrangien où l'on considère, pour une même particule fluide, l'évolution au cours du temps entre la trajectoire  $g_t(x)$  partant d'une position initiale de référence  $x$  dans l'écoulement de référence  $v$  et la trajectoire  $g'_t(x')$  partant d'une position initiale voisine  $x'$  dans l'écoulement voisin  $v' = v + f$ .

Pour étudier l'évolution temporelle de  $f$ , il suffit de prendre l'approximation au premier ordre des équations eulériennes du mouvement. Par exemple, pour un fluide incompressible régi par (2.14),  $f$  vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + Dv f + Df v &= -\text{grad}\alpha \\ \text{div} f &= 0 \end{cases}$$

avec  $f$  tangent au bord. Si les solutions de ce système différentiel linéaire restent bornées au cours du temps pour une certaine norme (par exemple la norme  $L^2$ ), on dira que l'écoulement est linéairement stable d'un point de vue eulérien. Pour un exposé approfondi de cette méthode, nous renvoyons le lecteur au livre de Drazin et Reid [10]. Remarquons que très souvent, même lorsque l'écoulement de référence est stationnaire, l'étude complète de la stabilité est loin d'être évidente analytiquement et l'on doit recourir au calcul numérique.

Dans ce chapitre, nous adoptons le point de vue lagrangien : nous considérons la différence entre les trajectoires de référence  $g_t(x)$  et les trajectoires perturbées  $g'_t(x')$ . Nous établissons, dans le cas du fluide parfait compressible et incompressible, les systèmes différentiels linéaires qui donnent l'évolution de cette différence et nous étudions leur stabilité. Pour ce faire, nous utilisons les interprétations géométriques du chapitre 2 et quelques notions classiques de géométrie Riemannienne (connexion, courbure, équation de Jacobi), notions rappelées succinctement dans l'annexe B. Les résultats contenus dans les sections 3.1 et 3.4 ont fait l'objet d'une publication [17].

### 3.1 Relations cinématiques

Il nous faut quantifier la différence entre trajectoires de référence et trajectoires perturbées. Nous avons vu dans le chapitre 2 que la description lagrangienne du mouvement se ramène à l'étude de courbes  $t \rightarrow g_t$  tracées sur les variétés  $\mathcal{D}$  ou  $\mathcal{D}_\mu$ . Ainsi la différence entre deux mouvements voisins  $t \rightarrow g_t$  et  $t \rightarrow g'_t$  peut être décrite, à chaque instant  $t$  par un petit vecteur tangent à  $\mathcal{D}$  ou  $\mathcal{D}_\mu$  en  $g_t$ , vecteur noté  $\xi_t \circ g_t$  avec  $\xi_t \in \mathcal{U}$  ou  $\mathcal{U}_\mu$ .  $\xi_t$  est défini par la relation suivante

$$g'_t(x) \approx g_t(x) + \xi_t(g_t(x)). \quad (3.1)$$

$\xi$  est appelé champ de vecteurs de la première variation, ou, en abrégé, première variation.

Supposons que  $g_t$  soit le flot associé par (2.1) au champ de vitesse  $v(t, x)$ . Supposons également que  $g'_t$  soit aussi relié à un champ de vitesse  $v(t, x) + f(t, x)$ , avec  $f$  petit, mais d'une façon un peu différente : on ne prend plus comme condition initiale  $x$  dans (2.1) mais, pour être cohérent avec (3.1),  $x + \xi_0(x)$  avec  $\xi_0 \in \mathcal{U}$  ou  $\mathcal{U}_\mu$  petit. Alors  $\xi_t$  défini par (3.1) est donné par la relation cinématique suivante :

$$\xi_t(x) = \int_0^t \left( D [g_s \circ g_t^{-1}] (x) \right)^{-1} f \left( s, g_s \circ g_t^{-1}(x) \right) ds + \left( D g_t^{-1}(x) \right)^{-1} \xi_0 \left( g_t^{-1}(x) \right). \quad (3.2)$$

Pour la démonstration, nous renvoyons à [17], proposition 1. Il est à noter que, si  $\xi_0 \in \mathcal{U}$  (resp.  $\xi_0 \in \mathcal{U}_\mu$ ) et si, à chaque instant,  $v$  et  $f$  sont dans  $\mathcal{U}$  (resp.  $\mathcal{U}_\mu$ ), alors  $\xi_t$  donné par (3.2) appartient aussi à  $\mathcal{U}$  (resp.  $\mathcal{U}_\mu$ ). Le second membre de (3.2) est la somme de deux termes

- le second terme est clairement relatif, pour l'écoulement de référence  $v$ , à la sensibilité des trajectoires par rapport à leur condition initiale ; si les trajectoires ont tendance à s'écarter de façon exponentielle, ce terme croît alors de façon exponentielle ; cette situation est typique de ce que l'on appelle chaos lagrangien et peut être observée, par exemple, pour des écoulements incompressibles stationnaires [8] ;
- le premier terme résulte de la combinaison de deux effets :
  - le premier effet,  $\left( D [g_s \circ g_t^{-1}] (x) \right)^{-1}$ , est lagrangien et relatif au comportement des trajectoires dans l'écoulement nominal  $v$  ;
  - le second effet,  $f \left( s, g_s \circ g_t^{-1}(x) \right)$ , dépend essentiellement de la croissance de  $f$  ; il est en revanche typiquement eulérien.

Nous pouvons donc conjecturer que  $\xi_t$  reste borné en temps en absence d'instabilités exponentielles de  $f$  et du flot  $g_t$  et qu'une croissance exponentielle de  $\xi_t$  en module est due à une instabilité exponentielle de  $f$  et/ou du flot  $g_t$ .

### 3.2 Fluide sans cohésion

Bien que d'un intérêt pratique limité, nous commençons par le fluide sans cohésion. La raison en est que les notions nécessaires de géométrie riemannienne sont les mêmes que celles que nous utiliserons plus loin pour le fluide parfait compressible ou incompressible. Les trajectoires des éléments fluides étant des droites, on doit logiquement avoir un tenseur de courbure identiquement nul. C'est ce que nous allons démontrer.

Considérons donc un flot  $g_t$  associé à une solution régulière de l'équation de Burgers (2.3). Afin d'éviter les problèmes de bord nous supposons que  $\Omega$  est un tore euclidien de dimension trois<sup>1</sup>. Nous savons (cf. chapitre 2) que la courbe  $t \rightarrow g_t$  est une géodésique de la variété riemannienne  $\mathcal{D}$ . Comme le rappelle l'annexe B, la stabilité des géodésiques est conditionnée par le signe de la courbure sectionnelle. Pour obtenir la courbure, nous devons (cf. (B.6)) calculer la connexion de Levi-Civita associée à la métrique et définie par (B.3). Ce calcul nécessite l'utilisation de champs de vecteurs sur  $\mathcal{D}$ . La façon la plus simple de définir des champs de vecteurs sur  $\mathcal{D}$  est d'utiliser, là encore, la structure de groupe. A chaque élément  $\xi \in \mathcal{U}$  on associe le champ de vecteurs sur  $\mathcal{D}$ , dit invariant à droite et défini par

$$\mathcal{D} \ni g \longrightarrow \xi \circ g. \quad (3.3)$$

Les calculs de connexion et de courbure que nous allons faire dans toute la suite reposent entièrement sur la manipulation de tels champs de vecteurs sur  $\mathcal{D}$ . Comme la courbure sectionnelle en un point  $g \in \mathcal{D}$  ne dépend que de  $g$  et de la section plane tangente en  $g$ , il suffira d'appliquer les formules obtenues pour des champs de vecteurs invariants à droite coïncidant en  $g$  avec les vecteurs tangents en  $g$  engendrant la section plane considérée.

### 3.2.1 Connexion

Nous calculons d'abord le crochet de deux champs de vecteurs invariants à droite sur  $\mathcal{D}$ .

**Lemme 1** *Soient deux champs de vecteurs  $g \rightarrow u_1$  et  $g \rightarrow u_2$  sur  $\mathcal{D}$ , invariants à droite, définis par  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}$  au moyen de (3.3). Alors leur crochet, noté  $[u_1, u_2]$ , est aussi invariant à droite et est défini par*

$$g \longrightarrow [u_1, u_2](g) = [\xi_1, \xi_2] \circ g$$

où  $[\xi_1, \xi_2]$  est le crochet classique de deux champs de vecteurs sur  $\Omega$  ( $[\xi_1, \xi_2] = D\xi_2 \xi_1 - D\xi_1 \xi_2$ ).

Ce résultat n'a rien de métrique. Il est purement associé à la structure différentiable de  $\mathcal{D}$ . Une démonstration pour  $\mathcal{D}_\mu$  se trouve dans [5]. Ici nous en donnons une à peine différente pour  $\mathcal{D}$ .

**Preuve** Au champ de vecteurs  $u_1$  est associé un flot  $\Phi_t^1$  sur  $\mathcal{D}$  et une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dg}{dt} = \xi_1 \circ g$$

dont la solution démarrant en  $g_0$  donne  $\Phi_t^1(g_0)$ . Si on note  $\phi_t^1 \in \mathcal{D}$  le flot associé à  $\xi_1$ . Il est clair que  $\Phi_t^1(g) = \phi_t^1 \circ g$ . Ainsi  $\Phi_t^1$  est la translation à gauche par  $\phi_t^1$ . Par définition (cf. (B.1)), on a

$$[u_1, u_2](g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[ (T\Phi_t^1(g))^{-1} u_2(\Phi_t^1(g)) \right]$$

<sup>1</sup>On peut prendre des hypothèses plus physiques. Par exemple,  $\Omega$  est l'espace physique en entier et le mouvement est localisé dans une partie bornée de l'espace. Ceci permet de raisonner sur des champs de vecteurs sur  $\Omega$  à support compact et sur des difféomorphismes coïncidant avec  $I_d$  en dehors d'une partie bornée.

avec  $T\Phi_t^1(g)$  l'application linéaire tangente à  $\Phi_t^1$  en  $g$ . Comme

$$\begin{aligned} (T\Phi_t^1(g))^{-1}u_2(\Phi_t^1(g)) &= [D\phi_t^1]^{-1} \circ g \quad \xi_2 \circ \phi_t^1, & \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_t^1) &= \xi_1, \\ D\phi_{t=0}^1 &= 1, & \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (D\phi_t^1) &= D\xi_1, \end{aligned}$$

on a

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[ (T\Phi_t^1(g))^{-1}u_2(\Phi_t^1(g)) \right] = D\xi_2 \circ g \quad \xi_1 \circ g \quad - \quad D\xi_1 \circ g \quad \xi_2 \circ g. \blacksquare$$

**Lemme 2** Soient deux champs de vecteurs  $g \rightarrow u_1$  et  $g \rightarrow u_2$  sur  $\mathcal{D}$ , invariants à droite, définis par  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}$  au moyen de (3.3). Alors, la dérivée covariante de  $u_2$  par rapport à  $u_1$ , noté  $\nabla_{u_1}u_2$ , est aussi un champ invariant à droite et est engendré par  $D\xi_2 \xi_1 \in \mathcal{U}$ .

**Preuve** Soit  $g \in \mathcal{D}$  fixé. On pose  $\nabla_{u_1}u_2(g) = \zeta \circ g$  avec  $\zeta \in \mathcal{U}$  qui dépend a priori de  $g$ . On veut montrer que  $\zeta = D\xi_2 \xi_1$ . Pour cela, on utilise la relation (B.3). Soit  $\xi \in \mathcal{U}$ . On note  $u$  le champ de vecteurs sur  $\mathcal{D}$  invariant à droite généré par  $\xi : u(g) = \xi \circ g$ . Soient  $t \rightarrow g_t^1, t \rightarrow g_t^2$  et  $t \rightarrow g_t$  trois courbes sur  $\mathcal{D}$  qui passent toutes en  $t = 0$  par  $g$  avec comme vitesses, respectivement,  $\xi_1 \circ g, \xi_2 \circ g$  et  $\xi \circ g$ . (B.3) s'écrit ici

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_{u_1}u_2, u \rangle_g &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[ \langle u_2, u \rangle_{g_t^1} + \langle u_1, u \rangle_{g_t^2} - \langle u_1, u_2 \rangle_{g_t} \right] \\ &\quad + \langle [u_1, u_2], u \rangle_g - \langle [u_2, u], u_1 \rangle_g - \langle [u_1, u], u_2 \rangle_g. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1 et des calculs du type

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[ \langle u_2, u \rangle_{g_t^1} \right] &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[ \iiint_{\Omega} \varrho_0(x) \xi_2(g_t^1(x)) \cdot \xi(g_t^1(x)) dx \right] \\ &= \iiint_{\Omega} \varrho_0(x) [D\xi_2(g(x)) \xi_1(g(x))] \cdot \xi(g(x)) dx \\ &\quad + \iiint_{\Omega} \varrho_0(x) \xi_2(g(x)) \cdot [D\xi(g(x)) \xi_1(g(x))] dx \end{aligned}$$

on obtient, en jouant sur le fait que  $\xi$  est quelconque dans  $\mathcal{U}$ ,  $\zeta = D\xi_2 \xi_1$ . ■

### 3.2.2 Courbure

**Lemme 3** Le tenseur de courbure de la variété riemannienne  $\mathcal{D}$  est identiquement nul.

**Preuve** Soient trois champs de vecteurs invariants à droite,  $u_1, u_2$  et  $u_3$ , engendrés par,  $\xi_1, \xi_2$  et  $\xi_3$  dans  $\mathcal{U}$ , respectivement. Soit  $g \in \mathcal{D}$ . Le tenseur de courbure en  $g, R_g$ , est donnée par la formule (B.6) qui s'écrit ici

$$R_g(u_1, u_2)u_3 = \nabla_{u_2} \nabla_{u_1}u_3 - \nabla_{u_1} \nabla_{u_2}u_3 + \nabla_{[u_1, u_2]}u_3$$

Or  $\nabla_{u_2} \nabla_{u_1}u_3$  est le champ invariant à droite généré par  $D^2\xi_3(\xi_1, \xi_2) + D\xi_3 D\xi_1 \xi_2$ . De même  $\nabla_{u_1} \nabla_{u_2}u_3$  est engendré par  $D^2\xi_3(\xi_2, \xi_1) + D\xi_3 D\xi_2 \xi_1$  et  $\nabla_{[u_1, u_2]}u_3$  est engendré

par  $D\xi_3(D\xi_2\xi_1 - D\xi_1\xi_2)$ . Comme l'opérateur bilinéaire  $D^2\xi_3$  est symétrique, le second membre de l'équation précédente est identiquement nul. ■

Ainsi, au problème de dimension infinie près, la variété  $\mathcal{D}$  est isométrique (localement) à un espace vectoriel euclidien (de dimension infinie) et les trajectoires  $t \rightarrow g_t$  à des droites de cet espace. Il serait intéressant de connaître un jeu de coordonnées locales euclidiennes généralisées sur  $\mathcal{D}$ .

### 3.3 Fluide parfait compressible

Soit  $g_t$  le flot associé à une solution régulière  $v(t, x)$  des équations d'Euler compressible (2.8). Afin d'éviter les problèmes liés au bord, nous faisons sur  $\Omega$  les mêmes hypothèses que pour le fluide sans cohésion et l'équation de Burgers.

Dans toute cette section, nous notons  $h = T(\dot{g}_t) + U(g_t)$  l'énergie mécanique du fluide. Nous avons vu (cf. chapitre 2) que  $h$  est une constante du mouvement et que le reparamétrage  $\tau$  défini par  $d\tau = (h - U(g_t)) dt$ , permet d'interpréter la courbe  $\tau \rightarrow g_\tau$  comme une géodesique de  $\mathcal{D}$  pour la métrique modifiée

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_g^h = (h - U(g)) \langle \cdot, \cdot \rangle_g . \tag{3.4}$$

Nous allons tout d'abord calculer la connexion et la courbure associée à cette métrique. Ensuite, nous partirons de l'équation de Jacobi, qui donne l'évolution en  $\tau$  de la première variation  $\xi$  (définie par (3.1)) pour obtenir une équation équivalente qui donne directement l'évolution en  $t$  de  $\xi$ . Nous terminons par une étude de la stabilité de cette équation.

On se place dans une zone de  $\mathcal{D}$  où  $h - U(g)$  reste strictement positif. On calcule la connexion  $\nabla^h$  et le tenseur de courbure  $R^h$  pour la métrique définie par (3.4). On utilise, dans les calculs qui suivent, la connexion  $\nabla$ , le gradient de  $U$ ,  $\mathbf{grad}U$ , et le hessien de  $U$ ,  $\mathbf{hess}U$ , associés à la métrique standard de  $\mathcal{D}$  définie par (2.7).

#### 3.3.1 Connexion

**Lemme 4** *Soient deux champs de vecteurs  $g \rightarrow u_1$  et  $g \rightarrow u_2$  sur  $\mathcal{D}$ , invariants à droite. Pour la métrique modifiée, la dérivée covariante de  $u_2$  par rapport à  $u_1$ , notée  $\nabla_{u_1}^h u_2$ , est donnée par*

$$\nabla_{u_1}^h u_2 = \nabla_{u_1} u_2 + \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{2(h - U)} \mathbf{grad}U - \frac{\langle u_1, \mathbf{grad}U \rangle}{2(h - U)} u_2 - \frac{\langle u_2, \mathbf{grad}U \rangle}{2(h - U)} u_1$$

Il est important de remarquer que, contrairement à  $\nabla_{u_1} u_2$ ,  $\nabla_{u_1}^h u_2$  n'est plus un champ invariant à droite.

**Preuve** Soit  $g \in \mathcal{D}$  fixé. Pour  $\xi \in \mathcal{U}$ , on note  $u$  le champ de vecteurs sur  $\mathcal{D}$  invariant à droite généré par  $\xi : u(g) = \xi \circ g$ . Soient  $t \rightarrow g_t^1$ ,  $t \rightarrow g_t^2$  et  $t \rightarrow g_t$  trois courbes sur  $\mathcal{D}$  qui passent toutes en  $t = 0$  par  $g$  avec comme vitesses, respectivement,  $\xi_1 \circ g$ ,  $\xi_2 \circ g$  et  $\xi \circ g$ .

(B.3) s'écrit ici

$$\begin{aligned}
2(h - U(g)) &< \nabla_{u_1}^h u_2, u >_g = \\
\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} & \left[ (h - U(g_t^1)) < u_2, u >_{g_t^1} + (h - U(g_t^2)) < u_1, u >_{g_t^2} - (h - U(g_t)) < u_1, u_2 >_{g_t} \right] \\
&+ (h - U(g)) < [u_1, u_2], u >_g - (h - U(g)) < [u_2, u], u_1 >_g \\
&- (h - U(g)) < [u_1, u], u_2 >_g .
\end{aligned}$$

L'unique différence avec les calculs faits pour la connexion  $\nabla$ , vient de termes du type  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (h - U(g_t^1))$ . Or

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (h - U(g_t^1)) = - < \mathbf{grad}U, u_1 >_g .$$

On obtient, après quelques manipulations simples, la relation souhaitée. ■

### 3.3.2 Courbure

D'après la formule (B.6), le tenseur de courbure  $R^h$  fait intervenir deux dérivées covariantes  $\nabla^h$  successives. Puisque  $\nabla^h$  fait apparaître le gradient de  $U$  pour la métrique riemannienne standard sur  $\mathcal{D}$ ,  $\mathbf{grad}U$ ,  $R^h$  nécessite la connaissance du hessien de  $U$ ,  $\mathbf{hess}U$ .

**Lemme 5** *Soient  $\mathcal{D}$  muni de la métrique définie par (2.7) et le potentiel  $U$  défini par (2.11). Alors le hessien de  $U$  en  $g$ , noté  $\mathbf{hess}U(g)$ , est donné, pour tout  $\xi_1 \circ g$  et  $\xi_2 \circ g$  tangent à  $\mathcal{D}$  en  $g$  ( $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}$ ), par l'intégrale suivante*

$$\mathbf{hess}U(g)(\xi_1 \circ g, \xi_2 \circ g) = \iint \int_{\Omega} \left[ \varrho_g \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_g \operatorname{div} \xi_1 \operatorname{div} \xi_2 + \operatorname{grad} p_g \cdot (\operatorname{div} \xi_1 \xi_2 + \operatorname{div} \xi_2 \xi_1) + D^2 p_g(\xi_1, \xi_2) \right] dx$$

où

$$\begin{aligned}
- \varrho_g(x) &= |Dg^{-1}(x)| \varrho_0(g^{-1}(x)), \\
- p_g(x) &= p(s_0(g^{-1}(x)), \varrho_g(x)) \text{ avec la fonction } p(s, \varrho) \text{ donnée par la thermodynamique du système (équation d'état),} \\
- \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_g(x) &= \frac{\partial p}{\partial \varrho} \Big|_{s=cte} (s_0(g^{-1}(x)), \varrho_g(x)).
\end{aligned}$$

**Preuve** On note  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) le champ de vecteurs invariant à droite généré par  $\xi_1$  (resp.  $\xi_2$ ). On considère une courbe tracée sur  $\mathcal{D}$ ,  $t \rightarrow g_t^1$ , qui passe en  $g$  à  $t = 0$  à la vitesse  $u_1(g) = \xi_1 \circ g$ . Par définition du hessien (cf. (B.5)), on a

$$\mathbf{hess}U(g)[\xi_1, \xi_2] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \mathbf{grad}U, u_2 \rangle_{g_t^1} - \langle \mathbf{grad}U, \nabla_{u_1} u_2 \rangle_g .$$

Or

$$\langle \mathbf{grad}U, u_2 \rangle_{g_t^1} = - \iint \int_{\Omega} p_{g_t^1}(x) \operatorname{div} \xi_2(x) dx .$$

Donc

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \mathbf{grad}U, u_2 \rangle_{g_t^1} = \iint \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [p_{g_t^1}(x) \operatorname{div} \xi_2(x)] dx .$$

Un calcul simple montre que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p_{g_t^1}(x) = \operatorname{grad} p_g(x) \cdot \xi_1(x) + \varrho_g(x) \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_g(x) \operatorname{div} \xi_1(x) .$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme 2 et l'intégration par partie,

$$\begin{aligned} & \iint \int_{\Omega} \operatorname{grad} p_g(x) \cdot (D\xi_2(x)\xi_1(x)) dx = \\ & - \iint \int_{\Omega} [\operatorname{grad} p_g(x) \cdot (\operatorname{div} \xi_1 \xi_2) + D^2 p_g(x)(\xi_1(x), \xi_2(x))] dx , \end{aligned}$$

pour conclure. ■

**Lemme 6** Pour  $\mathcal{D}$  muni de la métrique (3.4), le tenseur de courbure  $R^h$  est donné par

$$\begin{aligned} \langle R^h(u_1, u_2) u_3, u_4 \rangle &= \\ & \frac{1}{2(h-U)} \langle u_1, u_3 \rangle \mathbf{hess}U(u_2, u_4) + \frac{1}{2(h-U)} \langle u_2, u_4 \rangle \mathbf{hess}U(u_1, u_3) \\ & - \frac{1}{2(h-U)} \langle u_2, u_3 \rangle \mathbf{hess}U(u_1, u_4) - \frac{1}{2(h-U)} \langle u_1, u_4 \rangle \mathbf{hess}U(u_2, u_3) \\ & + \frac{3}{4(h-U)^2} \langle u_1, \mathbf{grad}U \rangle \langle u_3, \mathbf{grad}U \rangle \langle u_2, u_4 \rangle \\ & + \frac{3}{4(h-U)^2} \langle u_2, \mathbf{grad}U \rangle \langle u_4, \mathbf{grad}U \rangle \langle u_1, u_3 \rangle \\ & - \frac{3}{4(h-U)^2} \langle u_2, \mathbf{grad}U \rangle \langle u_3, \mathbf{grad}U \rangle \langle u_1, u_4 \rangle \\ & - \frac{3}{4(h-U)^2} \langle u_1, \mathbf{grad}U \rangle \langle u_4, \mathbf{grad}U \rangle \langle u_2, u_3 \rangle \\ & - \frac{1}{4(h-U)^2} \langle u_1, u_3 \rangle \langle u_2, u_4 \rangle \langle \mathbf{grad}U, \mathbf{grad}U \rangle \\ & + \frac{1}{4(h-U)^2} \langle u_1, u_4 \rangle \langle u_2, u_3 \rangle \langle \mathbf{grad}U, \mathbf{grad}U \rangle . \end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs  $u_i$  sur  $\mathcal{D}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Nous ne donnons pas le détail de la preuve. Il suffit de vérifier cette formule lorsque les  $u_i$  sont invariants à droite, ce qui permet d'utiliser dans la définition (B.6) et le calcul précédent de la connexion  $\nabla^h$ . Les calculs sont fastidieux mais simples car ils reposent uniquement sur les propriétés, citées dans l'annexe B, de la connexion  $\nabla$  et la propriété suivante du hessien

$$\mathbf{hess}U(u_1, u_2) = \langle \nabla_{u_1} \mathbf{grad}U, u_2 \rangle = \langle \nabla_{u_2} \mathbf{grad}U, u_1 \rangle.$$

La formule ci-dessus donnant le tenseur de courbure pour la métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g^h$  est tout à fait générale : pour être valable, il suffit que la métrique de départ  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$  soit de courbure nulle.

### 3.3.3 Equation dérivée de celle de Jacobi

On considère toujours le flot  $g_t$  associé à un écoulement parfait compressible  $v$  d'énergie mécanique  $h$ , ainsi que le reparamétrage en  $\tau$  tel que la courbe  $\tau \rightarrow \bar{g}_\tau = g_{\tau(t)}$  soit une géodésique de  $\mathcal{D}$  pour la métrique modifiée  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g^h$ . On a

$$\frac{d\bar{g}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{h - U(g_t)} \frac{dg_t}{dt} = \frac{1}{h - U(g_t)} \dot{g}_t.$$

Pour des raisons de simplicité dans les notations, nous identifions ici  $\xi$ , défini par (3.1) pour deux écoulements voisins  $g_t$  et  $g'_t$  de même énergie mécanique  $h$ , avec  $\xi \circ g$  le vecteur tangent en  $g$  à  $\mathcal{D}$ .  $\xi$  peut être considéré lui aussi comme une fonction de  $\tau$ . Puisque qu'aucune ambiguïté n'est possible dans cette sous-section, nous omettons l'indice  $g$  dans la notation du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$  en  $g \in \mathcal{D}$

Lorsque l'on pose

$$\frac{D}{D\tau} = \nabla_{\frac{d\bar{g}}{d\tau}}^h = \frac{1}{h - U} \nabla_{\dot{g}}^h,$$

l'évolution de  $\xi$  en fonction de  $\tau$  est donnée par l'équation de Jacobi :

$$\frac{D^2 \xi}{D\tau^2} = -R^h \left( \frac{d\bar{g}}{d\tau}, \xi \right) \frac{d\bar{g}}{d\tau}.$$

Or nous voulons une équation donnant l'évolution en fonction du temps physique  $t$ . On pose donc

$$\frac{D}{Dt} = \nabla_{\dot{g}}^h.$$

Cet opérateur de dérivation n'est pas compatible avec la métrique issue de l'énergie cinétique, i.e.

$$\frac{D}{Dt} \langle \xi_t, \xi_t \rangle \neq 2 \langle \frac{D}{Dt} \xi_t, \xi_t \rangle$$

en général. En revanche, il l'est avec la métrique modifiée par la propriété de la connexion  $\nabla^h$  :

$$\frac{D}{Dt} \langle \xi_t, \xi_t \rangle^h = 2 \langle \frac{D}{Dt} \xi_t, \xi_t \rangle^h.$$

On s'intéresse à la longueur de  $\xi$  dans la métrique standard, i.e à  $\langle \xi, \xi \rangle$ , et pas à celle dans la métrique modifiée, i.e  $\langle \xi, \xi \rangle^h$ . Comme

$$\langle \xi, \xi \rangle = \left\langle \frac{\xi}{\sqrt{h - U(g)}}, \frac{\xi}{\sqrt{h - U(g)}} \right\rangle^h$$

il est utile d'introduire le vecteur  $\zeta_t = \frac{\xi_t}{\sqrt{h - U(g_t)}}$ .

On a

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{D\xi}{Dt} - \frac{\dot{T}}{2T^{3/2}} \xi$$

car  $T(\dot{g}_t) + U(g_t) = h$ . Donc

$$\frac{D^2\zeta}{Dt^2} = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[ \frac{D^2\xi}{Dt^2} - \frac{\dot{T}}{T} \frac{D\xi}{Dt} + \left( \frac{3\dot{T}^2}{4T^2} - \frac{\ddot{T}}{2T} \right) \xi \right].$$

Mais

$$\frac{D\xi}{D\tau} = \frac{1}{T} \frac{D\xi}{Dt}$$

et

$$\frac{D^2\xi}{D\tau^2} = \frac{1}{T^2} \left[ \frac{D^2\xi}{Dt^2} - \frac{\dot{T}}{T} \frac{D\xi}{Dt} \right].$$

Donc

$$\frac{D^2\zeta}{Dt^2} = T^{3/2} \frac{D^2\xi}{D\tau^2} + \left( \frac{3\dot{T}^2}{4T^{5/2}} - \frac{\ddot{T}}{2T^{3/2}} \right) \xi.$$

Comme  $\dot{T} = \frac{d}{dt}(h - U(g_t)) = - \langle \mathbf{grad}U, \dot{g} \rangle$ , on a

$$\ddot{T} = - \mathbf{hess}U(\dot{g}, \dot{g}) + \langle \mathbf{grad}U, \mathbf{grad}U \rangle$$

car  $\nabla_{\dot{g}}\dot{g} = \ddot{g} = -\mathbf{grad}U$ . Ainsi  $\zeta$  vérifie l'équation du second ordre suivante

$$\begin{aligned} \frac{D^2\zeta}{Dt^2} = & \\ & -R^h(\dot{g}, \zeta) \dot{g} + \left[ \frac{3(\langle \mathbf{grad}U, \dot{g} \rangle)^2}{4(h - U)^2} + \frac{\mathbf{hess}U(\dot{g}, \dot{g})}{2(h - U)} - \frac{\langle \mathbf{grad}U, \mathbf{grad}U \rangle}{2(h - U)} \right] \zeta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Cette équation est très similaire à celle de Jacobi, car l'opérateur linéaire

$$M_{(g, \dot{g})}^h \zeta = R^h(\dot{g}, \zeta) \dot{g} - \left[ \frac{3(\langle \mathbf{grad}U, \dot{g} \rangle)^2}{4(h - U)^2} + \frac{\mathbf{hess}U(\dot{g}, \dot{g})}{2(h - U)} - \frac{\langle \mathbf{grad}U, \mathbf{grad}U \rangle}{2(h - U)} \right] \zeta$$

est symétrique (pour les deux métriques sur  $\mathcal{D}$ ). Ainsi, il est tentant d'étudier la stabilité des solutions de (3.5) au travers du signe de la forme quadratique  $Q^h$  associée à  $M^h$ . Un simple calcul montre à partir du lemme 6 que, comme  $\zeta = \xi/\sqrt{h - U}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{(g, \dot{g})}^h(\zeta) &= \langle M_{(g, \dot{g})}^h \zeta, \zeta \rangle^h = \\ & \mathbf{hess}U(\xi, \xi) + \frac{3}{2(h - U)} [\langle \xi, \mathbf{grad}U \rangle]^2 \\ & + \frac{1}{4(h - U)^2} [\langle \dot{g}, \xi \rangle]^2 \langle \mathbf{grad}U, \mathbf{grad}U \rangle \\ & - \frac{3}{2(h - U)^2} \langle \dot{g}, \xi \rangle \langle \dot{g}, \mathbf{grad}U \rangle \langle \xi, \mathbf{grad}U \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'opérateur  $M_{g,\dot{g}}^h$  transforme un vecteur colinéaire (resp. perpendiculaire) à  $\dot{g}$  en un vecteur colinéaire (resp. perpendiculaire) à  $\dot{g}$ . On s'intéresse aux variations perpendiculaires à  $\dot{g}$ , car les variations  $\xi$  colinéaires à  $\dot{g}$  correspondent à un simple décalage temporel. Comme pour l'équation de Jacobi (cf. annexe B), **nous supposons** que la stabilité ou l'instabilité des solutions de l'équation (3.5) est donnée par le signe de la forme quadratique  $Q_{(g,\dot{g})}^h$  pour des vecteurs  $\zeta$  orthogonaux à  $\dot{g}$  et de norme  $\langle \zeta, \zeta \rangle^h = 1$  : un signe strictement négatif est alors indication d'instabilité. Il convient donc de trouver une estimation de la partie la plus petite de  $Q_{(g,\dot{g})}^h$  pour les  $\zeta$  perpendiculaires à  $\dot{g}$  et de module 1.

**Proposition 5** *Soit le flot  $g_t$  associé à une solution régulière  $v$  des équations d'Euler compressibles (2.8). On note  $h = T + U$  l'énergie mécanique (cf. proposition 3). Soit la forme quadratique  $Q_{(g,\dot{g})}^h$  définie par (3.6). Alors pour tout  $\zeta^\perp \in \mathcal{U}$  orthogonal à  $\dot{g}$  (i.e.  $\langle \zeta^\perp, \dot{g} \rangle^h = 0$ ) et de module 1 (i.e.  $\langle \zeta^\perp, \zeta^\perp \rangle^h = 1$ ) on a*

$$Q_{(g_t,\dot{g}_t)}^h(\zeta^\perp) \geq \frac{1}{h - U(g_t)} \iint \int_{\Omega} \varrho(t, x) \zeta^\perp(x) \cdot M(t, x) \zeta^\perp(x) \, dx$$

où la matrice  $M$  est symétrique, dépend de  $t$  et  $x$ , et est donnée à partir des champs de densité  $\varrho$  et de pression  $p$  par

$$M = \frac{1}{\varrho} \left[ D^2 p - \frac{1}{\varrho} \left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_s (\text{grad} p)' \cdot \text{grad} p \right]$$

(dans  $(\text{grad} p)'$ , ' désigne la transposition). De plus, pour  $t$  fixé, on a

$$\min_{\langle \zeta^\perp, \zeta^\perp \rangle^h = 1} Q_{(g_t,\dot{g}_t)}^h(\zeta^\perp) = \min_{x \in \Omega} \lambda_{\min}(t, x)$$

où  $\lambda_{\min}(t, x)$  est la plus petite valeur propre de  $M(t, x)$ .

Si l'analyse de la stabilité au travers du signe de  $Q^h$  est justifiée (cf. annexe B), alors il y a instabilité lagrangienne exponentielle dès que, à chaque instant  $t$ , la matrice symétrique  $M(t, x)$  admet, au moins dans le voisinage d'un certain  $x^- \in \Omega$ , une valeur propre négative. Nous allons voir au cours de la preuve ci-dessous, que, pour avoir l'égalité dans la dernière relation du lemme, il convient de choisir  $\zeta^\perp$  localisé autour de  $x^-$  et quasiment parallèle à la direction propre associée à la valeur propre  $\lambda_{\min}(t, x^-)$ . Il semble donc que :

- les instabilités les plus rapides soient localisées en espace ;
- leurs constantes de temps soient données par la valeur propre la plus négative des matrices  $M(t, x)$  (si elle existe) ;
- leurs orientations soient fournies par la direction propre correspondante.

Toute l'étude de la stabilité semble donc se ramener à l'étude spectrale, à chaque instant  $t$ , du champ de matrices symétriques  $x \rightarrow M(t, x)$ .

**Preuve** On pose  $\xi = \sqrt{h - U} \zeta^\perp$ . La formule (3.6) montre que

$$Q_{(g,\dot{g})}^h(\zeta^\perp) = \mathbf{hess}U(\xi, \xi) + \frac{3}{2(h - U)} [\langle \xi, \mathbf{grad}U \rangle]^2$$

ou, de façon plus explicite (cf. lemme 5),

$$\begin{aligned} Q_{(g,\dot{g})}^h(\zeta^\perp) = & \\ & \iint\int_{\Omega} \left[ \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho} (\operatorname{div} \xi)^2 + 2 \operatorname{grad} p_g \cdot \operatorname{div} \xi \xi + D^2 p_g(\xi, \xi) \right] dx \\ & + \frac{3}{2T} \left[ \iint\int_{\Omega} \operatorname{grad} p \cdot \xi dx \right]^2. \end{aligned}$$

On pose  $\alpha^2 = \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho}$ . C'est possible, car la stabilité thermodynamique du fluide en chaque point implique que  $\frac{\partial p}{\partial \varrho}$  reste toujours positif<sup>2</sup>. Alors

$$\iint\int_{\Omega} \operatorname{grad} p_g \cdot \operatorname{div} \xi \xi dx \geq - \left[ \iint\int_{\Omega} \frac{(\operatorname{grad} p \cdot \xi)^2}{\alpha^2} dx \right]^{1/2} \left[ \iint\int_{\Omega} \alpha^2 (\operatorname{div} \xi)^2 dx \right]^{1/2}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \iint\int_{\Omega} \alpha^2 (\operatorname{div} \xi)^2 dx - 2 \left[ \iint\int_{\Omega} \frac{(\operatorname{grad} p \cdot \xi)^2}{\alpha^2} dx \right]^{1/2} \left[ \iint\int_{\Omega} \alpha^2 (\operatorname{div} \xi)^2 dx \right]^{1/2} \geq \\ - \iint\int_{\Omega} \frac{(\operatorname{grad} p \cdot \xi)^2}{\alpha^2} dx. \end{aligned}$$

Donc

$$Q_{(g,\dot{g})}^h(\zeta^\perp) \geq \iint\int_{\Omega} \left[ D^2 p(\xi, \xi) - \frac{(\operatorname{grad} p \cdot \xi)^2}{\alpha^2} \right] dx.$$

Comme  $\xi = \sqrt{h - U} \zeta^\perp$ , on obtient directement la première inégalité et la définition de la matrice  $M$  à partir des champs  $\varrho$  et  $p$ .

Compte tenu de ce qui précède, l'inégalité

$$\min_{\langle \zeta^\perp, \zeta^\perp \rangle = h=1} Q_{(g_t, \dot{g}_t)}^h(\zeta^\perp) \geq \min_{x \in \Omega} \lambda_{\min}(t, x)$$

est évidente. Il convient de démontrer l'inégalité inverse.

Soit  $t$  fixé. On note  $x = 0$  le point de  $\Omega$  où  $\lambda_{\min}(t, 0) = \lambda_0 = \min_{x \in \Omega} \lambda_{\min}(M(t, x))$ . On note  $e_1$  un vecteur propre unitaire de  $M(t, 0)$  associé  $\lambda_0$ . On complète par deux autres vecteurs  $e_2$  et  $e_3$  pour former une base orthonormée de  $R^3$ . Les coordonnées d'un point  $x$  de  $\Omega$  dans le repère orthonormé  $(0, e_1, e_2, e_3)$  sont notées  $(x_1, x_2, x_3)$ . On prend  $\varepsilon > 0$  petit. On pose  $\zeta_\varepsilon = \bar{\zeta}_\varepsilon + \operatorname{grad} \alpha$  où

<sup>2</sup>Il suffit d'utiliser la convexité de l'énergie interne  $e$  en tant que fonction de  $s$  et  $1/\varrho$  ainsi que la relation  $p = - \frac{\partial e}{\partial(1/\varrho)}$

–  $\bar{\zeta}_\varepsilon \in \mathcal{U}_\mu$  est défini par

$$\bar{\zeta}_\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \psi \left[ (x_1/\varepsilon)^2 + (x_2/\varepsilon^2)^2 + (x_3/\varepsilon)^2 \right] \left( -\frac{x_2}{\varepsilon} e_1 + \varepsilon x_1 e_2 \right)$$

avec  $\psi(s) = \exp(4/(4s - 1))$  pour  $s \in [0, 1/4[$  et  $\psi(s) = 0$  pour  $s \geq 1/4$ ;  $\bar{\zeta}_\varepsilon$  est quasiment colinéaire à  $e_1$ ;

– la fonction réelle sur  $\Omega$ ,  $\alpha$ , sera précisée plus loin.

Un simple calcul montre que

$$\begin{aligned} Q_{(g,\dot{g})}^h(\zeta_\varepsilon) &= \\ & \iint\iint_{\Omega} \left[ \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho} (\Delta \alpha)^2 + 2(\text{grad} p \cdot \zeta_\varepsilon) \Delta \alpha + D^2 p(\zeta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon) \right] dx \\ & + \frac{3}{2T} \left[ \iint\iint_{\Omega} \text{grad} p \cdot \text{grad} \alpha dx \right]^2. \end{aligned}$$

Soit la fonction  $\bar{\alpha}$  de sorte que  $\Delta \bar{\alpha} = -\text{grad} p \cdot \bar{\zeta}_\varepsilon$ .  $\text{grad} \bar{\alpha}$  correspond à la projection orthogonale de  $p \bar{\zeta}_\varepsilon$  sur les champs de gradient. Mais  $p \bar{\zeta}_\varepsilon = p(t, 0) \bar{\zeta}_\varepsilon + O(\varepsilon) \bar{\zeta}_\varepsilon$ . Comme  $\bar{\zeta}_\varepsilon$  admet pour projection 0, on a

$$\iint\iint_{\Omega} (\text{grad} \bar{\alpha})^2 dx = O(\varepsilon^2) \iint\iint_{\Omega} \bar{\zeta}_\varepsilon^2 dx.$$

On pose  $\alpha = k \bar{\alpha}$  avec  $k$  constante définie plus loin. Etant donné que

$$\iint\iint_{\Omega} (\zeta_\varepsilon - \bar{\zeta}_\varepsilon)^2 dx = O(\varepsilon^2) \iint\iint_{\Omega} \bar{\zeta}_\varepsilon^2 dx,$$

on a

$$\begin{aligned} Q_{(g,\dot{g})}^h(\zeta_\varepsilon) &= \\ & \iint\iint_{\Omega} \left[ \left( k^2 \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho} - 2k \right) (\text{grad} p \cdot \zeta_\varepsilon)^2 + D^2 p(\zeta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon) \right] dx \\ & + O(\varepsilon) \iint\iint_{\Omega} \bar{\zeta}_\varepsilon^2 dx. \end{aligned}$$

En prenant  $1/k = \varrho(t, 0) \frac{\partial p}{\partial \varrho} \Big|_s(t, 0)$ , on obtient

$$\begin{aligned} Q_{(g,\dot{g})}^h(\zeta_\varepsilon) &= \\ & \iint\iint_{\Omega} \left[ \frac{(\text{grad} p \cdot \zeta_\varepsilon)^2}{\varrho(t, 0) \frac{\partial p}{\partial \varrho} \Big|_s(t, 0)} + D^2 p(t, 0) (\zeta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon) \right] dx \\ & + O(\varepsilon) \iint\iint_{\Omega} \bar{\zeta}_\varepsilon^2 dx. \end{aligned}$$

La fin de la preuve résulte alors d'un simple passage à la limite<sup>3</sup> lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. ■

<sup>3</sup>Pour rendre  $\xi_\varepsilon$  orthogonal à  $v$ , il suffit d'une modification en  $O(\varepsilon) \|\xi_\varepsilon\|$  du vecteur  $\xi_\varepsilon$ .

### 3.4 Fluide parfait incompressible

Dans cette section, nous nous contentons de rappeler les principaux résultats que nous avons publiés dans [17], résultats qui s'appuient sur l'étude plus générale d'Arnol'd [5] relative aux géodésiques des groupes de Lie munis d'une métrique invariante à droite (ou à gauche). Lorsque la masse volumique  $\rho$  est constante (fluide incompressible homogène)  $\mathcal{D}_\mu$  est un tel groupe.

Comme pour le fluide parfait compressible, on donne la connexion, le tenseur de courbure, l'équation de Jacobi et une estimation, pour un écoulement donné, du minimum de la courbure.

**Lemme 7** *Soient deux champs de vecteurs  $g \rightarrow u_1 = \xi_1 \circ g$  et  $g \rightarrow u_2 = \xi_2 \circ g$  sur  $\mathcal{D}_\mu$  ( $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}_\mu$ ) invariants à droite. La dérivée covariante de  $u_2$  par rapport à  $u_1$ , notée  $\nabla_{u_1}^\mu u_2$  est le champ invariant à droite engendré par*

$$D\xi_2 \xi_1 + \text{grad}\alpha \in \mathcal{U}_\mu$$

où la fonction  $\alpha$  correspond à la projection orthogonale de  $D\xi_2 \xi_1$  sur  $\mathcal{U}_\mu$  (i.e.  $D\xi_2 \xi_1 + \text{grad}\alpha$  de divergence nulle et tangent au bord).

Pour la preuve, voir [5], lemme 9 où l'opérateur  $B$  est donné, dans le cas tridimensionnel, par (87). On peut également reprendre la preuve du lemme 2 ci-dessus.

**Lemme 8** *Le tenseur de courbure  $R^\mu$  associé à la variété riemannienne  $\mathcal{D}_\mu$  est donné par*

$$\langle R^\mu(u_1, u_2) u_3, u_4 \rangle_g = \iiint_{\Omega} \rho (\text{grad}\alpha_{1,3} \cdot \text{grad}\alpha_{2,4} - \text{grad}\alpha_{2,3} \cdot \text{grad}\alpha_{1,4}) dx.$$

pour tout vecteur  $u_i = \xi_i \circ g$  tangent à  $\mathcal{D}_\mu$  en  $g$  et où les fonctions  $\alpha_{i,j}$  sont définies par  $D\xi_i \xi_j + \text{grad}\alpha_{i,j} \in \mathcal{U}_\mu$  pour  $i, j = 1, 2, 3, 4$  (noter que  $\text{grad}\alpha_{i,j} = \text{grad}\alpha_{j,i}$ ).

Pour la preuve, il suffit, par exemple, de reprendre la formule (B.6).

Soit  $v$  une solution régulière des équations d'Euler (2.14) et  $g_t \in \mathcal{D}_\mu$  le flot associé par (2.1). On sait que la première variation  $\xi$  définie par (3.1) satisfait l'équation de Jacobi<sup>4</sup>

$$\frac{D^2\xi}{Dt} = -R^\mu(v, \xi)v$$

où  $\frac{D}{Dt} = \nabla_{\dot{g}}^\mu$  et où nous identifions  $\xi$  avec  $\xi \circ g$ . Nous avons utilisé le fait que la métrique est invariante à droite en remplaçant  $R^\mu(\dot{g}_t, \xi)\dot{g}_t$  par  $R^\mu(v, \xi)v$ . Dans [17], nous avons donné l'estimation de la partie la plus petite de la courbure qui, à une renormalisation près, est donnée par  $\langle R^\mu(v, \xi)v, \xi \rangle_{I_d}$ .

**Proposition 6** *Soient  $v, \xi \in \mathcal{U}_\mu$ . Alors on a*

$$\langle R^\mu(v, \xi)v, \xi \rangle_{I_d} \geq \iiint_{\Omega} \rho \xi \cdot M\xi dx$$

---

<sup>4</sup>Cette équation peut être obtenue par des calculs élémentaires et classiques de mécanique des fluides, cf. [17].

et

$$\min_{x \in \Omega} [\lambda_{\min}(t, x)] \leq \min_{\substack{\langle \xi, \xi \rangle_{I_d} = 1 \\ \langle \xi, v \rangle_{I_d} = 0}} \langle R^\mu(v, \xi)v, \xi \rangle_{I_d} \leq \min_{x \in \Omega} \left[ \frac{\text{trace}[M(t, x)]}{3} \right]$$

où

- $M$  est la matrice symétrique  $\frac{1}{\rho} D^2 p - Dv' Dv$  dépendant de  $x \in \Omega$  et du temps  $t$  avec la fonction  $p$  (physiquement la pression) définie par  $\text{grad} p / \rho + Dv v$  de divergence nulle et tangente au bord;
- $\text{trace}[M(t, x)] = - \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t, x) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t, x) \right)^2$ ;
- $\lambda_{\min}(t, x)$  est la plus petite valeur propre de  $M(t, x)$ .

Ainsi, comme pour le cas compressible, les instabilités lagrangiennes les plus rapides de l'écoulement semblent être de nature essentiellement locales en espace et caractérisées par les propriétés spectrales des matrices symétriques  $M(t, x)$ . En plus du cas compressible, on sait ici, sauf pour un profil des vitesses identiques à celui de la rotation d'un solide (tourbillon parfait), que la matrice  $M$  admet une trace toujours strictement négative. De plus, cette trace fait apparaître une quantité fondamentale en turbulence incompressible, le taux local de dissipation  $\varepsilon = \nu/2 \text{ trace} M$  ( $\nu$  est la viscosité cinématique). Ainsi (cf. la conclusion de [17]) l'échelle de temps de Kolmogorov  $\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}$  peut s'interpréter ici comme une constante de temps de divergence, i.e. comme l'inverse d'un d'exposant de Liapounov [18].

Seul l'écoulement incompressible correspondant à une rotation solide à vitesse angulaire uniforme admet une courbure toujours positive ou nulle car  $M \equiv 0$  dans ce cas. Pour tous les autres écoulements, la courbure admet une partie strictement négative. Ceci confirme l'importance des structures tourbillonnaires en tant que structures stables au cours du temps et donc facilement observables.

Il est intéressant de remarquer la structure très similaire des matrices  $M$  dans le cas incompressible (proposition 6) et dans le cas compressible (proposition 5) : le premier terme  $D^2 p / \rho$  est identique tandis que le second est, dans les deux cas, une matrice symétrique négative. Pour un fluide faiblement compressible, il est raisonnable d'affirmer (cf. chapitre 2) que la moyenne, sur un petit intervalle de temps, de la pression  $p$  est proche de la pression du fluide incompressible correspondant ; Ainsi la moyenne de la matrice  $M$  associée au mouvement faiblement compressible (proposition 5), doit être proche de la matrice  $M$  associée au mouvement incompressible (proposition 6).

## Chapter 4

# Mélanges de fluides parfaits

Les résultats des chapitres 2 et 3 peuvent être étendus sans grandes difficultés aux mélanges de fluides parfaits. La vitesse  $v$  devient la vitesse barycentrique et il convient de rajouter, en plus de la conservation de la masse totale  $\varrho$ , la conservation des espèces prises séparément.

### 4.1 Mélange de fluides parfaits compressibles

Pour des raisons de simplicité, nous supposons dans cette section que le mélange peut être caractérisé par deux espèces. Notons  $c$  la fraction massique d'une espèce dans un élément de fluide. La fraction massique de l'autre est alors  $1 - c$ . L'équation de bilan supplémentaire est

$$\frac{\partial(\varrho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho c v) = 0.$$

Si on note  $g_t$  le flot associé à  $v$  par (2.1) alors

$$c(t, x) = c_0(g_t^{-1}(x))$$

où  $c_0$  est le profil initial de  $c$ .

Nous voyons que  $c(t, x)$  est obtenu par une relation identique à celle de l'entropie  $s(t, x)$ . Il est alors facile de voir que tous les résultats obtenus pour le fluide parfait compressible s'étendent sans difficulté au mélange parfait compressible : il suffit de remplacer la quantité  $s$  par le vecteur  $(s, c)$  dans toutes les formules. En particulier, la matrice  $M(t, x)$  de la proposition 5 devient simplement

$$M = \frac{1}{\varrho} \left[ D^2 p - \frac{1}{\varrho \left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{s,c}} (\operatorname{grad} p)' \cdot \operatorname{grad} p \right]$$

où l'équation d'état du fluide donne la fonction  $p(s, c, \varrho)$ . Notons que, pour des raisons de stabilité thermodynamique locale du mélange,  $\left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{s,c}$  reste toujours positif.

### 4.2 Mélange de fluides parfaits incompressibles

L'extension est moins directe que précédemment car la masse volumique  $\varrho$  n'est plus constante et uniforme mais dépend de  $x$  et  $t$ . Ceci implique que la métrique issue de

l'énergie cinétique sur  $\mathcal{D}_\mu$  n'est plus invariante à droite. En effet, aux équations (2.14), il convient d'adjoindre la conservation de la masse totale sous la forme :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho v) = 0.$$

Ce qui implique que  $\varrho(t, x) = \varrho_0(g_t^{-1}(x))$  où  $g_t$  est le flot associé à  $v$ . La métrique sur  $\mathcal{D}_\mu$  pour laquelle  $t \rightarrow g_t$  est une géodésique reste donnée par la restriction à  $\mathcal{D}_\mu$  de celle de  $\mathcal{D}$  (cf. (2.7)) :

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_g = \iint \int_{\Omega} \varrho_0(x) \xi_1(g(x)) \cdot \xi_2(g(x)) dx$$

pour tout vecteur tangent  $\xi_1 \circ g$  et  $\xi_2 \circ g$  en  $g \in \mathcal{D}_\mu$  ( $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}_\mu$ ).

L'existence et l'unicité locale en temps des solutions sont aussi démontrées dans ce cas [15] : il s'agit en fait d'une extension directe des résultats obtenus pour le fluide homogène [12]. Nous reprenons ici les calculs de courbure du chapitre 3 et nous indiquons succinctement comment ils s'étendent.

La dérivée covariante (proposition 7)  $\nabla_{u_1}^\mu u_2$ , de deux champs de vecteurs invariants à droite,  $u_1 : g \rightarrow \xi_1 \circ g$  et  $u_2 : g \rightarrow \xi_2 \circ g$  ( $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}_\mu$ ) n'est plus un champ invariant à droite. Cependant on peut montrer sans difficulté que

$$\nabla_{u_1} u_2 : g \longrightarrow D\xi_2 \xi_1 + \operatorname{grad}\alpha/\varrho_g$$

où  $\varrho_g = \varrho_0(g^{-1}(x))$  et où la fonction  $\alpha$  est telle que  $D\xi_2 \xi_1 + \operatorname{grad}\alpha/\varrho_g$  soit à divergence nulle et tangent au bord.

La formule donnant la courbure (proposition 8) reste quasiment inchangée :

$$\langle R^\mu(u_1, u_2) u_3, u_4 \rangle_g = \iint \int_{\Omega} (\operatorname{grad}\alpha_{1,3} \cdot \operatorname{grad}\alpha_{2,4} - \operatorname{grad}\alpha_{2,3} \cdot \operatorname{grad}\alpha_{1,4}) dx.$$

pour tout vecteur  $u_i = \xi_i \circ g$  tangent à  $\mathcal{D}_\mu$  en  $g$  et où les fonctions  $\alpha_{i,j}$  sont définies par  $D\xi_i \xi_j + \operatorname{grad}\alpha_{i,j}/\varrho_g \in \mathcal{U}_\mu$  pour  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Notons la division par  $\varrho_g$  dans la définition des fonctions  $\alpha_{i,j}$  qui, de ce fait, dépendent effectivement de  $g$ . La preuve de cette formule contient une difficulté supplémentaire. En effet, on ne peut plus utiliser deux fois de suite la formule de la dérivée covariante ci-dessus pour calculer, par exemple,  $\nabla_{u_2} \nabla_{u_1} u_3$ . Même si  $u_1$  et  $u_3$  sont invariants à droite,  $\nabla_{u_1} u_3$  ne l'est pas. Il faut, pour calculer la dérivée covariante de  $\nabla_{u_1} u_3$  par rapport à  $u_2$  revenir à la formule (B.3).

La proposition 6 ainsi que sa preuve restent identiques exceptée la valeur de la trace de la matrice  $M$ .

**Proposition 7** Soient  $v, \xi \in \mathcal{U}_\mu$ . Alors on a

$$\langle R^\mu(v, \xi)v, \xi \rangle_{I_d} \geq \iint \int_{\Omega} \varrho \xi \cdot M\xi dx$$

et

$$\min_{x \in \Omega} [\lambda_{\min}(t, x)] \leq \min_{\substack{\langle \xi, \xi \rangle_{I_d} = 1 \\ \langle \xi, v \rangle_{I_d} = 0}} \langle R^\mu(v, \xi)v, \xi \rangle_{I_d} \leq \min_{x \in \Omega} \left[ \frac{\operatorname{trace}[M(t, x)]}{3} \right]$$

où

- $M$  est la matrice symétrique  $\frac{1}{\rho} D^2 p - Dv' Dv$  dépendant de  $x \in \Omega$  et du temps  $t$  avec la fonction  $p$  (physiquement la pression) définie par  $\text{grad} p / \rho + Dv v$  de divergence nulle et tangente au bord;
- $\text{trace}[M(t, x)] = - \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t, x) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t, x) \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \text{grad} \rho \cdot \text{grad} p$ ;
- $\lambda_{\min}(t, x)$  est la plus petite valeur propre de  $M(t, x)$ .

Compte tenu de la valeur de la trace de  $M$ , un gradient de masse volumique  $\rho$ , dans le même sens que le gradient de pression, semble être un facteur stabilisant pour l'écoulement. En revanche, un gradient de masse volumique, dans un sens contraire au gradient de pression, doit être source d'instabilité, car la courbure admet nécessairement une partie négative.



## Conclusions

La conclusion essentielle de ce rapport peut se résumer ainsi : l'étude de la stabilité lagrangienne du mouvement d'un mélange de fluides parfaits semble se résumer à l'étude des vecteurs propres et valeurs propres d'un champ de matrices symétriques  $M$ . Les matrices  $M$  dépendent a priori du temps et sont calculables à partir des champs de pression  $p$ , de masse volumique  $\varrho$  et de vitesse  $v$  par<sup>1</sup>

$$M = \frac{1}{\varrho} D^2 p - Dv' Dv,$$

lorsque l'écoulement est incompressible et par

$$M = \frac{1}{\varrho} \left[ D^2 p - \frac{1}{\varrho \left. \frac{\partial \varrho}{\partial \rho} \right|_{s=cte}} (\text{grad} p)' \cdot \text{grad} p \right],$$

lorsque l'écoulement est compressible. Si, en un point  $x$  et à l'instant  $t$ ,  $M$  admet une valeur propre négative  $-\kappa^2$  alors une petite perturbation, le long du vecteur propre correspondant à cette valeur propre, aura tendance à s'amplifier de façon exponentielle avec la constante de temps  $\frac{1}{\kappa}$ . Ainsi les valeurs propres négatives de  $M$  donnent les échelles de temps des instabilités et les vecteurs propres associés leurs directions.

Il convient de ne pas oublier que, d'un point de vue strictement mathématique, ces conclusions ne sont pas rigoureuses (cf. dernier paragraphe de l'annexe B) et font appel à une intuition qu'il convient de justifier. Il serait donc intéressant de les tester avec des simulations. Par exemple, avec l'établissement de cartes des propriétés spectrales de  $M$  à partir de simulations d'écoulements parfaits (couche de mélange, ...).

Si notre analyse des instabilités, de leurs échelles de temps et de leurs directions spatiales correspond bien à la réalité physique des écoulements turbulents, il nous faut maintenant voir quels sont les liens avec une description statistique de la turbulence. Ceci relève principalement de la théorie ergodique [18], c'est à dire, de la description probabiliste des régimes asymptotiques de systèmes dynamiques instables. Il nous semble que, si de tels liens existent en mécanique des fluides, ils restent encore à les découvrir et à les exploiter.

---

<sup>1</sup> $D^2 p$  est le hessien de la pression, i.e. la matrice symétrique  $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$ .  $Dv$  est la matrice carrée  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  et  $Dv'$  sa transposée.



# Bibliography

- [1] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, 2nd edition (updated 1985 printing), 1985.
- [2] V. Arnold. *Equations différentielles ordinaires*. Mir, Moscou, 4th edition, 1984.
- [3] V. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir, Moscou, 1976.
- [4] V. Arnold and A. Avez. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [5] V.I. Arnol'd. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier*, 16:319–361, 1966.
- [6] W.M. Boothby. *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic-Press, 1975.
- [7] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, and Ya.G. Sinai. *Ergodic Theory*. Springer, 1982.
- [8] T. Dombre, U. Frisch, J.M. Greene, and M. Hénon. Chaotic Streamlines in the ABC-Flows. *J.F.M.*, 167:353–391, 1986.
- [9] A. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie contemporaine : méthodes et applications, partie I*. Mir, Moscou, 1982.
- [10] P.G. Drazin and W.H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 1982.
- [11] D.G. Ebin. The Motion of Slightly Compressible Fluids Viewed as a Motion With Strong Constraining Force. *Annals of Math.*, 105:141–200, 1977.
- [12] D.G. Ebin and J.E. Marsden. Groups of Diffeomorphisms and the Motion of an Incompressible Fluid. *Annals of Math.*, 92:102–163, 1970.
- [13] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique des fluides*. Mir, Moscou, 2nd edition, 1986.
- [14] E. Mach. *La mécanique*. Hermann, Paris (reprint J. Gabay, Paris, 1987), 1904.
- [15] J.E. Marsden. Well-Posedness of the Equations of a Non-Homogeneous Perfect Fluid. *Comm. in P.D.E.*, 1:215–230, 1976.
- [16] J.J. Moreau. Une méthode de cinématique fonctionnelle en hydrodynamique. *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris*, 2156–2158, nov 1959.

- [17] P. Rouchon. Jacobi Equation, Riemannian Curvature and the Motion of a Perfect Incompressible Fluid. *European Journal of Mechanics /B Fluids*, to appear, 1991.
- [18] D Ruelle. *Chaotic Evolution and Strange Attractors*. Cambridge University Press, 1989.
- [19] D. Ruelle and F. Takens. On the Nature of Turbulence. *Comm. Math. Phys.*, 20:167–192, 1971.
- [20] Y. Yourgrau and S. Mandelstam. *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*. Dover, New-York, 3rd edition, 1979.

# Appendix A

## Notations

Seules les principales notations utilisées lors de l'étude des mouvements fluides sont rappelées.

### Lettres latines

$D$  : opérateur de différentiation par rapport aux coordonnées spatiales, i.e. par rapport à  $x$ .

$\mathcal{D}$  : (notation utilisée dans [12]) ensemble des difféomorphismes réguliers de  $\Omega$  dans lui-même (difféomorphisme : bijection régulière).

div : opérateur de divergence dans l'espace euclidien usuel.

$\mathcal{D}_\mu$  : (notation utilisée dans [12]) ensemble des difféomorphismes réguliers de  $\Omega$  dans lui-même qui préserve le volume euclidien ( $g \in \mathcal{D}_\mu$  équivaut à  $g \in \mathcal{D}$  et  $|Dg| \equiv 1$ ).

$e$  : énergie interne massique, fonction de  $s$  et  $\varrho$ .

grad : gradient dans l'espace euclidien usuel.

**grad** : gradient d'une fonction réelle sur  $\mathcal{D}$  muni de la métrique (2.7); pour la définition du gradient, voir (B.4).

$g_t$  : difféomorphisme de  $\Omega$  dépendant du temps; pour  $x \in \Omega$ ,  $g_t(x)$  est la position à l'instant  $t$  de la particule fluide qui occupait la position  $g_0(x)$  à l'instant  $t = 0$ .

$\dot{g}_t(x)$  : vitesse de l'élément fluide  $x$  :

$$\dot{g}_t(x) = \left. \frac{\partial g_t(x)}{\partial t} \right|_{x \text{ fixé}} = v(t, g_t(x)).$$

$\ddot{g}_t(x)$  : accélération de l'élément fluide  $x$ ;

$$\ddot{g}_t(x) = \nabla_{\dot{g}_t} \dot{g}_t(x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(g_t(x)) = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + Dv v \right) (t, g_t(x)).$$

$h$  : valeur de l'énergie mécanique pour le mouvement considéré.

$H$  : énergie mécanique ( $H = T + U$ ) ou hamiltonien.

**hess** : hessien d'une fonction réelle sur  $\mathcal{D}$  muni de la métrique (2.7); pour la définition du hessien, voir (B.5).

$I_d$  : difféomorphisme identité sur  $\Omega$  ( $I_d(x) = x$ , pour tout  $x \in \Omega$ ).

$L$  : lagrangien ( $L = T - U$ ).

$p$  : pression; pour le fluide compressible,  $p$  est tantôt considérée comme une grandeur thermodynamique et fonction de  $\varrho$  et  $s$  ( $p = p(s, \varrho)$ ), tantôt considérée comme une fonction de  $t$  et  $x$  ( $p = p(t, x)$ ), sachant que  $p(t, x) = p(s(t, x), \varrho(t, x))$ .

$s(t, x)$  : entropie massique en  $x$  à l'instant  $t$ .

$s_0(x)$  : entropie massique initiale en  $x$ .

$t$  : temps physique.

$T$  : énergie cinétique.

$U$  : énergie potentielle.

$\mathcal{U}$  : espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $\Omega$  tangents au bord.

$\mathcal{U}_\mu$  : espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $\Omega$  tangents au bord et à divergence nulle.

$v(t, x)$  : vitesse à l'instant  $t$  de la particule fluide qui se trouve en  $x \in \Omega$  au même instant.

$x$  : élément fluide repéré par sa position initiale notée également  $x$ .

### Lettres grecques

$\delta$  : opérateur de différentiation formelle utilisé en calcul des variations.

$\Delta$  : laplacien  $\Delta = \text{div grad}$

$\varrho(t, x)$  : masse volumique à l'instant  $t$  et en  $x$ .

$\varrho_0(x)$  : masse volumique initiale.

$\tau$  : paramétrage de courbe.

$\theta$  : température.

$\Omega$  : domaine physique occupé par le fluide.

**Divers**

$\vec{i} \cdot \vec{j}$  : produit scalaire euclidien des deux vecteurs de  $R^3$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

$\langle \bullet, \bullet \rangle_g$  : produit scalaire défini par (2.7) sur l'espace tangent à  $\mathcal{D}$  en  $g$ .

$\langle \bullet, \bullet \rangle_g^h$  : produit scalaire défini par (3.4) sur l'espace tangent à  $\mathcal{D}$  en  $g$ .

$\nabla$  : connexion associée à la métrique sur  $\mathcal{D}$  définie par (2.7).

$\nabla^h$  : connexion associée à la métrique sur  $\mathcal{D}$  définie par (3.4).

$\nabla^\mu$  : connexion associée à la métrique sur  $\mathcal{D}_\mu$ , métrique obtenue par restriction à  $\mathcal{D}_\mu$  de celle de  $\mathcal{D}$  définie par (2.7).

$|A|$  : déterminant d'une matrice carrée réelle  $A$ .

$\cdot^{-1}$  : inverse.

$\circ$  : composition d'applications.



## Appendix B

# Rappels de géométrie riemannienne

Les premiers paragraphes du chapitre 2 de [9] abordent de façon simple et suggestive la théorie des surfaces dans  $R^3$  (métrique, courbure, géodésique, ...). L'appendice 1 de [3] constitue une excellente introduction sur la courbure riemannienne. On pourra aussi consulter le livre de Boothby [6] pour un exposé plus détaillé comportant, en particulier, une définition intrinsèque de la connexion de Levi-Civita.

Nous nous contentons ici de rappeler les notions et résultats directement utilisés dans les chapitres 1, 2, 3 et 4. La présentation met volontairement l'accent sur le côté opérationnel et sur le calcul des variations. En effet, nous nous situons à un niveau essentiellement formel puisque les variétés que nous considérons ici sont de dimension infinie.

Soit donc  $\Sigma$  une variété. En général, les traités de géométrie donnent la définition  $\Sigma$  en dimension finie. Lorsque  $\Sigma$  est de dimension infinie, il convient d'en donner une définition fonctionnelle rigoureuse. Nous nous contenterons ici d'une définition plutôt opérationnelle et formelle, définition fondée sur la structure différentiable : pour tout  $q \in \Sigma$ , on sait donner un sens à  $\delta q$  et à  $q + \delta q$ . Ceci revient à définir l'espace vectoriel tangent en  $\Sigma$  à  $q$ ,  $T\Sigma_q$ , auquel appartient  $\delta q$ , et l'application exponentielle qui permet d'identifier un petit morceau de  $\Sigma$  autour de  $q$  à un petit morceau de  $T\Sigma_q$  autour de 0. Tout point  $q'$ , proche de  $q$ , s'écrit, en première approximation,  $q' = q + \delta q$  avec  $\delta q \in T\Sigma_q$ . Une telle définition est clairement incomplète. Elle suppose, en particulier, que l'on sache définir le voisinage d'un point de  $\Sigma$  et la différentiabilité, que nous supposons toujours acquise a priori, pour les objets que nous manipulons.

Cette structure différentiable est suffisante pour calculer la première variation d'une fonction de  $\Sigma$  dans  $R$ . Cependant, elle ne permet pas de calculer la première variation d'un champ de vecteurs  $u : \Sigma \ni q \longrightarrow u(q) \in T\Sigma_q$  car  $u(q)$  appartient à un espace vectoriel  $T\Sigma_q$  qui, a priori, n'est pas fixe mais varie avec  $q$ . Il est alors intéressant de munir  $T\Sigma_q$  d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ . En effet, pour deux champs de vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  sur  $\Sigma$ , on peut considérer la fonction réelle

$$f : q \rightarrow \langle u_1(q), u_2(q) \rangle_q$$

et sa première variation  $\delta f$  le long d'un petit vecteur  $\delta q \in T\Sigma_q$ . Tout comme  $\delta f \in R$ , on veut que  $\delta u_i(q) \in T\Sigma_q$  avec, en plus,

$$\delta f = \delta (\langle u_1(q), u_2(q) \rangle_q) = \langle \delta u_1(q), u_2(q) \rangle_q + \langle u_1(q), \delta u_2(q) \rangle_q .$$

L'opérateur de connexion, dit aussi de dérivée covariante,  $\nabla$ , est le bon opérateur qui permet de rendre les calculs précédents parfaitement bien définis avec  $\delta u_i = \nabla_{\delta q} u_i$ .

On dit alors que  $\Sigma$  munie des produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$  sur  $T\Sigma_q$ ,  $q$  parcourant  $\Sigma$ , est une variété riemannienne. On parle aussi de métrique sur  $\Sigma$ .

La définition de  $\nabla$  repose sur la notion du crochet de deux champs de vecteurs  $u_1$  et  $u_2$ , noté  $[u_1, u_2]$ , notion purement attachée à la structure différentiable de  $\Sigma$ . Le champ de vecteurs  $u_1$  définit, au moins localement en temps, un flot, noté  $\phi_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , sur  $\Sigma$  par intégration de l'équation différentielle  $\dot{q} = u_1(q)$  :

$$\frac{d(\phi_t(q))}{dt} = u_1(\phi_t(q)), \quad \phi_0(q) = q.$$

A chaque instant  $t$ , et pour tout  $q \in \Sigma$ ,  $\phi_t$  admet une application linéaire tangente  $T\phi_t(q)$  qui envoie  $\delta q \in T\Sigma_q$  sur  $\delta\phi_t(q) = T\phi_t(q)\delta q \in T\Sigma_{\phi_t(q)}$ .  $T\phi_t(q)$  est inversible car  $\phi_t$  l'est :  $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ . Alors,  $[u_1, u_2]$  est le champ de vecteurs sur  $\Sigma$  défini par

$$[u_1, u_2](q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( (T\phi_t(q))^{-1} u_2(\phi_t(q)) \right). \quad (\text{B.1})$$

La dérivation en temps est licite car  $(T\phi_t(q))^{-1} u_2(\phi_t(q))$  appartient à l'espace vectoriel fixe  $T\Sigma_q$  quelque soit  $t$ .

Pour une fonction  $f$  de  $\Sigma$  dans  $R$  et un champ de vecteurs  $u$ , on appelle dérivée de Lie de  $f$  selon la direction  $u$  la quantité définie pour  $q \in \Sigma$  par

$$L_u f(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\phi_t(q)) \quad (\text{B.2})$$

( $\phi_t$  est le flot de générateur infinitésimal  $u$ ).  $L_u f(q)$  ne dépend que de  $u(q)$  : si  $v$  est un autre champ de vecteurs tel qu'en un point  $\bar{q} \in \Sigma$ ,  $u(\bar{q}) = v(\bar{q})$  alors  $L_u f(\bar{q}) = L_v f(\bar{q})$ .

Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux champs de vecteurs sur  $\Sigma$ . La dérivée covariante de  $u_1$  par rapport à  $u_2$ ,  $\nabla_{u_2} u_1$ , est l'unique champ de vecteurs tel que

$$2 \langle \nabla_{u_2} u_1, u \rangle = L_{u_1} (\langle u_2, u \rangle) + L_{u_2} (\langle u_1, u \rangle) - L_u (\langle u_1, u_2 \rangle) + \langle [u_1, u_2], u \rangle - \langle [u_1, u], u_2 \rangle - \langle [u_2, u], u_1 \rangle. \quad (\text{B.3})$$

pour tout champ de vecteurs  $u$ . La connexion se caractérise par les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla_{f u_1} u_2 &= f \nabla_{u_1} u_2 \\ \nabla_{u_1 + u_2} u &= \nabla_{u_1} u + \nabla_{u_2} u \\ \nabla_{u_1} (f u_2) &= f \nabla_{u_1} u_2 + (L_{u_1} f) u_2 \\ \nabla_u (u_1 + u_2) &= \nabla_u u_1 + \nabla_u u_2 \\ \nabla_{u_1} u_2 - \nabla_{u_2} u_1 &= [u_1, u_2] \\ L_u (\langle u_1, u_2 \rangle) &= \langle \nabla_u u_1, u_2 \rangle + \langle u_1, \nabla_u u_2 \rangle \end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs  $u_1, u_2, u$  et pour toute fonction  $f$  de  $\Sigma$  dans  $R$ .

Le gradient d'une fonction  $f$  de  $\Sigma$  dans  $R$ ,  $\mathbf{grad} f$ , est le champ de vecteurs caractérisé par

$$\forall q \in \Sigma, \forall u \in T\Sigma_q, \quad \langle \mathbf{grad} f(q), u \rangle_q = L_u f(q). \quad (\text{B.4})$$

Le hessien de  $f$ ,  $\mathbf{hess} f$ , est un champ de formes quadratiques sur  $\Sigma$  : pour tout champ de vecteurs  $u_1$  et  $u_2$

$$\mathbf{hess} f (u_1, u_2) = L_{u_1} (\langle \mathbf{grad} f, u_2 \rangle) - \langle \mathbf{grad} f, \nabla_{u_1} u_2 \rangle = \mathbf{hess} f (u_2, u_1). \quad (\text{B.5})$$

Le tenseur de courbure  $R(u_1, u_2)u_3$  s'exprime, en fonction de la dérivée covariante, par

$$R(u_1, u_2)u_3 = \nabla_{u_2} \nabla_{u_1} u_3 - \nabla_{u_1} \nabla_{u_2} u_3 - \nabla_{[u_1, u_2]} u_3 \tag{B.6}$$

Il est tout à fait remarquable que la valeur du champ  $R(u_1, u_2)u_3$  en  $q$  ne dépende que des valeurs des  $u_i$  en  $q$  : si  $v_i$  sont d'autres champs de vecteurs coïncidant avec les  $u_i$  en  $\bar{q}$  ( $v_i(\bar{q}) = u_i(\bar{q})$ ) alors  $R(u_1, u_2)u_3(\bar{q}) = R(v_1, v_2)v_3(\bar{q})$ .

La courbure dite sectionnelle,  $K(u_1, u_2)$ , associé au plan tangent en  $q$  engendré par les vecteurs unitaires et orthogonaux de  $u_1$  et  $u_2$  de  $T\Sigma_q$ , est donnée par

$$K(u_1, u_2) = \langle R(u_1, u_2)u_1, u_2 \rangle_g. \tag{B.7}$$

Soit  $[a, b] \ni t \rightarrow q(t) \in \Sigma$  une courbe tracée sur  $\Sigma$  ( $a < b$ ). On note  $q_a = q(a)$  et  $q_b = q(b)$ . L'élément de longueur  $dl$  vaut  $\sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle_q} dt$  et la longueur de la courbe vaut  $\int_a^b \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle_q} dt$ .

$t \rightarrow q(t)$  est une géodésique si, par définition, elle est une extrémale du problème de minimisation :

$$\min_{\substack{\text{courbes } t \rightarrow \gamma(t) \text{ tq.} \\ q_a = \gamma(a) \text{ et } q_b = \gamma(b)}} \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\gamma(t)}} dt. \tag{B.8}$$

Un simple calcul des variations montre que la condition d'extrémalité est

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = 0. \tag{B.9}$$

On dit que la vitesse  $\dot{q}$  se transporte parallèlement à elle même. D'après la définition, une géodésique est caractérisée par son point de départ, son point d'arrivée et la durée  $b - a$ . On peut aussi la définir par son point de départ et sa vitesse initiale (cela revient à prendre  $q_a$  et  $q_b$  très proches). Ceci est cohérent avec l'équation différentielle (B.9) qui est, en fait, une équation du second ordre.

L'écart entre deux géodesiques voisines, i.e. démarrant de points voisins avec des vitesses voisines,  $t \rightarrow q(t)$  et  $t \rightarrow q'(t)$ , est mesuré, au premier ordre, par un champ de vecteurs,  $t \rightarrow \xi(t) \in T\Sigma_{q(t)}$ , le long de la géodésique de référence, ici  $t \rightarrow q(t)$ .  $\xi$  satisfait l'équation différentielle linéaire suivante, dite équation de Jacobi :

$$\frac{D^2 \xi}{Dt^2} = -R(\dot{q}, \xi) \dot{q} \tag{B.10}$$

où l'opérateur  $\frac{D}{Dt} = \nabla_{\dot{q}}$  est compatible avec la métrique :  $\frac{d}{dt} \langle \xi, \xi \rangle_q = 2 \langle \frac{D\xi}{Dt}, \xi \rangle_q$ .

Pour une discussion de la stabilité de l'équation de Jacobi, nous renvoyons le lecteur à l'appendice 1 de [3], page 310 : il y aurait intuitivement divergence exponentielle de deux géodésiques voisines lorsque la courbure dans toute section comportant  $\dot{q}$  admet une partie négative. Remarquons qu'un seul cas est entièrement clair : l'instabilité exponentielle du flot des géodésiques sur une variété compacte à courbure strictement négative et l'ergodicité du flot des géodésiques [4, 7]. Le cas intermédiaire où la courbure admet des parties négatives et positives est loin d'être entièrement compris même pour les variétés compactes<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Nous tenons cette information d'une conversation téléphonique avec le professeur Pansu, spécialiste de géométrie riemannienne à l'université d'Orsay.

Comme l'opérateur  $\xi \rightarrow R(\dot{q}, \xi)\dot{q}$  est symétrique, il est clair que le signe de  $K(\xi, \dot{q})$ , lorsque  $\xi$  parcourt l'orthogonal de  $\dot{q}$  dans  $T\Sigma_q$ , donne des informations sur le signe des valeurs propres de cet opérateur : s'il existe  $\xi^-$  tel que  $K(\xi^-, \dot{q}) < 0$  alors  $R(\dot{q}, \cdot)\dot{q}$  admet au moins une valeur propre négative notée  $-\lambda^2$ . Notant  $u_\lambda$  le vecteur propre correspondant de module 1 et  $x_\lambda$  le produit scalaire de  $\xi$  avec  $u_\lambda$ , on serait tenté d'affirmer que  $\ddot{x}_\lambda = -\lambda^2 x_\lambda$ . Ceci est faux car, en général,  $u_\lambda$  ne se transporte pas parallèlement le long de la géodésique :  $\nabla_{\dot{q}} u_\lambda \neq 0$ . De plus, même si c'est le cas,  $\lambda$  dépend, a priori, du temps et l'on ne peut conclure à l'instabilité sans une analyse complémentaire, comme le montre l'exemple du pendule où la position d'équilibre supérieure peut être stabilisée lorsque le point de suspension oscille verticalement de façon suffisamment rapide (cf. [2], exercice 2, page 262).

Pour ce qui nous concerne, nous nous en tiendrons à ce que suggère Arnol'd [3] dans le paragraphe "Discussion" de l'appendice 2, à savoir : une partie négative dans la courbure est le signe d'une instabilité ; une estimation  $-\kappa^2$  de cette partie négative entraîne, pour une géodésique parcourue à la vitesse  $\|\dot{q}\| = 1$ , une divergence exponentielle du module de  $\xi$ , i.e. de la distance entre  $q(t)$  et  $q'(t)$ , avec une constante de temps approximativement égale à  $1/\kappa$ . L'essentiel des conclusions issues de ce rapport et relatives à la stabilité lagrangienne des écoulements repose sur cet a priori.