

# SIMULATION DYNAMIQUE ET COMMANDE NON LINÉAIRE DES COLONNES À DISTILLER

Thèse présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par  
Pierre ROUCHON

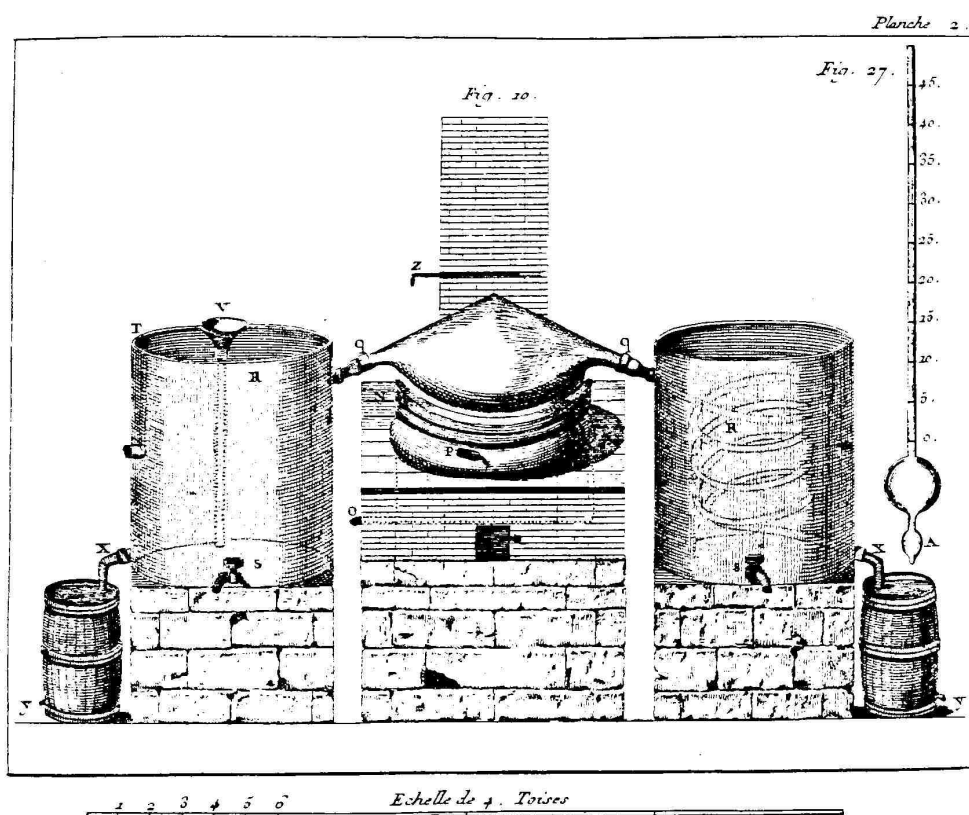
en vue de l'obtention du titre de

Docteur en Génie des Procédés,  
Physico-Chimie des Transformations Physiques,  
Chimiques, et Biologiques des Matières Premières.

Soutenue publiquement le 21 mars 1990, devant le jury composé de :

MM.	R.W.H. SARGENT	Président
	G. BORNARD	Rapporteur
	M. FLIESS	Rapporteur
	J. BORDET	Examinateur
	J. LAFORET	Examinateur
	J. LÉVINE	Examinateur
	H. RENON	Examinateur

Cette thèse s'inscrit dans le prolongement lointain d'anciens travaux, comme ceux, du pharmacien et académicien Antoine Baumé, portant sur l'art et la manière de bien distiller et dont voici un aperçu :



A. Baumé. *Mémoire sur la meilleure manière de construire les alambics et fourneaux propres à la distillation des vins pour en tirer les eaux-de-vie*. Paris : Didot jeune, 1778<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Un exemplaire de cet ouvrage se trouve à la bibliothèque de l'École des Mines de Paris.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur R.W.H. Sargent pour avoir accepté de présider ce jury de thèse, ainsi que les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à ce travail.

Que Monsieur le Professeur H. Renon, Directeur du Centre Réacteurs et Processus, qui m'a accueilli pour ce travail, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie tout particulièrement Monsieur J. Lévine de la Section Automatique du Centre d'Automatique et d'Informatique pour l'aide et les conseils qu'il m'a apportés tout au long de cette recherche.

Je suis également très reconnaissant à Monsieur Y. Creff de la Section Automatique du Centre d'Automatique et d'Informatique pour le travail qu'il a effectué dans le cadre d'une double collaboration, d'une part entre deux centres de l'École des Mines et d'autre part entre l'École des Mines et la société ELF-FRANCE.

Je voudrais également remercier Monsieur C. Albaret de la Section Automatique du Centre d'Automatique et d'Informatique pour ses connaissances informatiques précieuses dont j'ai bénéficié et Monsieur P. Duchêne du Centre Réacteurs et Processus pour l'ensemble de ses suggestions et de ses commentaires relatifs, entre autres, à la rédaction de cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes du Centre Réacteurs et Processus et de la Section Automatique du Centre d'Automatique et d'Informatique qui, par des cours, par des séminaires, par des discussions et par leur gentillesse ont su me faire profiter de leur expérience et de leurs connaissances.

Je tiens à remercier les personnes de l'École des Mines qui ont fait preuve de bienveillance et de compréhension à mon égard, et tout particulièrement les personnes de la bibliothèque qui m'ont apporté une aide précieuse dans mes recherches bibliographiques, parfois relatives à des ouvrages anciens.

J'adresse également mes remerciements à toutes les personnes de la société ELF-FRANCE qui ont cru et participé au projet COLBIN, particulièrement à Monsieur H. Gilles pour son soutien actif et à Messieurs J.P. Beauchêne, F. Djenab et A. Douaud pour leurs contributions astucieuses et des plus utiles au cours du développement et de l'utilisation du logiciel de commande en temps-réel COLBIN.



# Résumé

Le problème principal abordé dans cette thèse est la commande en qualité des colonnes à distiller. Les modèles de commande utilisés sont construits à partir de modèles dynamiques classiques issus d'une analyse physique. La méthode de construction repose sur une réduction par échelle de temps de ces derniers. Cette réduction a pour but de ne conserver que les phénomènes lents. Sur ces modèles réduits, nous appliquons des techniques de rejet de perturbations par retour non linéaire de l'état. Les lois de commande obtenues sont testées en simulation sur des modèles dynamiques de colonne, décrits par des systèmes algébro-différentiels d'index 1, nettement plus complets que les modèles de commande. Cette étude en simulation montre, pour une colonne binaire de 42 plateaux et pour une colonne multi-composés de 32 plateaux, la robustesse et l'intérêt de ces lois non linéaires de commande. La mise en œuvre sur deux colonnes de raffinerie confirme ces résultats. Elle montre également que l'instrumentation des colonnes et la puissance des ordinateurs de conduite sont suffisantes pour un calcul en ligne de ces lois non linéaires de commande.

Un problème important, dont nous avons pris conscience lors de l'étude en simulation, concerne la résolution numérique des systèmes algébro-différentiels. En nous appuyant sur des résultats récents relatifs à l'inversion de systèmes dynamiques, nous étendons les notions d'index et de forme canonique, notions définies uniquement en linéaire et cependant très utilisées pour analyser la convergence des schémas numériques de résolution, aux systèmes algébro-différentiels non linéaires implicites. Nous proposons également un algorithme formel et explicite de réduction d'index, afin de transformer des systèmes d'index élevés pour lesquels les méthodes de résolution numériques font défaut, en systèmes d'index 1 pour lesquels existent des méthodes de résolution numérique performantes.



# Contents

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>I Simulation dynamique</b>	<b>11</b>
<b>Préliminaires bibliographiques</b>	<b>13</b>
<b>1 Un modèle dynamique de colonne</b>	<b>15</b>
1.1 Le modèle dynamique d'un plateau . . . . .	15
1.1.1 Les hypothèses . . . . .	15
1.1.2 Les équations . . . . .	16
1.1.3 Le modèle thermodynamique de Soave . . . . .	17
1.1.4 Le modèle hydrodynamique . . . . .	19
1.2 Le modèle dynamique de la colonne . . . . .	24
1.2.1 Le ballon de reflux . . . . .	24
1.2.2 Le fond de la colonne . . . . .	26
1.2.3 La colonne entière . . . . .	28
1.2.4 La résolution numérique avec SPEEDUP . . . . .	29
1.2.5 Données de simulation du dépropaniseur . . . . .	30
1.2.6 Données de simulation du débutaniseur . . . . .	31
1.3 Liste des symboles . . . . .	33
<b>2 Systèmes algébro-différentiels et simulation</b>	<b>37</b>
2.1 Position du problème . . . . .	37
2.2 Systèmes algébro-différentiels et inversion . . . . .	41
2.3 Index et forme canonique . . . . .	44
2.4 Problème de la condition initiale . . . . .	54
2.5 Index et méthodes numériques d'intégration . . . . .	55
2.6 Un algorithme formel explicite de réduction d'index . . . . .	60

<b>II</b>	<b>Commande en qualité des colonnes à distiller</b>	<b>67</b>
	<b>Préliminaires bibliographiques</b>	<b>69</b>
<b>3</b>	<b>Les colonnes binaires</b>	<b>79</b>
3.1	Construction de modèles de commande . . . . .	79
3.1.1	Le modèle de connaissance (L,V) . . . . .	79
3.1.2	Agrégation par échelle de temps du modèle (L,V) . . . . .	87
3.1.3	Deux modèles de commande . . . . .	100
3.2	Le rejet de perturbations avec stabilité . . . . .	104
3.2.1	Le rejet de perturbations sur le modèle en 5 compartiments . . . . .	105
3.2.2	Le rejet de perturbations sur le modèle en 3 compartiments . . . . .	112
3.2.3	Conclusions . . . . .	114
3.3	Simulations . . . . .	116
3.3.1	Les paramètres de réglage des deux lois de commande . . . . .	116
3.3.2	Rejet asymptotique et robustesse . . . . .	117
3.3.3	Influence des paramètres de réglage . . . . .	124
3.3.4	Comparaison avec d'autres méthodes de commande . . . . .	127
<b>4</b>	<b>Les colonnes pseudo-binaires</b>	<b>135</b>
4.1	Construction de modèles non linéaires de commande . . . . .	135
4.1.1	Le modèle de connaissance (L,V) . . . . .	135
4.1.2	Agrégation par échelle de temps du modèle (L,V) . . . . .	138
4.1.3	Deux modèles de commande . . . . .	139
4.2	Calcul des lois de commande . . . . .	142
4.2.1	Le rejet de perturbations sur le modèle en 5 compartiments . . . . .	143
4.2.2	Le rejet de perturbations sur le modèle en 3 compartiments . . . . .	146
4.3	Simulations . . . . .	148
4.3.1	Les paramètres de réglage . . . . .	149
4.3.2	Rejet asymptotique et robustesse . . . . .	150
<b>5</b>	<b>Mise en œuvre industrielle</b>	<b>157</b>
5.1	Les résultats sur site. . . . .	157
5.1.1	Le dépropaniseur en boucle fermée . . . . .	157
5.1.2	Le débutaniseur en boucle fermée . . . . .	158
5.1.3	Remarque autour de la précision . . . . .	164
5.1.4	Conclusion . . . . .	164
5.2	Le logiciel de commande COLBIN . . . . .	170
5.2.1	Organisation du programme COLBIN . . . . .	171
5.2.2	Une procédure d'installation . . . . .	171



<i>CONTENTS</i>	5
<b>Conclusion</b>	<b>175</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>176</b>
<b>Annexes</b>	<b>183</b>
<b>A Inversion et commande</b>	<b>187</b>
A.1 L'algorithme d'inversion . . . . .	187
A.1.1 L'inversion de systèmes dynamiques . . . . .	187
A.1.2 Le cas où $y = 0$ et $w = 0$ . . . . .	188
A.1.3 L'algorithme dans le cas général . . . . .	190
A.2 Le rejet de perturbations . . . . .	193
A.2.1 Rappels préliminaires . . . . .	193
A.2.2 Une condition suffisante d'existence . . . . .	194
A.2.3 Stabilité en boucle fermée et dynamique des zéros . . . . .	196
A.3 Exemple d'un réacteur chimique . . . . .	197
A.3.1 Calcul de la loi de commande . . . . .	198
A.3.2 Stabilité en boucle fermée . . . . .	198
<b>B La commande géométrique de colonnes</b>	<b>201</b>
B.1 La commande linéaire géométrique . . . . .	201
B.2 La commande non linéaire géométrique . . . . .	202
<b>C Stabilité dynamique d'un flash</b>	<b>207</b>
<b>D Résultats de la littérature</b>	<b>217</b>
D.1 Etude de Rosenbrock . . . . .	217
D.2 Matrice de Jacobi . . . . .	218
D.3 Théorème de Tikhonov . . . . .	219



# Introduction

Le contrôle en qualité des colonnes à distiller est un problème très étudié sans toutefois être résolu en pratique de façon satisfaisante [59]. Pour une colonne pseudo-binaire qui sépare un mélange en une partie légère, le distillat, et une partie lourde, le résidu, l'objectif consiste généralement à maintenir constantes la teneur en composés légers du résidu et la teneur en composés lourds du distillat, malgré les variations de l'alimentation de la colonne (débit et qualité). Cet objectif correspond à une utilisation minimale du pouvoir de séparation de la colonne, une fois fixées ces deux teneurs en impuretés. Plusieurs études récentes [12, 78] estiment en effet que les gains énergétiques d'une conduite automatique par rapport à une conduite manuelle dépassent 10 %. A cela s'ajoutent des augmentations de productivité (débits traités plus importants, moins de pertes de produits hors spécification) et une flexibilité accrue du procédé (changement automatique de consignes).

Dans cette thèse, nous abordons ce problème de commande en utilisant des méthodes de rejet de perturbations par retour non linéaire de l'état [38]. Les principaux résultats concernant la commande et présentés ici constituent une synthèse des publications [47, 48]. Ils se situent dans le prolongement des résultats déjà obtenus par Takamatsu et al. [91] dans le cadre linéaire et Gauthier et al. [25] dans le cadre non linéaire. Cependant, contrairement à ces auteurs, nous n'utilisons pas directement le modèle issu de la physique : avant de calculer la loi de commande, nous réduisons le modèle physique afin de ne conserver que les transitoires lents. Les lois de commandes obtenues sont des fonctions non linéaires de l'état. Reposant sur des modèles lents, elles rejettent asymptotiquement les perturbations et donnent des réponses aux variations de consignes beaucoup plus "régulières" qu'avec la commande utilisant le modèle physique complet . En particulier, contrairement à [25], elles ne présentent pas de singularité dans la plage de fonctionnement considérée. De plus, nous montrons que cette réduction s'accompagne d'une augmentation de robustesse par rapport aux dynamiques non modélisées et par rapport aux retards sur les mesures de l'état de la colonne, partiellement fourni en pratique par les analyseurs de composition et les températures internes.

Nous avons testé ces lois de commandes en simulation sur des modèles nettement plus complexes que les modèles non linéaires de commande. Ces modèles de simulation sont décrits par des systèmes algèbro-différentiels de grande dimension et de structure creuse. Lors de la construction du modèle de simulation, nous avons été particulièrement attentifs aux problèmes d'index et de résolution numérique. En effet, la résolution numérique

d'un système algébro-différentiel n'est pas aussi simple que la résolution numérique d'un système différentiel ordinaire pour lequel existent de nombreux schémas de discrétisation. Comme le montre Petzold [66], les méthodes classiques d'intégration, comme la méthode de Gear, convergent si le système algébro-différentiel est directement, par des manipulations purement algébriques, réductible à un système différentiel ordinaire (ces systèmes sont dits d'index 0 ou 1), et, en général, ne convergent pas dans les autres cas. C'est pourquoi nous avons construit notre modèle de simulation de façon à ce qu'il soit d'index 1, en utilisant un modèle hydraulique à la fois physique et structurellement adapté. L'intégration numérique de notre modèle de simulation est conduite par la méthode de Gear [26, 27] grâce au logiciel SPEEDUP développé par l'Imperial College de Londres [72].

Pour d'autres systèmes, il n'est pas possible, en général, de se ramener à un système d'index 1 et ainsi d'éviter les problèmes numériques de résolution. La notion d'index, qui conditionne la résolution numérique par des méthodes classiques, n'est définie clairement que dans le cas où ce dernier est linéaire. Cependant plusieurs auteurs [28, 29, 63] évoquent explicitement cette notion pour un système quelconque. Aussi, il nous est apparu utile de la définir rigoureusement pour les systèmes non linéaires.

Cette étude aborde deux sujets : la simulation dynamique de procédés décrits par des systèmes algébro-différentiels d'une part et la commande en qualité des colonnes à distiller d'autre part. Ces deux sujets se complètent car la simulation dynamique permet d'analyser la robustesse et la performance d'algorithmes de commande. Notre présentation s'appuie donc sur une organisation en deux parties.

La première partie présente un modèle dynamique de simulation de colonnes à distiller structurellement d'index 1, et aborde, de façon plus générale, les questions d'index et de formes canoniques des systèmes algébro-différentiels non linéaires implicites.

La seconde partie traite de la commande en qualité. Après quelques rappels bibliographiques, nous présentons de façon rigoureuse la réduction par échelle de temps et la commande non linéaire de colonnes binaires par la méthode du rejet des perturbations. Une étude en simulation, dans le cas d'un dépropaniseur, illustre la robustesse et compare les lois de commande obtenues avec d'autres, publiées dans la littérature. Puis, nous étendons, de façon heuristique et formelle, les lois de commande obtenues pour les colonnes binaires, aux colonnes multi-composés dites pseudo-binaires. Une étude en simulation montre numériquement, pour un débutaniseur, que cette extension heuristique présente un réel intérêt. Enfin, nous présentons l'implantation sur un dépropaniseur et sur un débutaniseur de raffinerie de ces lois non linéaires de commande.

Nous avons regroupé en annexe certains développements parfois techniques et utilisés dans les deux parties précédentes. L'annexe A est consacrée à des résultats relatifs à la commande des systèmes non linéaires. Nous y rappelons un algorithme d'inversion de systèmes dynamiques, la méthode du rejet des perturbations, les problèmes de stabilité en boucle fermée et la notion de dynamique des zéros. L'annexe B reprend les résultats obtenus par Takamatsu et al. [91] en linéaire et Gauthier et al. [25] en non linéaire, sur l'application des méthodes de rejet de perturbations aux colonnes à dis-

tiller. L'annexe C montre, à partir de considérations issues de la thermodynamique des phénomènes irréversibles [31], que les notions de stabilité thermodynamique et dynamique coïncident pour un ballon de flash. Enfin, l'annexe D regroupe des résultats disparates.



# Part I

## Simulation dynamique





# Préliminaires bibliographiques

La simulation dynamique de colonnes à distiller comporte essentiellement deux aspects : d'une part l'élaboration de modèles dynamiques fondés sur une connaissance des phénomènes physico-chimiques et d'autre part les méthodes de résolution numérique des équations du modèle.

Les modèles dynamiques de colonnes à distiller sont bien connus. Dans un article rétrospectif [37], Holland rappelle que le comportement dynamique de colonnes à plateaux se représente généralement sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires (principalement les équations de bilan) et d'équations algébriques (les relations d'équilibre thermodynamique entre phases, les corrélations hydrodynamiques,...) qui constituent donc un système algébro-différentiel. Holland rappelle également que les méthodes numériques utilisées pour résoudre de tels modèles sont celles utilisées pour les équations différentielles ordinaires. Toujours selon Holland, deux classes de méthodes numériques se dégagent : la méthode de Gear [26, 27] et la méthode semi-implicite de Runge-Kutta modifiée par Michelsen [56]. Dans [18], Feng et al montrent, pour les colonnes à distiller, que la méthode de Gear possède des performances numériques supérieures à la méthode semi-implicite de Runge-Kutta.

En 1982, Petzold [66] souligne cependant que les systèmes algébro-différentiels peuvent être très différents des systèmes d'équations différentielles ordinaires et que de sérieuses difficultés peuvent apparaître lors de leur résolution numérique. Afin de caractériser les cas où des problèmes numériques peuvent apparaître, Petzold utilise la notion d'index définie par Sincovec et al. [81] dans le cas où le système est linéaire. Depuis, plusieurs auteurs ont travaillé sur ce sujet. Cependant, dans [68], Petzold montre que, pour des systèmes d'index supérieur ou égal à 3, les méthodes numériques de résolution font défaut.

Aussi, l'élaboration de modèles dynamiques complets de colonnes est une question classique et quasiment résolue. En revanche, la résolution numérique du système algébro-différentiel que l'on obtient peut, dans certains cas, poser des difficultés comme le montrent Gritsis et al. [32] dans une étude récente sur des modèles dynamiques de distillation.

Le premier chapitre présente un modèle dynamique de colonne à distiller pour lequel les problèmes d'intégration par la méthode de Gear ne se posent pas a priori. Ce modèle de simulation diffère de celui proposé par Gallun et Holland [22] uniquement par le modèle thermodynamique : compte tenu des colonnes que nous allons ainsi décrire, un dépropaniseur et un débutaniseur de raffinerie, nous utilisons le modèle thermodynamique

de Soave [88]. Le second chapitre aborde, avec des résultats empruntés à la théorie de la commande non linéaire et rappelés dans l'annexe A, les problèmes mathématiques et numériques liés aux systèmes algébro-différentiels et à la notion d'index.

# Chapter 1

## Un modèle dynamique de colonne

Nous présentons dans ce chapitre un modèle de simulation. Ce modèle est discret (nous ne considérons pas de variables spatiales continues) et s'inspire largement de ceux disponibles dans la littérature [22, 71, 23]. Ce modèle ne prétend pas décrire toutes les colonnes à distiller existantes. Néanmoins, il permet de représenter correctement les colonnes classiques comme celles qui sont étudiées dans cette thèse.

Nous commençons tout d'abord par écrire les équations d'un plateau et puis celles d'une colonne entière. Les notations introduites sont regroupées en fin de chapitre dans la section 1.3.

### 1.1 Le modèle dynamique d'un plateau

#### 1.1.1 Les hypothèses

Nous considérons le plateau  $j$  représenté sur la figure 1.1 de la page 22. Les hypothèses de modélisation sont classiques (cf. [22] par exemple) :

- le liquide sur le plateau et le liquide dans le déversoir sont homogènes ; leurs compositions et leurs températures sont identiques ; la vapeur sur le plateau est homogène ; le liquide et la vapeur sont à l'équilibre thermodynamique ; les grandeurs thermodynamiques du liquide et de la vapeur sont calculées par le modèle de Soave [88] (voir la section sur le modèle de Soave ci-dessous) ;
- les parois du plateau sont adiabatiques ;
- le modèle hydrodynamique est en fait hydrostatique ; il est fondé sur les corrélations présentées par Van-Winkle [93] et reprises par Gallun et Holland [22] ; ce modèle permet de relier les rétentions et pressions aux débits.

Ces hypothèses peuvent être modifiées de façon à prendre en compte les écarts à l'équilibre thermodynamique (efficacité), les fuites thermiques et les capacités calorifiques

des matériaux constitutifs du plateau. Ces modifications introduisent des paramètres supplémentaires en général mal connus. Aussi nous nous sommes contentés des hypothèses précédentes. Elles font déjà appel à un nombre respectable de paramètres pas toujours très bien connus. De plus, pour le calcul des régimes stationnaires, ces hypothèses sont couramment utilisées par les ingénieurs (cf. les logiciels de simulation statique ASPEN-PLUS ou PROCESS). Pour le calcul des régimes transitoires, elles prennent en compte des effets purement dynamiques importants liés aux rétentions liquides dans le déversoir et sur le plateau (qui sont variables ainsi que la pression). Enfin, pour le dépropaniseur et le débutaniseur que nous voulons modéliser, ces hypothèses ne sont pas trop restrictives.

### 1.1.2 Les équations

Le modèle dynamique du plateau  $j$  est formé par les équations différentielles de bilan matière et énergie et les équations algébriques d'équilibres liquide-vapeur et hydrauliques. Nous obtenons ainsi le système algèbro-différentiel suivant (liste des symboles, page 33) :

pour  $i = 1, \dots, c$  :

$$\frac{dN_j^i}{dt} = L_{j-1}^i + V_{j+1}^i - L_j^i - V_j^i \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_j}{dt} = & h_l(L_{j-1}, T_{j-1}, P_{j-1}) \sum_{i=1}^c L_{j-1}^i + h_v(V_{j+1}, T_{j+1}, P_{j+1}) \sum_{i=1}^c V_{j+1}^i \\ & - h_l(L_j, T_j, P_j) \sum_{i=1}^c L_j^i - h_v(V_j, T_j, P_j) \sum_{i=1}^c V_j^i \end{aligned} \quad (1.2)$$

pour  $i = 1, \dots, c$  :

$$N_j^i = \frac{V_j^{liq}}{v_l(L_j, T_j, P_j)} \frac{L_j^i}{\sum_{k=1}^c L_j^k} + \frac{V_j^{tot} - V_j^{liq}}{v_v(V_j, T_j, P_j)} \frac{V_j^i}{\sum_{k=1}^c V_j^k} \quad (1.3)$$

$$U_j = \frac{V_j^{liq}}{v_l(L_j, T_j, P_j)} u_l(L_j, T_j, P_j) + \frac{V_j^{tot} - V_j^{liq}}{v_v(V_j, T_j, P_j)} u_v(V_j, T_j, P_j) \quad (1.4)$$

pour  $i = 1, \dots, c$  :

$$0 = \mu_l^i(L_j, T_j, P_j) - \mu_v^i(V_j, T_j, P_j) \quad (1.5)$$

$$P_{j+1} - P_j = \Delta_P^{liq,j}(z_j, L_j, T_j, P_j, L_{j+1}, V_{j+1}, T_{j+1}, P_{j+1}) \quad (1.6)$$

$$P_{j+1} - P_j = \Delta_P^{vap,j}(L_j, V_j, T_j, P_j, V_{j+1}, T_{j+1}, P_{j+1}) \quad (1.7)$$

$$V_j^{liq} = \mathcal{V}^{liq,j}(z_j, L_j, V_j, T_j, P_j). \quad (1.8)$$

Les inconnues du plateau  $j$  sont

$$N_j = (N_j^i)_{i=1,\dots,c}, \quad U_j, \quad L_j = (L_j^i)_{i=1,\dots,c}, \quad V_j = (V_j^i)_{i=1,\dots,c}, \\ T_j, \quad P_j, \quad V_j^{liq}, \quad z_j.$$

Les grandeurs obtenues à partir du modèle thermodynamique sont

$$v_l(L_j, T_j, P_j), \quad v_v(V_j, T_j, P_j), \quad u_l(L_j, T_j, P_j), \quad u_v(V_j, T_j, P_j), \\ h_l(L_j, T_j, P_j), \quad h_v(V_j, T_j, P_j), \quad (\mu_l^i(L_j, T_j, P_j))_{i=1,\dots,c}, \quad (\mu_v^i(V_j, T_j, P_j))_{i=1,\dots,c}.$$

Les grandeurs obtenues à partir du modèle hydraulique sont

$$\Delta_P^{liq,j}(z_j, L_j, T_j, P_j, L_{j+1}, V_{j+1}, T_{j+1}, P_{j+1}), \quad \Delta_P^{vap,j}(L_j, V_j, T_j, P_j, V_{j+1}, T_{j+1}, P_{j+1}), \\ \mathcal{V}^{liq,j}(z_j, L_j, V_j, T_j, P_j).$$

Les équations (1.1) représentent les  $c$  équations de conservation de la matière. (1.2) est l'équation de conservation de l'énergie<sup>1</sup>.

(1.3) et (1.4) permettent de calculer les quantités de matière et d'énergie accumulées à partir des compositions, des volumes, de la température et de la pression. (1.5) traduit l'équilibre thermodynamique entre le liquide et la vapeur. (1.6), (1.7) et (1.8) font intervenir le modèle hydraulique décrit plus loin et fournissent le volume de rétention liquide et la pression sur le plateau en fonction des débits, compositions et températures.

### 1.1.3 Le modèle thermodynamique de Soave

Nous avons choisi ce modèle thermodynamique car, par la suite, nous nous intéressons à des mélanges d'hydrocarbures légers et non polaires. Dans [88], Soave présente son équation d'état. Elle donne directement les volumes molaires et par intégration de relations classiques en thermodynamique, les potentiels chimiques et l'enthalpie molaire. Nous nous contentons ici de rappeler les formules pour les fonctions  $\mu_l^i$ ,  $h_l$ ,  $u_l$ ,  $v_l$ ,  $\mu_v^i$ ,  $h_v$ ,  $u_v$ ,  $v_v$  intervenant dans les équations (1.1) à (1.5).

Dans cette section uniquement, nous notons  $T$  la température,  $P$  la pression,  $v$  le volume molaire,  $(\mu^i)_{i=1,\dots,c}$  les potentiels chimiques,  $h$  l'enthalpie molaire,  $u$  l'énergie molaire.

<sup>1</sup> Beaucoup d'auteurs utilisent une équation de conservation où intervient la quantité d'enthalpie accumulée au lieu de la quantité d'énergie totale. Si la pression et le volume total sont constants, leur équation est bien sûr équivalente à la nôtre. Cependant, comme la pression dépend généralement du temps, leur équation n'est pas correcte : la présence des flux enthalpiques dans le second membre (prise en compte du travail des forces de pression) à la place des flux d'énergie, incline faussement à penser que l'enthalpie est conservée. Cependant cette erreur ne semble pas entraîner de conséquences importantes pour la simulation. En effet, nous avons comparé, dans le cas du débutaniseur décrit plus loin, les deux modèles, celui avec conservation de l'enthalpie et celui avec conservation de l'énergie totale : les différences que nous avons pu observer sont faibles et de l'ordre de grandeur des erreurs introduites par les méthodes utilisées pour l'intégration numérique.

Soit  $T_C^i$  la température critique,  $P_C^i$  la pression critique et  $\omega^i$  le coefficient acentrique du composé  $i$ . Comme nous supposons que le modèle de Soave est valable aussi bien pour le liquide que pour la vapeur, nous notons génériquement  $z = (z^i)^{i=1,\dots,c}$  la composition, soit du liquide, soit de la vapeur. L'équation d'état du modèle de Soave s'écrit

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v(v+b)}, \quad (1.9)$$

où

- $R$  est la constante des gaz parfaits,
- $a$  est donné par

$$a = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^c a_{i,j} z^i z^j,$$

avec

$$a_{i,j} = \sqrt{a_{i,i} a_{j,j}} (1 - k_{i,j})$$

et

$$a_{i,i} = \frac{\left\{ RT_C^i \left( 1 + (0,4851 + 1,5517\omega^i - 0,1516(\omega^i)^2) \left( 1 - \sqrt{\frac{T}{T_C^i}} \right) \right) \right\}^2}{9P_C^i (2^{1/3} - 1)}$$

( $k_{i,j}$  ( $= k_{j,i}$ ) est le paramètre d'interaction binaire entre les constituants  $i$  et  $j$ ; il peut être ajusté en fonction de données expérimentales; par défaut  $k_{i,j} = 0$ ),

- $b$  est donné par

$$b = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^c b_{i,j} z^i z^j,$$

avec

$$b_{i,j} = \frac{b_{i,i} + b_{j,j}}{2}, \quad b_{i,i} = \frac{(2^{1/3} - 1)RT_C^i}{3P_C^i}.$$

Si l'on considère le facteur de compressibilité  $Z = Pv/RT$ , (1.9) devient

$$Z^3 - Z^2 + (A - B - B^2)Z - AB = 0 \quad (1.10)$$

où  $A = aP/R^2T^2$  et  $B = bP/RT$ . Cette équation cubique possède généralement plusieurs solutions. Pour la vapeur, il convient de prendre la plus grande racine, pour le liquide, la plus petite supérieure à  $B$ . Conservons la notation  $Z$  pour la racine de (1.10) ainsi choisie. Alors

$$v(z, T, P) = \frac{RTZ}{P}. \quad (1.11)$$

Les coefficients de fugacité  $\phi^i$ , pour  $i = 1, \dots, c$ , vérifient

$$\begin{aligned} \log \phi^i(z, T, P) = & 1 - Z - \log \left( \frac{P(v-b)}{RT} \right) \\ & + 2b_i \frac{Z-1}{b} - \frac{\log \left( \frac{v+b}{v} \right)}{bRT} \left( 2a_i + a - \frac{2ab_i}{b} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

avec  $a_i = \sum_{j=1}^c a_{i,j} z^j$  et  $b_i = \sum_{j=1}^c b_{i,j} z^j$ . Les potentiels chimiques sont alors donnés par

$$\mu^i(z, T, P) = g^i(T, P_{std}) + RT \log \left( \frac{P \phi^i z^i}{P_{std}} \right) \quad (1.13)$$

avec  $g^i$  l'enthalpie libre du composé  $i$  et  $P_{std}$  la pression standard<sup>2</sup>.

L'enthalpie molaire est calculée par

$$h(z, T, P) = \left( T \left. \frac{\partial a}{\partial T} \right|_z - a \right) \frac{\log \left( \frac{v+b}{v} \right)}{b} + Pv - RT + \sum_{i=1}^c z^i h_{gp}^i(T), \quad (1.14)$$

avec  $h_{gp}^i$  l'enthalpie molaire du gaz parfait associé au composé  $i$ <sup>3</sup>. L'énergie molaire est alors obtenue par

$$u(z, T, P) = h(z, T, P) - Pv(z, T, P). \quad (1.15)$$

### 1.1.4 Le modèle hydrodynamique

Dans cette section, nous présentons le modèle hydrodynamique et les fonctions  $\Delta_P^{liq,j}$ ,  $\Delta_P^{vap,j}$  et  $\mathcal{V}^{liq,j}$  intervenant dans les équations (1.6), (1.7) et (1.8). Le modèle est hydrostatique. Il se rapporte à un plateau de colonne à distiller classique avec déversoir comme celui de la figure 1.1. Nous avons repris le modèle hydraulique de Gallun et Holland [22] qui se sont eux-mêmes inspirés des corrélations que Van Winkle présente dans son livre sur la distillation [93]. Les relations sont les suivantes (les notations sont celles du plateau

<sup>2</sup>(1.5) ne change pas si nous prenons  $g^i = 0$  et  $P_{std} = P$ .

<sup>3</sup>Pour les équations (1.2) et (1.4), la référence prise pour calculer  $h_{gp}^i$  est sans importance : seule la dépendance de la capacité calorifique à pression constante du gaz parfait en fonction de la température est nécessaire.

j)

$$\begin{aligned}
\Delta_P^{liq,j} &= z_j \frac{gm_l(L_j)}{v_l(L_j, T_j, P_j)} \\
&\quad - \lambda^{liq} \left( \frac{v_l(L_j, T_j, P_j) \sum_{i=1}^c L_j^i}{A_j^{liq}} \right)^2 \\
&\quad - \left( 1 - \lambda^{aer} \left( \frac{\sum_{i=1}^c V_{j+1}^i (m_v(V_{j+1}) v_v(V_{j+1}, T_{j+1}, P_{j+1}))^{1/2}}{A_{j+1}^{vap}} \right)^{0.177709} \right) \times \dots \\
&\quad \dots \left( h_{j+1}^{plat} + \lambda^{dev} \left( \frac{v_l(L_{j+1}, T_{j+1}, P_{j+1}) \sum_{i=1}^c L_{j+1}^i}{l_{j+1}^{dev}} \right)^{2/3} \right) \times \dots \\
&\quad \dots \frac{gm_l(L_{j+1})}{v_l(L_{j+1}, T_{j+1}, P_{j+1})} \tag{1.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_P^{vap,j} &= \lambda^{vap} \left( \frac{v_v(V_{j+1}, T_{j+1}, P_{j+1}) \sum_{i=1}^c V_{j+1}^i}{A_j^{vap}} \right)^2 \\
&\quad - \left( h_j^{plat} + \lambda^{dev} \left( \frac{v_l(L_j, T_j, P_j) \sum_{i=1}^c L_j^i}{l_j^{dev}} \right)^{2/3} \right) \frac{gm_l(L_j)}{v_l(L_j, T_j, P_j)} \tag{1.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{liq,j} &= z_j A_j^{dev} + \left( 1 - \lambda^{aer} \left( \frac{\sum_{i=1}^c V_j^i (m_v(V_j) v_v(V_j, T_j, P_j))^{1/2}}{A_j^{vap}} \right)^{0.177709} \right) \times \dots \\
&\quad \dots \left( h_j^{plat} + \lambda^{dev} \left( \frac{v_l(L_j, T_j, P_j) \sum_{i=1}^c L_j^i}{l_j^{dev}} \right)^{2/3} \right) A_j^{plat}. \tag{1.18}
\end{aligned}$$

Les fonctions  $m_l$  et  $m_v$  permettent le calcul des masses molaires du liquide et de la vapeur. Les fonctions  $v_l$  et  $v_v$  permettent le calcul des volumes molaires du liquide et de la vapeur avec le modèle thermodynamique de Soave. Les paramètres géométriques (voir la figure 1.1) sont  $A_j^{liq}$ ,  $A_j^{vap}$ ,  $A_j^{dev}$ ,  $A_j^{plat}$ ,  $l_j^{dev}$  et  $h_j^{plat}$ . Les coefficients hydrauliques,  $\lambda^{aer}$ ,  $\lambda^{liq}$ ,  $\lambda^{vap}$  et  $\lambda^{dev}$ , sont supposés constants et indépendants de la composition, de la température et de la pression.

(1.16) résulte du calcul de la différence de pression entre le plateau  $j+1$  et le plateau  $j$  par le trajet que suit le liquide pour aller du plateau  $j$  au plateau  $j+1$  : le premier terme du second membre correspond à la hauteur de liquide dans le déversoir ; le deuxième terme à la perte de charge due au passage d'aire  $A_j^{liq}$  entre le fond du déversoir et le plateau  $j+1$  ; le troisième terme à la hauteur de liquide sur le plateau  $j+1$  avec une loi de déversoir et une loi d'aération du liquide en fonction du débit de vapeur.



(1.17) traduit un calcul similaire au précédent en suivant la vapeur qui monte du plateau  $j + 1$  au plateau  $j$  : le premier terme du second membre correspond à la perte de charge à travers les trous du plateau  $j$  (aire  $A_j^{vap}$ ) ; le deuxième terme à la hauteur de liquide sur le plateau  $j$ .

(1.18) correspond au calcul du volume de rétention liquide sur le plateau  $j$ .

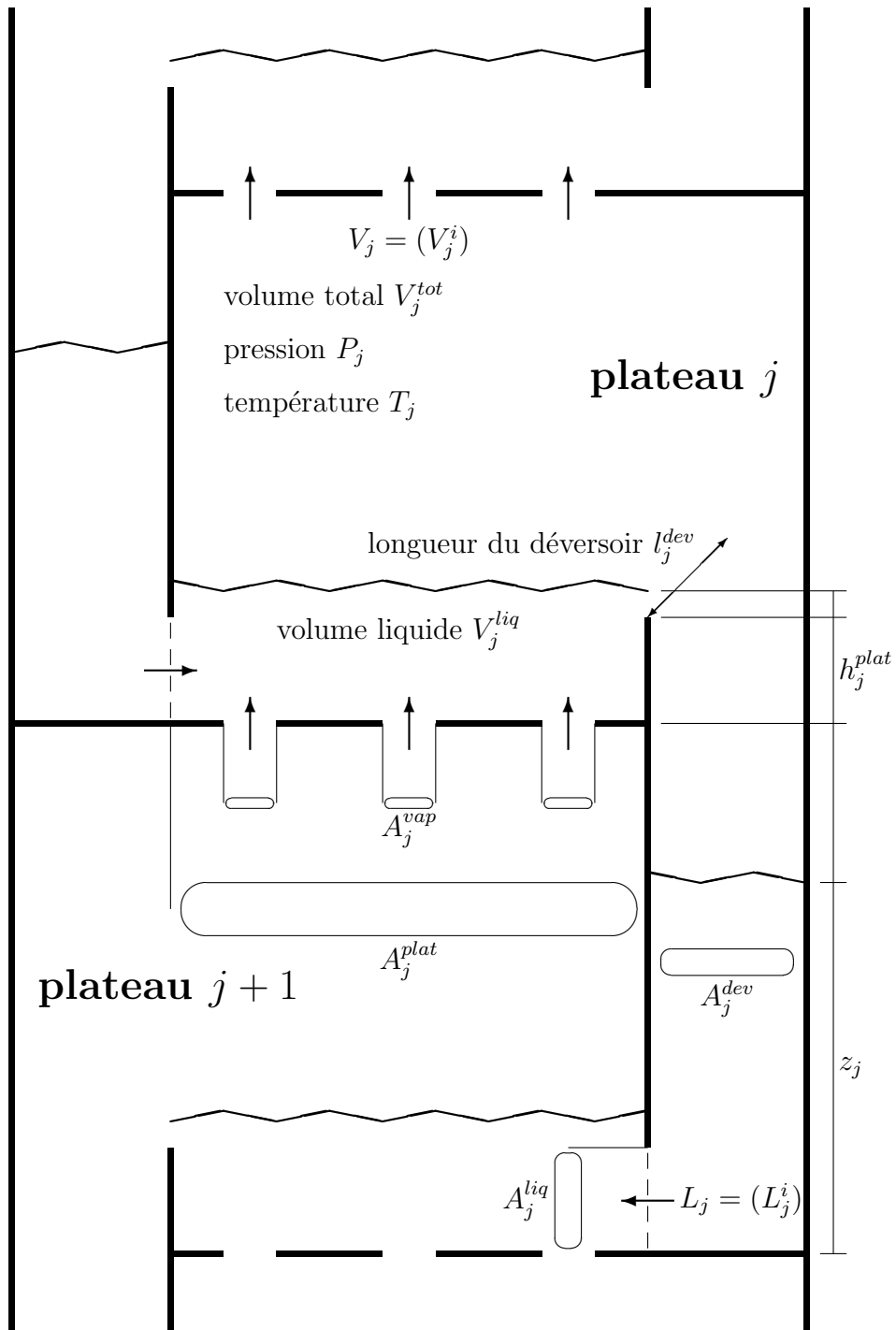


Figure 1.1: un plateau type de colonne à distiller.

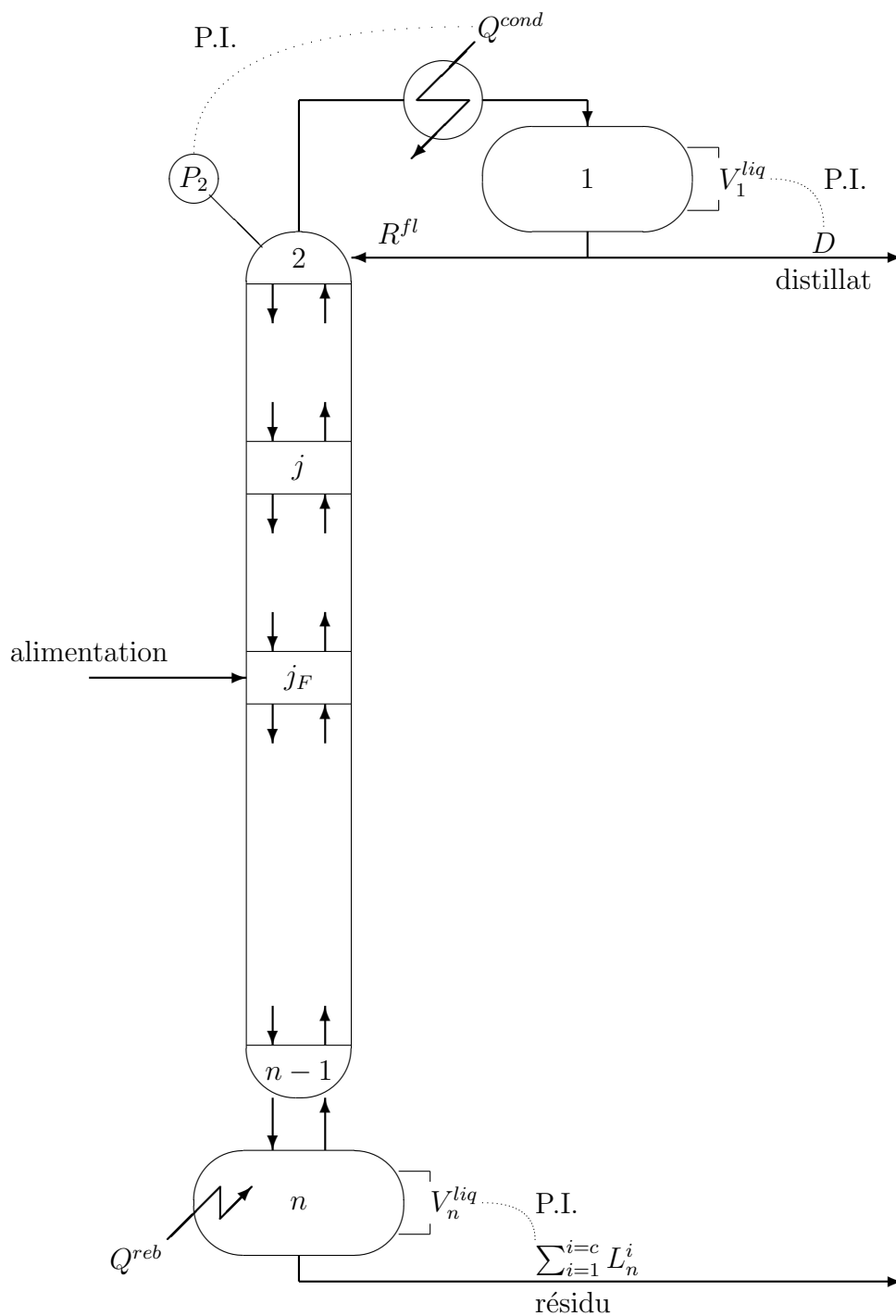


Figure 1.2: une colonne à distiller classique et sa régulation de base.

## 1.2 Le modèle dynamique de la colonne

Considérons une colonne pseudo-binaire standard dont le schéma de procédé est celui de la figure 1.2, page 23. Nous nous proposons, dans cette section, de décrire en détail un modèle dynamique de simulation prenant en compte à la fois les temps de séjour et les effets hydrauliques. Dans la section précédente, nous avons déjà présenté les hypothèses et les équations des plateaux  $2, \dots, j_F - 1, j_F + 1, \dots, n - 1$ . Nous n'y reviendrons pas. Pour le plateau d'alimentation  $j_F$ , il suffit de modifier légèrement le système (1.1),  $\dots$ , (1.8) en rajoutant aux seconds membres des équations (1.1) et (1.2) respectivement les flux de matière  $(Fz_F^i)^{i=1, \dots, c}$  et d'enthalpie  $Fh_F$  dûs à l'alimentation. Pour la tête et le fond, les équations sont sensiblement différentes puisque l'hydraulique est alors conditionnée par les régulations de niveau.

### 1.2.1 Le ballon de reflux

Pour la tête de la colonne, nous supposons que :

- la condensation des vapeurs issues du plateau 2 est totale (pas de distillat vapeur) ; la différence de pression entre le plateau 2 et le ballon de reflux (plateau 1) est constante ;
- dans le ballon de reflux, le liquide et la vapeur sont homogènes et à l'équilibre thermodynamique ;
- un régulateur proportionnel-intégral (PI) commande la pression du plateau 2 en agissant sur la puissance de condensation ;
- un régulateur PI commande le volume liquide dans le ballon de reflux en agissant sur le débit de distillat ;
- le débit de reflux est fixé de façon externe (commande en qualité).

Ces hypothèses peuvent, bien entendu, être discutées et modifiées. Pour modéliser la tête d'un dépropaniseur ou d'un débutaniseur de raffinerie, elles sont assez réalistes compte tenu du fonctionnement de ces colonnes et de la connaissance que nous en avons. En particulier, nous ne modélisons pas précisément les échangeurs : pour ces colonnes, il s'agit d'aéroréfrigérants dont les caractéristiques sont assez mal connues (encrassement, échanges biphasiques). Une modélisation précise de ces échangeurs dépasse largement le cadre de notre étude. De plus, elle n'est pas réellement indispensable puisque les constantes de temps négligées sont généralement petites.

Nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{pour } i = 1, \dots, c : \\ \frac{dN_1^i}{dt} &= V_2^i - \left(1 + \frac{D}{R^{fl}}\right)L_1^i \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\frac{dU_1}{dt} = h_v(V_2, T_2, P_2) \sum_{i=1}^c V_2^i - h_l(L_1, T_1, P_1)(R^{fl} + D) - Q^{cond} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} & \text{pour } i = 1, \dots, c : \\ N_1^i &= \frac{V_1^{liq}}{v_l(L_1, T_1, P_1)} \frac{L_1^i}{R^{fl}} + \frac{V_1^{tot} - V_1^{liq}}{v_v(y_1, T_1, P_1)} y_1^i \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$U_1 = \frac{V_1^{liq}}{v_l(L_1, T_1, P_1)} u_l(L_1, T_1, P_1) + \frac{V_1^{tot} - V_1^{liq}}{v_v(y_1, T_1, P_1)} u_v(y_1, T_1, P_1) \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} & \text{pour } i = 1, \dots, c : \\ 0 &= \mu_l^i(L_1, T_1, P_1) - \mu_v^i(y_1, T_1, P_1) \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$1 = \sum_{i=1}^c y_1^i \quad (1.24)$$

$$R^{fl} = \sum_{i=1}^c L_1^i \quad (1.25)$$

$$P_2 - P_1 = \Delta P^{cond} \quad (1.26)$$

$$D = K^D \left( V_1^{liq} - V_1^{liq,c} + \frac{I^D}{\tau_I^D} \right) \quad (1.27)$$

$$\frac{dI^D}{dt} = V_1^{liq} - V_1^{liq,c} \quad (1.28)$$

$$Q^{cond} = K^{Q^{cond}} \left( P_2 - P_2^c + \frac{I^{Q^{cond}}}{\tau_I^{Q^{cond}}} \right) \quad (1.29)$$

$$\frac{dI^{Q^{cond}}}{dt} = P_2 - P_2^c. \quad (1.30)$$

Les inconnues sont

$$\begin{aligned} N_1 &= (N_1^i)^{i=1, \dots, c}, \quad U_1, \quad L_1 = (L_1^i)^{i=1, \dots, c}, \quad y_1 = (y_1^i)^{i=1, \dots, c}, \\ T_1, \quad P_1, \quad V_1^{liq}, \quad Q^{cond}, \quad I^{Q^{cond}}, \quad D, \quad I^D. \end{aligned}$$

Les grandeurs obtenues à partir du modèle thermodynamique sont

$$v_l(L_1, T_1, P_1), \quad v_v(y_1, T_1, P_1), \quad u_l(L_1, T_1, P_1), \quad u_v(y_1, T_1, P_1), \quad h_l(L_1, T_1, P_1), \\ h_v(y_1, T_1, P_1), \quad (\mu_l^i(L_1, T_1, P_1))^{i=1, \dots, c}, \quad (\mu_v^i(y_1, T_1, P_1))^{i=1, \dots, c}.$$

Les paramètres sont

$$V_1^{tot}, \quad K^D, \quad \tau_I^D, \quad K^{Q^{cond}}, \quad \tau_I^{Q^{cond}}, \quad \Delta P^{cond}, \quad P_2^c, \quad V_1^{liq, c}.$$

La grandeur qui permet de modifier la séparation dans la colonne est le débit de reflux  $R^{fl}$ .

(1.19) et (1.20) sont les équations de conservation de la matière et de l'énergie. (1.21) et (1.22) permettent de calculer les quantités de matière et d'énergie accumulées à partir des compositions, des volumes, de la température et de la pression. Les relations (1.23) traduisent l'équilibre thermodynamique entre le liquide et la vapeur. (1.24) et (1.25) sont des équations de normalisation. (1.26) introduit une perte de charge constante dans le condenseur. (1.27) à (1.30) représentent les régulations de la pression et du niveau.

## 1.2.2 Le fond de la colonne

Pour le fond de la colonne, nous supposons que :

- le rebouillage est pris en compte globalement ; nous considérons uniquement qu'il fournit de l'énergie sous forme de chaleur ;
- le liquide et la vapeur sont à l'équilibre thermodynamique ;
- un régulateur PI commande le volume liquide en agissant sur le débit de résidu.

Ces hypothèses peuvent être modifiées. En particulier, la dynamique du rebouilleur n'est pas prise en compte. Pour le dépropaniseur et le débutaniseur de raffinerie simulés dans cette étude, le rebouillage est assuré par un rebouilleur thermosiphon. Comme pour les aéroréfrigérants de tête, une modélisation précise de tels échangeurs est délicate et dépasse largement le cadre de ce travail. Nous supposons donc implicitement que la dynamique du rebouilleur est stable et suffisamment rapide pour être négligée. Ce qui est raisonnable pour les deux colonnes qui nous intéressent.

Nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{pour } i = 1, \dots, c : \\ \frac{dN_n^i}{dt} &= L_{n-1}^i - L_n^i - V_n^i \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} &= h_l(L_{n-1}, T_{n-1}, P_{n-1}) \sum_{i=1}^c L_{n-1}^i \\ &\quad - h_l(L_n, T_n, P_n) \sum_{i=1}^c L_n^i - h_v(V_n, T_n, P_n) \sum_{i=1}^c V_n^i + Q^{reb} \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} & \text{pour } i = 1, \dots, c : \\ N_n^i &= \frac{V_n^{liq}}{v_l(L_n, T_n, P_n)} \frac{L_n^i}{\sum_{k=1}^c L_n^k} + \frac{V_n^{tot} - V_n^{liq}}{v_v(V_n, T_n, P_n)} \frac{V_n^i}{\sum_{k=1}^c V_n^k} \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$U_n = \frac{V_n^{liq}}{v_l(L_n, T_n, P_n)} u_l(L_n, T_n, P_n) + \frac{V_n^{tot} - V_n^{liq}}{v_v(V_n, T_n, P_n)} u_v(V_n, T_n, P_n) \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} & \text{pour } i = 1, \dots, c : \\ 0 &= \mu_l^i(L_n, T_n, P_n) - \mu_v^i(V_n, T_n, P_n) \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\sum_{i=1}^c L_n^i = K^R \left( V_n^{liq} - V_n^{liq,c} + \frac{I^R}{\tau_I^R} \right) \quad (1.36)$$

$$\frac{dI^R}{dt} = V_n^{liq} - V_n^{liq,c} \quad (1.37)$$

Les inconnues sont

$$N_n = (N_n^i)^{i=1,\dots,c}, \quad U_n, \quad L_n = (L_n^i)^{i=1,\dots,c}, \quad V_n = (V_n^i)^{i=1,\dots,c}, \quad T_n, \quad P_n, \quad V_n^{liq}, \quad I^R.$$

Les grandeurs obtenues à partir du modèle thermodynamique sont

$$\begin{aligned} & v_l(L_n, T_n, P_n), \quad v_v(V_n, T_n, P_n), \quad u_l(L_n, T_n, P_n), \quad u_v(V_n, T_n, P_n), \quad h_l(L_n, T_n, P_n), \\ & h_v(V_n, T_n, P_n), \quad (\mu_l^i(L_n, T_n, P_n))^{i=1,\dots,c}, \quad (\mu_v^i(V_n, T_n, P_n))^{i=1,\dots,c}. \end{aligned}$$

Les paramètres sont

$$V_n^{tot}, \quad K^R, \quad \tau_I^R, \quad V_n^{liq,c}.$$

La grandeur qui permet de modifier la séparation dans la colonne est la puissance de rebouillage  $Q^{reb}$ .

(1.31) et (1.32) sont les équations de conservation de la matière et de l'énergie. (1.33) et (1.34) permettent de calculer les quantités de matière et d'énergie accumulées à partir des compositions, des volumes, de la température et de la pression. Les relations (1.35) traduisent l'équilibre thermodynamique entre le liquide et la vapeur. (1.36) et (1.37) représentent la régulation du niveau.

### 1.2.3 La colonne entière

Le modèle dynamique complet de la colonne se construit simplement à partir des trois modèles élémentaires (plateau générique, condenseur et ballon de reflux, rebouilleur et fond de colonne) détaillés ci-dessus. Le système d'équations différentielles ordinaires et d'équations algébriques réunit

- pour le ballon de reflux (étage  $j = 1$ ), les équations (1.19) à (1.30) ;
- pour chacun des plateaux  $j$  dans  $\{2, \dots, n - 1\}$ , les équations (1.1) à (1.8)<sup>4</sup> ;
- pour le fond de la colonne (étage  $j = n$ ), les équations (1.31) à (1.37).

Synthétiquement, un tel système s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Xi(\xi, \gamma, t) \\ 0 = \Gamma(\xi, \gamma, t). \end{cases} \quad (1.38)$$

Les composantes de  $\xi$ , le vecteur des inconnues différentielles, sont

$$(N_j^i)_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, c}, \quad (U_j)_{j=1, \dots, n}, \quad I^D, \quad I^{Q^{cond}}, \quad I^R.$$

Les composantes de  $\gamma$ , le vecteur des inconnues algébriques, sont

$$\begin{aligned} (L_j^i)_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, c}, \quad (V_j^i)_{j=2, \dots, n}^{i=1, \dots, c}, \quad (T_j)_{j=1, \dots, n}, \quad (P_j)_{j=1, \dots, n}, \\ (y_1^i)_{i=1, \dots, n}, \quad (V_j^{liq}, z_j)_{j=2, \dots, n-1}, \quad V_1^{liq}, \quad V_n^{liq}, \quad Q^{cond}, \quad D. \end{aligned}$$

Dans les fonctions  $\Xi$  et  $\Gamma$  interviennent le modèle thermodynamique, le modèle hydraulique, les coefficients des régulateurs PI.  $\Xi$  et  $\Gamma$  dépendent aussi explicitement du temps par l'intermédiaire de l'alimentation ( $(Fz_F^i)_{i=1, \dots, c}$  et  $Fh_F$ ), des trois consignes de régulations ( $P_2^c$ ,  $V_1^{liq, c}$  et  $V_n^{liq, c}$ ), du débit de reflux ( $R^{fl}$ ) et de la puissance de rebouillage ( $Q^{reb}$ ).

---

<sup>4</sup> Ne pas oublier, pour le plateau  $j_F$ , les flux dûs à l'alimentation dans les seconds membres de (1.1) et (1.2). L'équation (1.6) du plateau  $n - 1$ , doit être légèrement modifiée car l'étage  $n$  n'est pas un vrai plateau.



Remarquons que la dimension de  $\xi$  est  $(c + 1)n + 3$ . Celle de  $\gamma$  est  $(2c + 4)n$ . La taille de (1.38) vaut donc  $(3c + 5)n + 3$ . Pour un dépropaniseur de  $n = 42$  plateaux et  $c = 4$  composés, le système comporte 717 équations. Pour un débutaniseur de 35 plateaux et 6 composés, le système comporte 808 équations. La taille du système peut donc être importante mais sa structure est creuse.

### 1.2.4 La résolution numérique avec SPEEDUP

Soit donc une condition initiale  $(\xi^0, \gamma^0)$  vérifiant  $0 = \Gamma(\xi^0, \gamma^0, 0)$ . La partie algébrique de (1.38) peut être, au moins formellement, inversée pour fournir  $\gamma$  en fonction de  $\xi$  et du temps  $t$  :  $\gamma = \Phi(\xi, t)$ . En effet, cette partie algébrique n'est pas dégénérée : sur chaque plateau  $j^5$ , les équations (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) et (1.8) permettent de calculer  $L_j$ ,  $T_j$ ,  $V_j$ ,  $P_j$ ,  $z_j$  et  $V_j^{liq}$  en fonction de  $N_j$  et  $U_j$ .

Ainsi, résoudre (1.38) revient à résoudre le système d'équations différentielles ordinaires en  $\xi$ ,

$$\frac{d\xi}{dt} = \Xi(\xi, \Phi(\xi, t), t),$$

avec comme condition initiale  $\xi(t = 0) = \xi^0$ . Nous savons que ce système admet une solution unique  $\xi(t)$  puisque les fonctions  $\Xi$  et  $\Phi$  sont régulières (voir [3] page 56). (1.38) admet donc une unique solution,  $(\xi(t), \gamma(t) = \Phi(\xi(t), t))$ , passant par  $(\xi^0, \gamma^0)$  à  $t = 0$ .

Pour de tels systèmes algébro-différentiels<sup>6</sup>, Gear a montré [27] que la méthode d'intégration qui porte son nom, converge et fonctionne correctement.

Plusieurs programmes de calcul utilisent la méthode de Gear pour intégrer numériquement de tels systèmes. Deux des plus connus sont LSODE-LSODI [34] développé par Hindmarsh et DASSL [67] développé par Petzold. Pour la résolution numérique du modèle (1.38), nous avons utilisé le logiciel SPEEDUP développé à l'Imperial College [72, 64]. Les algorithmes d'intégration utilisés par SPEEDUP sont très similaires à ceux de LSODE ou DASSL. SPEEDUP comporte également tout un environnement qui facilite grandement l'écriture et la mise au point de modèles de simulation de grandes dimensions. Nous avons utilisé le logiciel de la façon suivante:

- écriture du modèle (1.38) dans le langage SPEEDUP, langage adapté à la description synthétique de modèles dynamiques de procédés à partir d'équations différentielles et d'équations algébriques ;
- calcul du régime stationnaire aux conditions opératoires initiales ;
- à partir du régime stationnaire, intégration numérique du modèle lorsque les conditions opératoires varient de façon continûment dérivable.

<sup>5</sup>Les calculs sont légèrement différents pour les plateaux 1 et  $n$ .

<sup>6</sup>Nous verrons dans le chapitre 2 que de tels systèmes algébro-différentiels sont d'index 1.

### 1.2.5 Données de simulation du dépropaniseur

Un dépropaniseur est une colonne qui sépare un mélange de propane et de butane en deux : en tête sort le propane avec un peu de butane ; en fond sort le butane avec un peu de propane. Pour le dépropaniseur de raffinerie que nous avons simulé, les paramètres sont les suivants (nous utilisons les notations décimales anglaises) :

- $n = 42$  plateaux ;
- le plateau d'alimentation est placé en  $j_F = 21$  ;
- $c = 4$  composés ( $i = 1$  l'éthane,  $i = 2$  le propane,  $i = 3$  le normal-butane,  $i = 4$  le normal-pentane) ;
- le profil de rétentions est approximativement<sup>7</sup>
  - $V_1^{tot} = 10,8 \text{ m}^3$  et  $V_1^{liq,c} = 8,7 \text{ m}^3$ ,
  - $V_j^{tot} = 1,0 \text{ m}^3$  et  $V_j^{liq} = 0,1 \text{ m}^3$  pour  $j = 1, \dots, 20$ ,
  - $V_j^{tot} = 2,0 \text{ m}^3$  et  $V_j^{liq} = 0,15 \text{ m}^3$  pour  $j = 21, \dots, 41$ ,
  - $V_n^{tot} = 8,4 \text{ m}^3$  et  $V_n^{liq,c} = 2,3 \text{ m}^3$  ;
- la différence de pression entre deux plateaux consécutifs est d'environ 800 Pa ;
- $\Delta P^{cond} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ;
- les paramètres des 3 régulateurs P.I. sont
  - $K^D = 5,0 \text{ kmol/mn/m}^3$  et  $\tau_I^D = 5,0 \text{ mn}$ ,
  - $K^{Q^{cond}} = 2000 \text{ J/mn/Pa}$  et  $\tau_I^{Q^{cond}} = 2,0 \text{ mn}$  (régulation à grand gain),
  - $K^R = 1,0 \text{ kmol/mn/m}^3$  et  $\tau_I^R = 5,0 \text{ mn}$  ;
- les paramètres du modèle thermodynamique sont donnés par le tableau

$i =$	$T_C^i$ (K)	$P_C^i$ (Pa)	$\omega^i$
1	305,4	$48,84 \cdot 10^5$	0,098
2	369,8	$42,46 \cdot 10^5$	0,152
3	416,6	$37,20 \cdot 10^5$	0,185
4	469,6	$33,74 \cdot 10^5$	0,251

(les coefficients d'interaction binaire  $k_{i,j}$  sont tous égaux à 0).

<sup>7</sup>Les coefficients hydrauliques  $\lambda^{aer}$ ,  $\lambda^{liq}$ ,  $\lambda^{vap}$  et  $\lambda^{dev}$  sont ceux fournis par Van Winkle [93] et repris par Gallun et Holland [22]. Les paramètres géométriques du plateaux sont ceux de la colonne réelle.

Toutes les simulations présentées dans cette thèse démarrent du même régime stationnaire. Il est le suivant :

- débit de charge  $F = 5,0$  kmol/mn ;
- température de la charge  $T_F = 340,0$  K ;
- pression de la charge  $P_F = 16,0 \cdot 10^5$  Pa ;
- composition globale de la charge  $z_F = (z_F^i)^{i=1,\dots,4}$ , avec
  - $z_F^1 = 0,025$ ,
  - $z_F^2 = 0,350$ ,
  - $z_F^3 = 0,600$ ,
  - $z_F^4 = 0,025$  ;
- pression de tête  $P_2^c = 15,0 \cdot 10^5$  Pa ;
- fraction molaire de butane dans le distillat  $0,005$  ;
- fraction molaire de propane dans le résidu  $0,005$ .

Sous ces conditions opératoires, la charge est liquide.

### 1.2.6 Données de simulation du débutaniseur

Un débutaniseur est une colonne qui sépare un mélange de propane, butane, pentane et d'essence en deux : en tête sortent le propane et le butane avec un peu de pentane ; en fond sortent le pentane et l'essence avec un peu de butane. Pour le débutaniseur de raffinerie que nous avons simulé, les paramètres sont les suivants :

- $n = 38$  plateaux ;
- le plateau d'alimentation est placé en  $j_F = 20$  ;
- $c = 6$  composés ( $i = 1$  l'éthane,  $i = 2$  le propane,  $i = 3$  le normal-butane,  $i = 4$  le normal-pentane,  $i = 5$  pseudo-composé représentant l'essence légère,  $i = 6$  pseudo-composé représentant l'essence lourde) ;
- le profil de rétentions est approximativement<sup>8</sup>
  - $V_1^{tot} = 23,0$  m<sup>3</sup> et  $V_1^{liq,c} = 12,0$  m<sup>3</sup>,

---

<sup>8</sup>Les coefficients hydrauliques  $\lambda^{aer}$ ,  $\lambda^{liq}$ ,  $\lambda^{vap}$  et  $\lambda^{dev}$  sont ceux fournis par Van Winkle [93] et repris par Gallun et Holland [22]. Les paramètres géométriques du plateaux sont ceux de la colonne réelle.

- $V_j^{tot} = 3,0 \text{ m}^3$  et  $V_j^{liq} = 0,4 \text{ m}^3$  pour  $j = 1, \dots, 20$ ,
- $V_j^{tot} = 7,8 \text{ m}^3$  et  $V_j^{liq} = 0,8 \text{ m}^3$  pour  $j = 21, \dots, 41$ ,
- $V_n^{tot} = 60,0 \text{ m}^3$  et  $V_n^{liq,c} = 25,0 \text{ m}^3$  ;
- la différence de pression entre deux plateaux consécutifs est d'environ 600 Pa ;
- $\Delta P^{cond} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ;
- les paramètres des 3 régulateurs P.I. sont
  - $K^D = 1,0 \text{ kmol/mn/m}^3$  et  $\tau_I^D = 5,0 \text{ mn}$ ,
  - $K^{Q^{cond}} = 5200 \text{ J/mn/Pa}$  et  $\tau_I^{Q^{cond}} = 2,0 \text{ mn}$  (régulation à grand gain),
  - $K^R = 0,4 \text{ kmol/mn/m}^3$  et  $\tau_I^R = 5,0 \text{ mn}$  ;
- les paramètres du modèle thermodynamique sont donnés par le tableau

$i$	$T_C^i$ (K)	$P_C^i$ (Pa)	$\omega^i$
1	305,4	$48,84 \cdot 10^5$	0,098
2	369,8	$42,46 \cdot 10^5$	0,152
3	416,6	$37,20 \cdot 10^5$	0,185
4	469,6	$33,74 \cdot 10^5$	0,251
5	519,4	$28,39 \cdot 10^5$	0,288
6	573,6	$23,87 \cdot 10^5$	0,366

(les coefficients d'interaction binaire  $k_{i,j}$  sont tous égaux à 0).

Toutes les simulations présentées dans cette thèse démarrent du même régime stationnaire. Il est le suivant :

- débit de charge  $F = 25,0 \text{ kmol/mn}$  ;
- température de la charge  $T_F = 396,0 \text{ K}$  ;
- pression de la charge  $P_F = 11,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ;
- composition globale de la charge  $z_F = (z_F^i)^{i=1,\dots,6}$ , avec
  - $z_F^1 = 0,005$ ,
  - $z_F^2 = 0,060$ ,
  - $z_F^3 = 0,140$ ,
  - $z_F^4 = 0,055$ ,
  - $z_F^5 = 0,530$ ,

- $z_F^6 = 0,210$  ;
- pression de tête  $P_2^c = 9,0 \cdot 10^5$  Pa ;
- fraction molaire de pentane dans le distillat 0,001 ;
- fraction molaire de butane dans le résidu 0,005.

Sous ces conditions opératoires, la charge est liquide.

## 1.3 Liste des symboles

### Lettres latines

$A_j^{dev}$  : aire de la section du déversoir du plateau  $j$ .

$A_j^{liq}$  : aire du trou par lequel passe le liquide en fond du déversoir du plateau  $j$ .

$A_j^{plat}$  : aire de la surface active du plateau  $j$ .

$A_j^{vap}$  : aire des trous par lesquels la vapeur entre sur le plateau  $j$ .

$c$  : le nombre de composés ( $c \geq 2$ ).

$D$  : flux molaire de distillat.

$Fh_F$  : flux enthalpique de l'alimentation.

$(Fz_F^i)^{i=1,\dots,c}$  : flux molaires partiels de l'alimentation.

$g$  : accélération de la pesanteur.

$h$  : enthalpie molaire.

$h_l$  : enthalpie molaire liquide.

$h_v$  : enthalpie molaire vapeur.

$h_j^{plat}$  : hauteur du bec de déversoir du plateau  $j$ .

$I^D$  : terme intégral du régulateur de niveau du ballon de reflux.

$I^{Q^{cond}}$  : terme intégral du régulateur de la pression de tête.

$I^R$  : terme intégral du régulateur de niveau du fond de la colonne.

$k_{i,j}$  : coefficient d'interaction binaire entre le composé  $i$  et le composé  $j$  pour le modèle thermodynamique de Soave.

$K^D$  : gain proportionnel du régulateur de niveau du ballon de reflux.

$K^{Q^{cond}}$  : gain proportionnel du régulateur de la pression de tête.

$K^R$  : gain proportionnel du régulateur de niveau du fond de colonne.

$l_j^{dev}$  : longueur du bec de déversoir du plateau  $j$ .

$L_j = (L_j^i)^{i=1,\dots,c}$  : flux molaires partiels de liquide quittant le plateau  $j$ .

$m_l$  : masse molaire du liquide.

$m_v$  : masse molaire de la vapeur.

$n$  : le nombre de plateaux ( $n \geq 5$ ).

$N_j = (N_j^i)^{i=1,\dots,c}$  : rétentions molaires partielles sur le plateau  $j$ .

$P$  : pression.

$P_j$  : pression sur le plateau  $j$ .

$P_2^c$  : consigne du régulateur de pression de tête.

$P_C^i$  : pression critique du composé  $i$ .

$P_{std}$  : pression standard.

$Q^{cond}$  : puissance de condensation en tête de colonne.

$Q^{reb}$  : puissance de rebouillage en fond de colonne.

$R$  : constante des gaz parfaits.

$R^{fl}$  : flux molaire de reflux.

$T$  : température.

$T_j$  : température sur le plateau  $j$ .

$T_C^i$  : température critique du composé  $i$ .

$u$  : énergie interne molaire.

$u_l$  : énergie interne molaire liquide.

$u_v$  : énergie interne molaire vapeur.

$U_j$  : rétention d'énergie interne sur le plateau  $j$ .

$v$  : volume molaire.

$v_l$  : volume molaire liquide.

$v_v$  : volume molaire vapeur.

$V_j = (V_j^i)^{i=1,\dots,c}$  : flux molaires partiels de vapeur quittant le plateau  $j$ .

$V_j^{liq}$  : volume de liquide du plateau  $j$ .

$V_1^{liq,c}$  : consigne du régulateur de niveau du ballon de reflux (volume de liquide).

$V_n^{liq,c}$  : consigne du régulateur de niveau du fond de la colonne (volume de liquide).

$V_j^{tot}$  : volume total du plateau  $j$ .

$\mathcal{V}^{liq,j}$  : volume de liquide du plateau  $j$ , somme du volume sur le plateau lui même et du volume dans le déversoir.

$y_1 = (y_1^i)^{i=1,\dots,c}$  : fractions molaires dans la vapeur du ballon de reflux ( $j = 1$ ).

$z = (z^i)^{i=1,\dots,c}$  : fractions molaires.

$z_j$  : hauteur de liquide dans le déversoir du plateau  $j$ .

$Z$  : facteur de compressibilité.

### Lettres grecques

$\Delta_P^{liq,j}$  : différence de pression entre les plateaux  $j$  et  $j + 1$  calculée en suivant de trajet du liquide.

$\Delta_P^{vap,j}$  : différence de pression entre les plateaux  $j$  et  $j + 1$  calculée en suivant de trajet de la vapeur.

$\lambda^{aer}$  : coefficient d'aération du liquide sur le plateau.

$\lambda^{liq}$  : coefficient de résistance hydraulique du liquide.

$\lambda^{dev}$  : coefficient de résistance hydraulique du liquide pour la loi de déversoir.

$\lambda^{vap}$  : coefficient de résistance hydraulique de la vapeur.

$\mu^i$  : potentiel chimique du composé  $i$ .

$\mu_l^i$  : potentiel chimique du composé  $i$  dans le liquide.

$\mu_v^i$  : potentiel chimique du composé  $i$  dans la vapeur.

$\phi^i$  : coefficient de fugacité du composé  $i$ .

$\tau_I^D$  : temps intégral du régulateur du niveau du ballon de reflux.

$\tau_I^{Q^{cond}}$  : temps intégral du régulateur de la pression de tête.

$\tau_I^R$  : temps intégral du régulateur du niveau du fond de la colonne.

$\omega^i$  : coefficient acentrique du composé  $i$ .

### Indices

$j$  : numéro de plateau ( $j = 1$  ballon de reflux,  $j = j_F$  plateau d'alimentation,  $j = n$  fond de colonne et rebouilleur).

$j_F$  : numéro du plateau d'alimentation.

$n$  : nombre de plateaux de la colonne, tête et fond compris.

$l$  : associé au liquide.

$v$  : associé à la vapeur.

### Exposants

$i$  : numéro de composé ( $1 \leq i \leq c$  avec  $c$  le nombre de composés).

$liq$  : associé au liquide.

$plat$  : associé au plateau.

$vap$  : associé à la vapeur.



# Chapter 2

## Systèmes algébro-différentiels et simulation

### 2.1 Position du problème

La résolution numérique d'un système algébro-différentiel quelconque ne se résume pas, en général, à résoudre d'un côté les équations algébriques et de l'autre les équations différentielles ordinaires. Les couplages entre la partie algébrique et la partie différentielle du système font que, sauf cas particuliers, un algorithme de résolution numérique du système ne peut pas être la simple juxtaposition d'un algorithme d'intégration d'équations différentielles ordinaires et d'un algorithme de résolution d'équations algébriques. Comme le montre Petzold [66], la méthode de Gear, une méthode d'intégration numérique d'équations différentielles ordinaires, ne permet pas de résoudre n'importe quel système algébro-différentiel.

Le modèle de colonne du chapitre 1 a été délibérément construit de façon à pouvoir être résolu numériquement par la méthode de Gear. Récemment, Pantelides et al. [65] soulignent que, pour des modèles de simulation de colonne quasiment identiques aux nôtres, de sérieux problèmes numériques peuvent apparaître. En effet, des modèles, dont les hypothèses physiques sont très proches ainsi que les solutions, peuvent être très différents d'un point de vue structurel.

Considérons le ballon de flash de la figure 2.1. Faisons, dans un premier temps les hypothèses suivantes :

- les mélanges sont parfaits dans les deux phases et celles-ci sont à l'équilibre thermodynamique ;
- les parois du flash sont adiabatiques et la pression est constante (la régulation de la pression est parfaite) ;
- le nombre de moles liquides  $n^L$  et le nombre total de moles  $n^{tot}$  dans le ballon sont

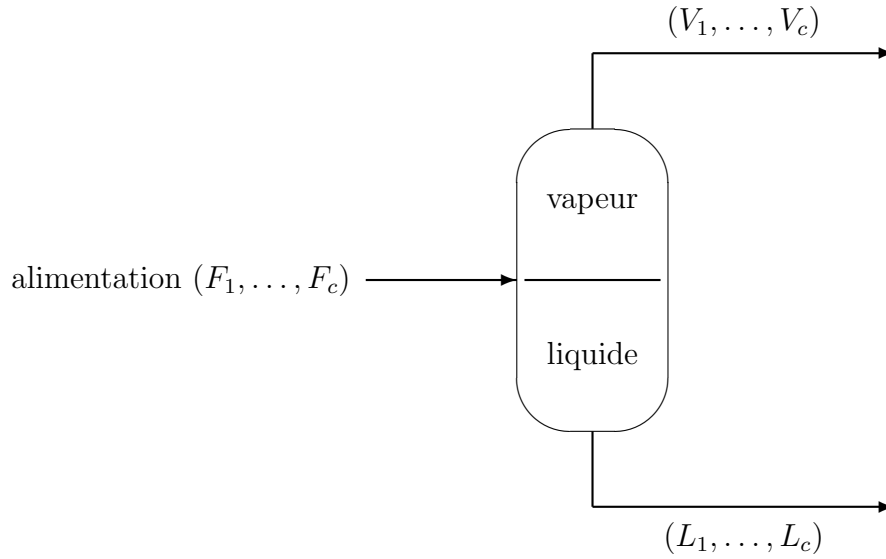


Figure 2.1: un flash isenthalpique à pression  $P$  constante.

constants (la régulation du niveau de liquide est parfaite).

Si on note

- $c$  le nombre de constituants,  $T$  la température,  $P$  la pression,
- $F = (F_i)_{i=1, \dots, c}$  les flux molaires d'alimentation,  $h^F$  son enthalpie molaire,
- $h^L$  et  $h^V$  les enthalpies molaires du liquide et de la vapeur,
- $\mu^L = (\mu_i^L)_{i=1, \dots, c}$  et  $\mu^V = (\mu_i^V)_{i=1, \dots, c}$  les potentiels chimiques dans le liquide et dans la vapeur,
- $L = (L_i)_{i=1, \dots, c}$  et  $V = (V_i)_{i=1, \dots, c}$  les flux molaires de liquide et de vapeur sortant du ballon,
- $n = (n_i)_{i=1, \dots, c}$  et  $h$  les rétentions molaires et enthalpique,

les équations du modèle sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn}{dt} = F - L - V \\ \frac{dh}{dt} = Fh^F - (\sum_{i=1}^c L_i) h^L(L, T, P) - (\sum_{i=1}^c V_i) h^V(V, T, P) \\ n = \frac{n^L}{\sum_{i=1}^c L_i} L + \frac{n^{tot} - n^L}{\sum_{i=1}^c V_i} V \\ h = n^l h^L(L, T, P) + (n^{tot} - n^l) h^V(V, T, P) \\ \mu^L(L, T, P) = \mu^V(V, T, P). \end{array} \right.$$

Ainsi, le modèle s'écrit sous la forme semi-implicite  $\dot{x} = f(x, y)$ ,  $0 = g(x, y)$ , avec  $x = (n, h)$  et  $y = (L, V, T)$ . Comme les grandeurs thermodynamiques qui interviennent dans les équations algébriques sont des fonctions homogènes de degré 0 par rapport à  $L$  et  $V$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  n'est pas inversible. Il n'est donc pas possible d'obtenir directement  $y$  en fonction des variables différentielles  $x$  uniquement avec  $g(x, y) = 0$ . Il faut nécessairement faire intervenir les équations différentielles  $\dot{x} = f(x, y)$  en dérivant formellement  $g(x, y) = 0$  par rapport au temps. Or, cette dérivation est à l'origine des problèmes qui apparaissent lors de la résolution numérique de ce système.

Modifions légèrement notre modèle de flash de façon à prendre en compte les dynamiques des régulations de la pression  $P$  et de la rétention liquide  $n^L$ . Les hypothèses précédentes relatives à  $P$  et  $n^L$  sont remplacées par :

- $P$  est régulée avec le débit  $V$  par une action proportionnelle ;
- $n^L$  est régulée avec le débit  $L$  par une action proportionnelle.

Ainsi  $n^L$  et  $P$  deviennent des inconnues supplémentaires associées aux deux équations algébriques de régulation :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^c L_i &= K_L(n^L - n^{L,c}) \\ \sum_{i=1}^c V_i &= K_V(P - P^c) \end{aligned}$$

( $K_L$  et  $K_V$  sont les gains des deux régulateurs,  $n^{L,c}$  et  $P^c$  sont les deux consignes). Sur ce nouveau modèle, il est alors clair que les équations algébriques peuvent être inversées par rapport aux inconnues algébriques. Ainsi, il est possible de se ramener directement à un système différentiel ordinaire. Pour cette classe de systèmes algèbro-différentiels, Gear [27] a démontré que sa méthode numérique d'intégration est parfaitement adaptée. Ce nouveau système n'a donc pas du tout la même structure que l'ancien. Pourtant, si l'on fait tendre les gains des deux régulateurs vers l'infini, le nouveau modèle tend vers l'ancien (au sens des perturbations singulières, voir le théorème de Tikhonov, annexe D).

Comme le souligne Petzold [66], la résolution numérique de ce type de systèmes qui, a priori, est possible avec la méthode de Gear, peut néanmoins être difficile lorsque les gains des régulateurs deviennent importants. Ainsi, il est illusoire de croire que l'on puisse résoudre numériquement l'ancien modèle en l'approximant par le nouveau avec des gains de régulateurs très importants.

Qualitativement, les choses peuvent être très similaires, si, pour le modèle de colonne à distiller du chapitre 1, l'hydrodynamique conduit à des volumes de rétentions presque constants, à des différences de pression entre les plateaux presque constantes, et si les régulations de niveau et de pression sont quasiment parfaites. Heureusement, nous ne nous sommes pas heurtés à ce genre de difficultés numériques pour les colonnes simulées dans cette thèse. Cependant, il n'est pas exclu qu'avec d'autres paramètres hydrauliques, des problèmes numériques d'intégration surgissent. C'est pourquoi, il nous est apparu utile d'approfondir la question.

Comme le suggèrent Gear et Petzold [29], résoudre

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ 0 = g(x, y) \end{cases}$$

revient à inverser un système dynamique. L'objet de ce chapitre est de montrer l'intérêt d'utiliser certains résultats de la théorie de la commande des systèmes non linéaires pour aborder ce problème. La notion d'index, si utile pour analyser les difficultés numériques de résolution, a été introduite pour la première fois en 1981 par Sincovec et al. [81] pour les systèmes algèbro-différentiels linéaires. Depuis, cette notion a été reprise et utilisée sans définition précise dans le cas non linéaire [50, 29, 28, 63].

En s'appuyant sur des travaux récents relatifs à l'inversion de système dynamique, il est possible d'étendre de façon rigoureuse aux systèmes non linéaires la notion d'index et de proposer pour chaque système d'index fini une forme canonique similaire à celle du cas linéaire. Ces résultats s'appuient sur un algorithme d'inversion rappelé dans l'annexe A et fondé sur une méthode d'élimination introduite par Silverman [80] pour les systèmes dynamiques linéaires ( $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$ ) et étendue par la suite aux systèmes non linéaires ([36, 35, 82, 13] pour les systèmes ( $\dot{x} = A(x) + B(x)u$ ,  $y = C(x)$ ) et [49] pour les systèmes ( $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = h(x, u)$ )).

La distinction usuelle [68] entre les systèmes algèbro-différentiels semi-implicites,  $\dot{x} = f(x, y)$ ,  $0 = g(x, y)$ , et les systèmes complètement implicites,  $0 = h(x, \dot{x})$ , ne nous est pas apparue utile ici. Ainsi, tout au long de ce chapitre, nous considérons le système algèbro-différentiel analytique général,

$$(\Sigma) \quad h\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $h$  une fonction analytique à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ), qu'il soit réellement implicite ou seulement semi-implicite. Notre définition de l'index repose plutôt sur des manipulations

algébriques et différentielles que sur les notions classiques d'état, de commande et de sortie qui interviennent directement pour les systèmes semi-implicites. Nous sommes conscients que, sur le plan de la forme, définir l'index par les résultats d'un algorithme n'est pas une façon intrinsèque de procéder<sup>1</sup>.

Cependant, notre démarche a le mérite de ne faire appel qu'à un nombre limité d'outils mathématiques. Tout d'abord, nous présentons sur un exemple la méthode d'élimination qui est à la base de l'algorithme d'inversion présenté en détail dans l'annexe A. Ensuite, nous montrons comment cet algorithme d'inversion permet de généraliser rigoureusement la notion d'index et de forme canonique dans le cas où le système algèbro-différentiel ( $\Sigma$ ) est non linéaire. Puis, nous utilisons cette forme canonique pour bien mettre en évidence les limitations et les difficultés auxquelles se heurtent les méthodes numériques de résolution comme la méthode de Gear. Enfin, nous proposons, à partir de l'algorithme d'inversion, une procédure explicite ayant un minimum de dérivations et de manipulations formelles, pour transformer un système d'index élevé en un système d'index 1 pour lequel la méthode de Gear converge.

## 2.2 Systèmes algèbro-différentiels et inversion

Considérons le système algèbro-différentiel semi-implicite

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ 0 = h(x, u) \end{cases}$$

( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $f$  analytique à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $h$  analytique à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ ). Résoudre ce système algèbro-différentiel ou inverser le système dynamique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ y = h(x, u). \end{cases}$$

en imposant aux sorties  $y$  d'être nulles à chaque instant, revient exactement au même. Ce n'est qu'une question de vocabulaire. Les variables  $u$  sont interprétées comme des commandes, les variables  $y = h(x, u)$  comme des sorties, les variables  $x$  comme l'état, la fonction  $f(x, u)$  comme la dynamique en boucle ouverte, la fonction  $h(x, u)$  comme la fonction de sortie. En théorie de la commande, le problème s'énonce ainsi : connaissant

---

<sup>1</sup> En fait, la notion d'index se rattache à la notion de rang différentiel de sortie introduite par Fliess [19], aux travaux sur le découplage par retour dynamique de l'état (voir par exemple [62, 13]) et à l'inversion (voir par exemple [35, 82, 49, 73]). Signalons aussi les liens qui existent également avec l'approche géométrique introduite par Byrnes et Isidori dans le contexte de l'annulation des sorties [9]. Récemment, un papier de di Benedetto et al. [14] fait le lien entre tous ces travaux et les algorithmes constructifs qu'ils proposent, en utilisant l'approche différentielle-algébrique préconisée par Fliess [20].

la loi horaire des sorties (ici les sorties sont nulles à chaque instant), calculer la loi horaire des commandes,  $u(t)$  pour  $t \geq 0$ , sachant qu'elles agissent sur les sorties  $h(x, u)$  par l'intermédiaire de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x, u)$ . Autrement dit, connaissant les sorties, calculer les entrées. D'où le nom d'inversion donné à ce problème.

L'inversion de système est un problème très étudié et pour lequel des algorithmes généraux de résolution existent. Dans l'annexe A, nous en présentons un. L'idée constitutive de cet algorithme est en fait élémentaire et repose sur un principe d'élimination déjà utilisé par Silverman pour les systèmes linéaires [80]. Pour comprendre ce principe, le plus simple est de considérer un exemple, qui éclaire les développements généraux parfois lourds de l'annexe A<sup>2</sup>.

Soit le système algèbro-différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_1u_1u_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1u_1u_2 \\ \dot{x}_3 = x_3 + x_4 + x_3u_2 \\ \dot{x}_4 = x_4 + u_1u_2 \\ 0 = 1 + x_1 + x_1u_1u_2 \\ 0 = x_2 + x_1u_1u_2. \end{cases}$$

On note  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  et  $u = (u_1, u_2)$ .

**Étape 0** Il est clair que nous ne pouvons pas calculer  $u$  à partir de

$$\begin{cases} 0 = 1 + x_1 + x_1u_1u_2 \\ 0 = x_2 + x_1u_1u_2. \end{cases}$$

En effet, le rang de ce système par rapport à  $u$  est 1 ( $\mu_0 = 1$ , cf. annexe A). Donc nécessairement, il contient implicitement une équation qui ne dépend que de  $x$ . Pour l'obtenir, il suffit ici de faire la différence entre les deux équations. On obtient alors le système,

$$\begin{cases} 0 = 1 + x_1 + x_1u_1u_2 \\ 0 = 1 + x_1 - x_2, \end{cases}$$

équivalent algébriquement au système de départ et qui se décompose en deux parties : une première partie (ici la première équation) dont la dépendance par rapport à  $u_1$  et  $u_2$  est maximum ; une seconde partie (ici la seconde équation) qui ne dépend que de  $x$ . Le nom d'élimination donné à cette méthode s'explique alors clairement. En effet, elle consiste à réécrire, de façon algébriquement équivalente, le système en éliminant au maximum la présence de  $u$  dans les équations.

<sup>2</sup>Très souvent, lors de la construction de modèles dynamiques de systèmes à partir de lois physiques, ce principe d'élimination est utilisé implicitement en choisissant intuitivement les bonnes variables indépendantes pour décrire le système. Par exemple, pour écrire les équations qui régissent le comportement dynamique d'un simple pendule, les coordonnées cartésiennes ne sont pas les bonnes coordonnées. On leur préfère systématiquement les coordonnées polaires qui sont parfaitement adaptées au problème.

**Etape 1** On peut maintenant continuer en dérivant par rapport au temps la seconde équation<sup>3</sup>. En utilisant les équations relatives à  $\dot{x}$ , on obtient ainsi un nouveau système,

$$\begin{cases} 0 &= 1 + x_1 + x_1 u_1 u_2 \\ 0 &= x_1 - x_3 + x_1 u_1 u_2, \end{cases}$$

algébriquement indépendant du précédent. Son rang par rapport à  $u$  est toujours égal à 1 ( $\mu_0 = \mu_1 = 1$ , cf. annexe A). Par soustraction, on obtient le système,

$$\begin{cases} 0 &= 1 + x_1 + x_1 u_1 u_2 \\ 0 &= x_3 + 1, \end{cases}$$

algébriquement équivalent et en deux parties comme à l'étape précédente.

**Etape 2** On dérive par rapport au temps la seconde équation et on obtient le système

$$\begin{cases} 0 &= 1 + x_1 + x_1 u_1 u_2 \\ 0 &= x_3 + x_4 + x_3 u_2. \end{cases}$$

Son rang par rapport à  $u$  est égal 2 ( $\mu_2 = 2$ , cf. annexe A). Par inversion de ce système algébrique, nous obtenons en  $u$  en fonction de  $x$  :

$$\begin{cases} u_1 u_2 &= -\frac{1 + x_1}{x_1} \\ u_2 &= -\frac{x_3 + x_4}{x_3}. \end{cases}$$

**Fin de la résolution** En remplaçant  $u$  par sa valeur dans les équations donnant  $\dot{x}$ , on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - 2(1 + x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_3 - (1 + x_1) \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= x_4 - \frac{1 + x_1}{x_1}. \end{cases}$$

C'est un système différentiel ordinaire qui admet, localement au moins, une solution unique si l'on fixe la condition initiale  $x^0$ . Supposons que  $x^0$  vérifie les deux équations ne dépendant que de  $x$  et obtenues lors des deux étapes 0 et 1 :

$$\begin{cases} 1 + x_1^0 - x_2^0 &= 0 \\ 1 + x_3^0 &= 0. \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>Si nous avons directement dérivé l'une des deux équations de

$$\begin{cases} 0 &= 1 + x_1 + x_1 u_1 u_2 \\ 0 &= x_2 + x_1 u_1 u_2, \end{cases}$$

nous aurions obtenu des termes en  $\dot{u}$  dont nous n'avons que faire.

Puisque  $\dot{x}_3 = 0$ , on a  $x_3 = -1$  à chaque instant. Il est alors immédiat de voir que  $\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0$  et donc que  $1 + x_1 - x_2 = 0$  à chaque instant.

Nous avons en fait montré que, pour qu'il existe une solution au système algèbro-différentiel de départ ayant comme condition initiale  $x^0$  et  $u^0$  vérifiant les équations algébriques,

$$\begin{cases} 0 &= 1 + x_1^0 + x_1^0 u_1^0 u_2^0 \\ 0 &= x_2^0 + x_1^0 u_1^0 u_2^0, \end{cases}$$

il faut et il suffit qu'en plus la condition initiale  $x^0$  et  $u^0$  vérifie deux autres équations, algébriquement indépendantes des deux premières, qui sont obtenues au cours des étapes 1 et 2 :

$$\begin{cases} u_2^0 &= -\frac{x_3^0 + x_4^0}{x_3^0} \\ 1 + x_3^0 &= 0. \end{cases}$$

Nous voyons donc sur cet exemple l'intérêt des méthodes d'inversion pour résoudre, au moins formellement, les systèmes algèbro-différentiels. Les sections suivantes mettent en œuvre, dans le cas général des systèmes implicites, les diverses idées utilisées pour traiter cet exemple particulier.

## 2.3 Index et forme canonique

### Cas général des systèmes implicites

Soit le système implicite  $(\Sigma)$

$$(\Sigma) \quad h\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $h$  une fonction analytique à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Considérons le système étendu  $(\Sigma_e)$

$$(\Sigma_e) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= u \\ 0 &= h(x, u). \end{cases}$$

De la définition 3 de l'annexe A à la page 189, nous tirons la définition suivante.

**Définition 1.** *L'ordre relatif  $\alpha$  du système étendu  $(\Sigma_e)$  est appelé index du système algèbro-différentiel implicite  $(\Sigma)$ .*

Ainsi défini, l'index ne dépend pas du choix des variables pour écrire le système  $(\Sigma)$ . Le lemme 6 de la page 189 implique que, si l'index est fini, il est nécessairement inférieur ou égal à  $n$ , la dimension de  $(\Sigma)$ . Dans le cas des systèmes semi-implicites

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ 0 &= h(x, u), \end{cases}$$



il est clair que l'index est égal à l'ordre relatif plus 1, et que, si l'index est fini, il est inférieur ou égal au nombre d'équations différentielles plus 1.

Pour être valable, cette définition doit correspondre à la définition de l'index donnée par Petzold [66] dans le cas où  $(\Sigma)$  est linéaire. Nous le montrerons après avoir établi que tout système d'index fini possède une forme particulière dite forme canonique. A l'exception du fait que la commande intervient non linéairement, l'établissement de telles formes canoniques pour des systèmes algébro-différentiels semi-implicites est classique du point de vue de la théorie de la commande, si l'on observe qu'elles interviennent de façon plus ou moins apparente dans les démonstrations de nombreux résultats (voir, par exemple, la démonstration du théorème 3.2 de [73]). Cependant, nous ne connaissons pas de référence qui traite explicitement des formes canoniques pour les systèmes non linéaires en état et en commande. De plus, pour les systèmes algébro-différentiels non linéaires implicites, c'est la première fois, à notre connaissance, que de telles formes canoniques sont établies. C'est pourquoi nous avons jugé utile de démontrer l'ensemble des résultats à partir de l'algorithme d'inversion présenté dans l'annexe A.

**Théorème 1.** *Soit le système algébro-différentiel  $(\Sigma)$ . Supposons que son index  $\alpha$  soit fini. Alors il existe un changement de variables sur  $x$ ,  $\xi = \Xi(x)$ <sup>4</sup>, avec  $\Xi$  difféomorphisme et  $\xi$  se décomposant en plusieurs groupes de composantes*

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\alpha, \zeta) \quad \text{avec} \quad \dim(\xi_1) \leq \dim(\xi_2), \dots, \leq \dim(\xi_\alpha),$$

de sorte que le système  $(\Sigma)$  s'écrive avec ces nouvelles variables de la façon suivante

$$(\Sigma_c) \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = \phi_1 \left( \xi, \frac{d\xi_1}{dt} \right) \\ \xi_3 = \phi_2 \left( \xi, \frac{d\xi_1}{dt}, \frac{d\xi_2}{dt} \right) \\ \vdots \\ \xi_\alpha = \phi_{\alpha-1} \left( \xi, \frac{d\xi_1}{dt}, \dots, \frac{d\xi_{\alpha-1}}{dt} \right) \\ \frac{d\zeta}{dt} = \Omega \left( \zeta, \frac{d\xi_1}{dt}, \dots, \frac{d\xi_\alpha}{dt} \right). \end{array} \right.$$

Les fonctions  $\phi_k$  et  $\Omega$  sont analytiques. Chaque fonction  $\phi_k$  s'annule lorsque  $(\frac{d\xi_1}{dt}, \dots, \frac{d\xi_k}{dt})$

<sup>4</sup>Dès le début de la démonstration du théorème, nous montrons comment l'algorithme d'inversion de l'annexe A permet de calculer *explicitement*  $\Xi(x)$ .

est nul; le rang de  $\phi_k$  est maximal par rapport à  $\frac{d\xi_k}{dt}$ . De telles coordonnées  $\xi$  sont appelées coordonnées canoniques, et la forme  $(\Sigma_c)$  est appelée forme canonique de  $(\Sigma)$  associée aux coordonnées  $\xi$ .

**Remarque 1.** La démonstration de ce résultat s'appuie sur l'algorithme d'inversion de l'annexe A qui, lui même, repose sur les théorèmes d'inversion locale et du rang constant. L'application de ces théorèmes repose sur deux conditions : une condition de rang sur les matrices jacobiniennes qui est systématiquement étudiée et sur laquelle repose principalement l'algorithme d'inversion; l'existence d'une solution aux équations algébriques implicites. Bien que cette dernière condition ne soit pas explicitement rappelée, elle est supposée remplie à chaque étape de l'algorithme d'inversion<sup>5</sup>.

Ainsi, bien que le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + u \\ 0 = \exp(x) + 1 \end{cases}$$

vérifie les diverses conditions de rang explicitement décrites dans l'algorithme d'inversion, ce système n'a pas de solution car les conditions d'existence implicitement supposées au cours de l'algorithme ne sont pas vérifiées : l'équation  $\exp(x) + 1 = 0$  n'a pas de solution bien que le jacobien  $\exp(x)$  soit régulier.

D'autre part, il se peut fort bien qu'un système algèbro-différentiel admette des solutions sans pour autant vérifier les conditions d'application du théorème ci-dessus. Par exemple

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 + u_1 + u_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 + u_1 + u_2 \\ 0 &= x_1 + x_2 \\ 0 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

est d'index infini et possède une infinité de solutions passant par la condition initiale  $x_1^0 = 1$ ,  $x_2^0 = -1$ ,  $u_1^0 = u_2^0 = 0$ . Cependant, il est clair qu'une légère perturbation du système (par exemple le rajout à la seconde équation algébrique d'un petit paramètre  $\varepsilon$ ) rend le système insoluble. Cette exemple suggère que l'existence de solution dans le cas où l'index est infini n'est pas une propriété stable par petites déformations.

Compte tenu de ce qui précède, il convient d'être prudent dans l'interprétation du théorème précédent en termes d'existence de solution : pour que le système  $(\Sigma)$  admette des solutions, il suffit que son index soit fini. Remarquons enfin que cette condition suffisante d'existence est stable par petites déformations.

---

<sup>5</sup> Remarquons que, compte tenu du caractère formel de l'algorithme d'inversion, les définitions de l'ordre relatif et de l'index peuvent très bien se passer de cette seconde condition. Cependant pour l'existence effective d'une solution et du difféomorphisme local  $\Xi$ , il convient de vérifier qu'à chaque étape les équations algébriques ont au moins une solution.

**Preuve** Cette preuve repose exclusivement sur l'algorithme d'inversion (annexe A, cas simplifié où  $y = 0$  et  $w = 0$ ) qui permet de calculer l'ordre relatif  $\alpha$  du système étendu  $(\Sigma_e)$ . Comme  $\alpha$  est fini, le lemme 6 s'applique. Ainsi, on peut compléter les fonctions  $\Phi_0(x, 0), \dots, \Phi_{\alpha-1}(x, 0)$  par une fonction  $\Psi(x)$  de sorte que

$$x \longrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 = \Phi_0(x, 0) \\ \vdots \\ \xi_\alpha = \Phi_{\alpha-1}(x, 0) \\ \zeta = \Psi(x) \end{pmatrix}$$

soit un changement de variables. Notons  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\alpha, \zeta) = \Xi(x)$ . Chaque  $\xi_k$  est de dimension  $m - \mu_{k-1}$ .  $\zeta$  est de dimension  $n - \sum_{k=1}^{\alpha} (n - \mu_{k-1})$ . Sans changer les notations,  $h_k(x, \dot{x})$  est noté  $h_k(\xi, \dot{\xi})$ ,  $\Phi_k(x, \cdot)$  est noté  $\Phi_k(\xi, \cdot)$  avec  $\xi = \Xi(x)$  et  $\dot{\xi} = \frac{\partial \Xi}{\partial x} \dot{x}$ .

Par construction, les  $\mu_0$  premières lignes de  $\bar{h}_1$  forment  $\bar{h}_0$ . On a donc

$$h_1(\xi, \dot{\xi}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_0(\xi, \dot{\xi}) \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_0(\xi, \dot{\xi}) \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\bar{h}_1(\xi, \dot{\xi}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_0(\xi, \dot{\xi}) \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\xi}_1 = \Phi_1(\xi, (\bar{h}_0(\xi, \dot{\xi}), \dot{\xi}_1)).$$

$\xi_1$  se décompose en deux parties,  $\xi_1 = (\bar{\xi}_1, \tilde{\xi}_1)$  de tailles respectives  $\mu_1 - \mu_0$  et  $n - \mu_1$ .

De même, chaque  $\xi_k$  se décompose en deux parties,  $\xi_k = (\bar{\xi}_k, \tilde{\xi}_k)$  de tailles respectives  $\mu_k - \mu_{k-1}$  et  $n - \mu_k$ . Par construction,

$$h_k(\xi, \dot{\xi}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_{k-1}(\xi, \dot{\xi}) \\ \dot{\xi}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_k(\xi, \dot{\xi}) \\ \dot{\xi}_k \\ \dot{\xi}_k \end{pmatrix}$$

avec

$$\bar{h}_k(\xi, \dot{\xi}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_{k-1}(\xi, \dot{\xi}) \\ \dot{\xi}_k \end{pmatrix}, \quad \dot{\xi}_k = \Phi_k(\xi, (\bar{h}_k(\xi, \dot{\xi}), \dot{\xi}_k))$$

Comme  $\mu_\alpha = n$ , on a

$$h_\alpha(\xi, \dot{\xi}) = \bar{h}_\alpha(\xi, \dot{\xi}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_{\alpha-1}(\xi, \dot{\xi}) \\ \dot{\xi}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_{\alpha-2}(\xi, \dot{\xi}) \\ \dot{\xi}_{\alpha-1} \\ \dot{\xi}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_0(\xi, \dot{\xi}) \\ \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_\alpha \end{pmatrix}.$$

Le rang de  $h_\alpha$  par rapport à  $\dot{\xi} = (\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_2, \dots, \dot{\xi}_{\alpha-1}, \dot{\xi}_{\alpha-1}, \dot{\xi}_\alpha, \dot{\zeta})$  est égal à  $n$ .  $h_\alpha$  est de dimension  $n$ . Nécessairement le rang de la matrice

$$\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial (\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_{\alpha-1}, \dot{\zeta})}$$

est égal à  $n - \sum_{k=1}^{\alpha} (\mu_k - \mu_{k-1}) = \mu_0$ . La dimension du vecteur  $(\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_{\alpha-1}, \dot{\zeta})$  est égale à

$$\sum_{k=1}^{\alpha-1} (n - \mu_k) + n - \sum_{k=1}^{\alpha} (n - \mu_{k-1}) = \mu_0.$$

Donc la matrice jacobienne

$$\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial (\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_{\alpha-1}, \dot{\zeta})}$$

est carrée et inversible. Ceci permet d'écrire  $\bar{h}_0(\xi, \dot{\xi}) = 0$  de la façon explicite par rapport à  $(\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_{\alpha-1}, \dot{\zeta})$  de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \theta_2(\xi, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_\alpha) \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\alpha-1} &= \theta_\alpha(\xi, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_\alpha) \\ \dot{\zeta} &= \Theta(\xi, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_\alpha). \end{cases} \quad (2.1)$$

Par construction,

$$\dot{\xi}_k = \Phi_k(\xi, (\bar{h}_0(\xi, \dot{\xi})), \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k).$$

Donc, comme  $\bar{h}_0(\xi, \dot{\xi}) = 0$ , pour  $k = 2, \dots, \alpha$

$$\theta_k(\xi, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_\alpha) = \Phi_{k-1}(\xi, (0, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k)).$$

Comme

$$h(\xi, \dot{\xi}) = h_0(\xi, \dot{\xi}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_0(\xi, \dot{\xi}) \\ \Phi_0(\xi, \bar{h}_0(\xi, \dot{\xi})) \end{pmatrix},$$

$h(\xi, \dot{\xi}) = 0$  s'écrit

$$\begin{cases} \bar{h}_0(\xi, \dot{\xi}) &= 0 \\ \Phi_0(\xi, 0) &= 0. \end{cases}$$

Avec (2.1), le changement de variable  $x \rightarrow \xi$  transforme le système  $(\Sigma)$  ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = 0 \\ \dot{\xi}_1 = \Phi_1(\xi, (0, \dot{\xi}_1)) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\alpha-1} = \Phi_{\alpha-1}(\xi, (0, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_{\alpha-1})) \\ \dot{\zeta} = \Theta(\xi, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_\alpha) \end{array} \right.$$

avec  $\Theta$  analytique. Il suffit de prendre alors

$$\phi_k(\xi, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k) = \dot{\xi}_k + \xi_{k+1} - \Phi_k(\xi, (0, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k))$$

et de remarquer que, localement,  $(\xi_1, \dots, \xi_\alpha)$  s'exprime explicitement en fonction de  $(\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_{\alpha-1})$ , pour obtenir la forme canonique  $(\Sigma_c)$  recherchée.

### Lien avec la définition de l'index dans le cas linéaire

Supposons le système  $(\Sigma)$  linéaire :  $h(x, \dot{x}) = Ax - B\dot{x} = 0$  avec  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$ . Dans [66], l'index de  $(\Sigma)$  est défini de la façon suivante :

- si le faisceau de matrice  $A - \lambda B$  est singulier (voir [24], page 21) (i.e. pour tout  $\lambda$  réel,  $\det(A - \lambda B) = 0$ ), alors l'index du système vaut  $+\infty$ .
- si le faisceau de matrice  $A - \lambda B$  est régulier ( $\det(A - \lambda B) \neq 0$ ), son index est défini à partir de la forme canonique de Kronecker du faisceau [24] ; il existe alors  $P$  et  $Q$  deux matrices carrées inversibles de taille  $n$  et un entier  $p$  entre 0 et  $n$  tels que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad PBQ = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

avec  $I_p$  et  $I_{n-p}$  les matrices identité d'ordre  $p$  et  $n - p$ ,  $E$  matrice carrée nilpotente d'ordre  $n - p$  et  $R$  matrice carrée d'ordre  $p$  ; l'indice de nilpotence de la matrice  $E$ , un invariant du faisceau  $A - \lambda B$ , est par définition l'index du système  $(\Sigma)$ .

Le lemme suivant montre que cette définition coïncide avec la définition 1 lorsque le système est linéaire.

**Lemme 1.** *Si le système  $(\Sigma)$  est linéaire, alors la définition de l'index à partir de la forme canonique de Kronecker est équivalente à la définition 1.*

**Preuve** Notons  $\iota$  l'index de  $(\Sigma)$  à partir de la forme canonique de Kronecker et  $\alpha$  l'index de  $(\Sigma)$  selon la définition 1. Il suffit de démontrer que si  $\iota$  est fini alors  $\alpha = \iota$  et que si  $\alpha$  est fini alors  $\iota = \alpha$ .

*Supposons que  $\iota < +\infty$ .* Soient  $P$  et  $Q$  deux matrices régulières de décomposition canonique :

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad PBQ = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Avec les variables  $y = (y_p, y_{n-p}) = Q^{-1}x$  ( $\Sigma$ ) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dy_p}{dt} = Ry_p \\ E \frac{dy_{n-p}}{dt} = y_{n-p}. \end{cases}$$

On peut choisir  $P$  et  $Q$  de sorte que la matrice nilpotente  $E$  soit sous forme bloc-diagonale de Jordan, les blocs diagonaux étant composés uniquement d'une sous-diagonale de 1, la taille du plus grand bloc étant l'indice de nilpotence de  $E$ . Sous cette forme, le calcul par l'algorithme d'inversion de  $\alpha$  est alors immédiat et donne  $\alpha = \iota$ .

*Supposons que  $\alpha < +\infty$ .* Le théorème 1 s'applique. Comme  $(\Sigma)$  est linéaire, le changement de variable  $\xi = \Xi(x)$  est linéaire et les fonction  $\phi_k$  sont des fonctions linéaires de  $\xi$  et  $(\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k)$ . Comme  $\phi_k$  est nulle si  $(\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k)$  est nul, nécessairement  $\phi_k$  ne dépend pas de  $\xi$  :

$$\phi_k(\xi, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k) = E_k \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_k \end{pmatrix}$$

avec  $E_k$  matrice constante de rang maximum et égal au nombre de ses lignes ( $\dim(\xi_k) \leq \dim(\xi_{k+1})$ ). Notons  $E$  la matrice formée par les  $\alpha - 1$  blocs sous-diagonaux  $(E_k)_{k=1, \dots, \alpha-1}$  :

$$E \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ E_{\alpha-1} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_\alpha \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$E$  est une matrice nilpotente et  $E^\alpha = 0$ . Un calcul par blocs montre que le seul bloc a priori non nul de  $E^{\alpha-1}$  est en bas à gauche. Ce bloc n'est autre que la matrice  $E_1 E_2 \dots E_{\alpha-1}$  qui est non nulle puisque tous les  $E_k$  sont de rang maximum. Ainsi,  $E^{\alpha-1} \neq 0$ . Le reste des calculs pour mettre le système sous la forme canonique de Kronecker ne pose pas de problème et conduit à  $\iota = \alpha$ .

**Remarque 2.** *La preuve de ce résultat montre que la forme canonique du théorème 1 dans laquelle s'écrit tout système d'index fini correspond, lorsque le système est linéaire, à celle obtenue à partir de la forme canonique de Kronecker du faisceau de matrices  $A - \lambda B$ .*

### Une forme canonique particulière pour les systèmes semi-implicites

Si  $(\Sigma)$  est semi-implicite et d'index fini, il est possible de définir encore plus précisément la forme canonique du théorème 1.

**Théorème 2.** *Soit le système  $(S)$  semi-implicite d'index fini  $\iota = \alpha + 1$  suivant*

$$(S) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ 0 = h(x, u) \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $f$  analytique à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $h$  analytique à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ . Alors

- il existe un changement de variable sur  $x$ ,  $\xi = \Xi(x)$  avec  $\Xi$  difféomorphisme et  $\xi$  se décomposant en  $\alpha + 1$  groupes de composantes

$$\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{\alpha-1}, \zeta) \quad \text{avec} \quad \dim(\xi_0) \leq \dim(\xi_1), \dots, \leq \dim(\xi_{\alpha-1}),$$

- il existe un changement de variable sur  $u$  paramétré par  $x$ ,  $v = K(x, u)$  avec  $K(x, \cdot)$  difféomorphisme et  $v$  se décomposant en  $\alpha + 1$  groupes de composantes,  $v = (v_0, v_1, \dots, v_\alpha)$  avec

$$\dim(v_1) \leq \dim(\xi_0), \quad \dots, \quad \dim(v_{\alpha-1}) \leq \dim(\xi_{\alpha-2}) \quad \text{et} \quad \dim(v_\alpha) = \dim(\xi_{\alpha-1}),$$

de sorte que le système (S) s'écrive avec ces nouvelles variables de la façon suivante

$$(S_c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_0}{dt} = \begin{cases} \frac{d\bar{\xi}_0}{dt} = v_1 \\ \frac{d\tilde{\xi}_0}{dt} = \xi_1 + \chi_1(\xi, v_0, v_1) \end{cases} \\ \vdots \\ \frac{d\xi_k}{dt} = \begin{cases} \frac{d\bar{\xi}_k}{dt} = v_{k+1} \\ \frac{d\tilde{\xi}_k}{dt} = \xi_{k+1} + \chi_{k+1}(\xi, v_0, \dots, v_{k+1}) \end{cases} \\ \vdots \\ \frac{d\xi_{\alpha-2}}{dt} = \begin{cases} \frac{d\bar{\xi}_{\alpha-2}}{dt} = v_{\alpha-1} \\ \frac{d\tilde{\xi}_{\alpha-2}}{dt} = \xi_{\alpha-1} + \chi_{\alpha-1}(\xi, v_0, \dots, v_{\alpha-1}) \end{cases} \\ \frac{d\xi_{\alpha-1}}{dt} = \frac{d\bar{\xi}_{\alpha-1}}{dt} = v_\alpha \\ \frac{d\zeta}{dt} = \Omega(\xi, v_0, \dots, v_\alpha) \\ 0 = v_0 \\ 0 = \xi_0 + \chi_0(\xi, v_0). \end{array} \right.$$

Les fonctions  $\Omega$  et  $\chi_k$  sont analytiques. Chaque fonction  $\chi_k(\xi, v_0, \dots, v_k)$  est nulle si  $(v_0, \dots, v_k)$  est nul.

**Preuve** Il est clair que  $\alpha$  est l'ordre relatif du système (S). Reprenons les fonctions  $h_\alpha$  et  $(\Phi_k)_{k=0, \dots, \alpha-1}$  de l'algorithme d'inversion.

$v = h_\alpha(x, u)$  est un changement de variable sur  $u$  paramétré par  $x$ . Par construction des fonctions  $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_\alpha$ , le vecteur  $v$  se décompose en  $\alpha + 1$  blocs  $v = (v_0, v_1, \dots, v_\alpha)$  de tailles respectives  $\mu_0, \mu_1 - \mu_0, \dots, \mu_\alpha - \mu_{\alpha-1}$  et vérifiant

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \bar{h}_k(x, u) \text{ pour } k = 0, \dots, \alpha.$$

Le lemme 6 implique qu'il existe un changement de variable sur  $x$ ,  $\xi = \Xi(x)$  tel que  $\xi$  se décompose en  $\alpha + 1$  blocs,

$$\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{\alpha-1}, \zeta)$$



de tailles respectives

$$m - \mu_0, \dots, m - \mu_\alpha, m - \sum_{k=0}^{\alpha-1} (m - \mu_k)$$

et vérifiant

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{\alpha-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0(x, 0) \\ \vdots \\ \Phi_{\alpha-1}(x, 0) \end{pmatrix}.$$

Avec ces nouvelles variables,  $\xi$  et  $v$ ,  $(S)$  devient

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \phi(\xi, v) = \frac{\partial \Xi}{\partial x}(\Xi^{-1}(\xi)) f(\Xi^{-1}(\xi), [h_\alpha(x, \cdot)]^{-1}(v)) \\ 0 = \psi(\xi, v) = h(\Xi(x), [h_\alpha(x, \cdot)]^{-1}(v)). \end{cases}$$

Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  ont des structures bien particulières.

En effet, pour  $k = 0, \dots, \alpha - 1$ , on a par construction

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ \xi_k \end{pmatrix} = h_k(x, u) = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_{k+1} \\ \Phi_{k+1}(x, v_0, \dots, v_{k+1}) \end{pmatrix}$$

(avec la convention que  $\Phi_\alpha$  est de dimension 0). Ainsi chaque  $\xi_k$  se décompose en deux groupes de composantes,  $\xi_k = (\bar{\xi}_k, \tilde{\xi}_k)$ , de dimensions respectives  $\mu_{k+1} - \mu_k$  et  $m - \mu_{k+1}$  et vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\xi}_k}{dt} &= v_{k+1} \\ \frac{d\tilde{\xi}_k}{dt} &= \xi_{k+1} + \chi_{k+1}(\xi, v_0, \dots, v_{k+1}), \end{aligned}$$

la fonction  $\chi_{k+1}(\xi, v_0, \dots, v_{k+1})$  étant égale à  $\Phi_{k+1}(\Xi^{-1}(\xi), (v_0, \dots, v_{k+1})) - \xi_{k+1}$ , nulle si  $(v_0, \dots, v_{k+1}) = 0$  (on a choisi  $\xi_{k+1} = \Phi_{k+1}(x, 0)$ ). Ceci définit la structure de  $\phi$ .

D'autre part

$$\psi(\xi, v) = \begin{pmatrix} v_0 \\ \Phi_0(x, v_0) \end{pmatrix}$$

avec  $x = \Xi^{-1}(\xi)$ . Donc

$$\psi(\xi, v) = \begin{pmatrix} v_0 \\ \xi_0 + \chi_0(\xi, v_0) \end{pmatrix}$$

avec  $\chi_0(\xi, v_0) = \Phi_0(\Xi^{-1}(\xi), v_0) - \xi_0$ . Ceci définit la structure de  $\psi$  et termine la preuve.

## 2.4 Problème de la condition initiale

**Définition 2.** *Considérons  $(\Sigma)$ ,  $h(x, \dot{x}) = 0$ . Une condition initiale  $x^0$  est dite régulière si et seulement s'il existe une unique solution de  $(\Sigma)$  passant par  $x^0$  à l'instant  $t = 0$ .*

**Théorème 3.** *Supposons que l'index  $\alpha$  du système  $(\Sigma)$  soit fini. Soit*

$$(\xi_1, \dots, \xi_\alpha, \zeta) = (\Xi_1(x), \dots, \Xi_\alpha(x), \Psi(x))$$

*un changement de variables canonique qui transforme  $(\Sigma)$  dans la forme canonique  $(\Sigma_c)$  du théorème 1. Alors la condition initiale  $x^0$  est régulière si et seulement si*

$$\begin{pmatrix} \Xi_1(x^0) \\ \vdots \\ \Xi_\alpha(x^0) \end{pmatrix} = 0.$$

**Preuve** Il est clair que le long de toute solution  $x$  de  $(\Sigma)$ ,  $\Xi_1(x) = 0, \dots, \Xi_\alpha(x) = 0$ . L'implication directe est donc évidente. Supposons donc que  $\Xi_1(x^0) = 0, \dots, \Xi_\alpha(x^0) = 0$ . Dans les coordonnées canoniques  $\xi$ , le système se ramène à l'intégration de l'équation différentielle ordinaire  $\dot{\zeta} = \Omega(\zeta, 0, \dots, 0)$ . L'existence et l'unicité de la solution résulte alors du théorème de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles ordinaires.

Ce lemme montre qu'il ne suffit pas que la condition initiale vérifie les équations du système pour qu'une solution existe. Si l'index est supérieur à 1 strictement, la condition initiale doit vérifier des relations algébriques supplémentaires et indépendantes des équations du système<sup>6</sup>. Si l'on adopte le point de vue de Rheinboldt [74], un système algèbro-différentiel d'index fini est un système différentiel ordinaire sur une sous-variété. Ici, cette sous-variété est définie dans les coordonnées  $\xi$  par  $\xi_1 = 0, \dots, \xi_\alpha = 0$ . Le lemme précédent veut simplement dire que, si la condition initiale appartient à cette sous-variété, le système admet une solution unique et si la condition initiale n'y appartient pas, le système n'admet pas de solution.

En pratique, le problème de l'obtention effective des conditions algébriquement indépendantes  $\Xi_1(x^0) = 0, \dots, \Xi_\alpha(x^0) = 0$  est loin d'être évident. Dans [63], Pantelides propose un algorithme qui permet de sélectionner des équations qu'il convient de dériver pour obtenir ces conditions supplémentaires. La méthode qu'il propose est fondée sur l'hypothèse structurelle que toutes les fonctions manipulées sont de rang maximum par rapport aux variables dont elles dépendent effectivement. Une telle hypothèse permet de simplifier notablement les calculs et d'utiliser des techniques empruntées à la théorie des graphes. Par contre, comme le souligne Pantelides [63], le prix à payer est qu'on n'est pas sûr d'obtenir toutes les conditions supplémentaires.

---

<sup>6</sup>Ces conditions supplémentaires sont en fait algébriquement et différentiellement non indépendantes du système  $(\Sigma)$ .

Par exemple, sur le premier modèle de flash du début de ce chapitre où les régulations sont parfaites, l'algorithme proposé par Pantelides [63] considère que la partie algébrique est inversible alors qu'elle ne l'est pas car les fonctions thermodynamiques  $h^L$ ,  $h^V$ ,  $\mu^L$  et  $\mu^V$  sont homogènes de degré 0 par rapport à  $L$  et  $V$ . Une telle analyse conclut à un index égal à 1 sans condition restrictive sur la condition initiale  $(x^0, y^0)$  autre que celle de vérifier les équations algébriques  $g(x^0, y^0) = 0$ . En fait, l'index vaut 2 et il convient d'imposer à la condition initiale de vérifier en plus deux équations algébriquement indépendantes de  $g(x^0, y^0) = 0$ .

## 2.5 Index et méthodes numériques d'intégration

La méthode numérique la plus utilisée pour résoudre les systèmes algébro-différentiels est la méthode de Gear [26, 8]. Au départ, cette méthode a été développée pour intégrer numériquement les systèmes différentiels ordinaires "raides", systèmes qui possèdent plusieurs échelles de temps différentes<sup>7</sup>. Dans [27], Gear montre que sa méthode est particulièrement adaptée à la résolution de systèmes algébro-différentiels semi-implicites d'index 1,  $\dot{x} = f(x, y)$ ,  $0 = g(x, y)$  avec  $\frac{\partial}{\partial y}g$  inversible. En effet, elle permet d'intégrer directement le système sous sa forme brute. Ceci est très avantageux si sa taille est grande et sa structure creuse comme c'est le cas pour notre modèle de simulation de colonne.

Cependant, lorsque l'index est supérieur à 2, la méthode de Gear ne fonctionne plus si bien. Dans un papier récent [68], Petzold fait le point sur la résolution numérique de systèmes algébro-différentiels par la méthode de Gear : si l'index du système vaut 0 ou 1, la méthode converge [29] ; si le système est semi-implicite d'index 0, 1 ou 2, la méthode converge [50, 28] ; si l'index du système est supérieur ou égal à 3 et si ce dernier est non linéaire, la méthode diverge en général et peut fournir des trajectoires fausses.

L'objet de cette sous-section est de montrer que ces résultats se comprennent très simplement dès lors qu'on utilise les formes canoniques des théorèmes 1 et 2. Pour des raisons de simplicité, nous ne considérons que la méthode de Gear d'ordre 1 qui correspond au schéma implicite de discrétisation d'Euler. Qualitativement, les phénomènes numériques sont les mêmes pour des schémas d'ordre supérieur.

Soit le système implicite  $(\Sigma)$ ,  $h(x, \dot{x}) = 0$  d'index fini  $\alpha$ . Le schéma numérique de résolution est le suivant :  $x^n$ , une approximation de la solution à l'instant  $t^n$ ,  $x(t^n)$ , étant supposée connue, l'approximation  $x^{n+1}$  à l'instant  $t^{n+1} = t^n + h$  de la solution,  $x(t^{n+1})$  est alors fournie en remplaçant  $\dot{x}(t^{n+1})$ , par  $(x^{n+1} - x^n)/h$ , c'est à dire en résolvant par rapport à  $x^{n+1}$

$$h \left( x^{n+1}, \frac{x^{n+1} - x^n}{h} \right) = 0. \quad (2.2)$$

<sup>7</sup>Le système singulièrement perturbé du théorème de Tikhonov (annexe D) est un exemple typique de système "raide" (en anglais "stiff").

L'idée de base consiste à analyser, dans des coordonnées canoniques, le schéma de discrétisation construit sur les coordonnées a priori non canoniques  $x$ . Considérons la forme canonique  $(\Sigma_c)$  du théorème 1 associée au changement de variable

$$x \longrightarrow \xi = \Xi(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\alpha \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Notons  $\xi^n = \Xi(x^n)$ ,  $\xi^{n+1} = \Xi(x^{n+1})$ . Alors

$$\left[ \frac{\partial \Xi}{\partial x} \right]_{x^{n+1}} (x^{n+1} - x^n) = \xi^{n+1} - \xi^n + O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)$$

où  $O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)$  représente les termes d'ordres supérieurs ou égaux à 2 en  $\xi^{n+1} - \xi^n$ . Ainsi  $\xi^{(n+1)}$  est approximé par

$$\frac{\xi^{n+1} - \xi^n + O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)}{h}$$

Le schéma (2.2) s'écrit dans les coordonnées canoniques

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1^{n+1} = 0 \\ \xi_2^{n+1} = \phi_1 \left( \xi^{n+1}, \frac{\xi_1^{n+1} - \xi_1^n + O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)}{h} \right) \\ \vdots \\ \xi_\alpha^{n+1} = \phi_{\alpha-1} \left( \xi^{n+1}, \frac{\xi_1^{n+1} - \xi_1^n + O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)}{h}, \dots, \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. \dots, \frac{\xi_{\alpha-1}^{n+1} - \xi_{\alpha-1}^n + O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)}{h} \right) \\ \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n + O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)}{h} = \Omega \left( \xi^{n+1}, \frac{\xi_1^{n+1} - \xi_1^n + O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)}{h}, \dots, \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. \dots, \frac{\xi_\alpha^{n+1} - \xi_\alpha^n + O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)}{h} \right). \end{array} \right.$$

Remarquons sur ce système que, si des termes d'ordre 2,  $O(\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2)$  sont absents

et si  $(\xi_1^n, \dots, \xi_\alpha^n) = 0$ , le système ci-dessus se réduit à<sup>8</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1^{n+1} = 0 \\ \xi_2^{n+1} = 0 \\ \vdots \\ \xi_\alpha^{n+1} = 0 \\ \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{h} = \Omega(\zeta^{n+1}, 0, \dots, 0). \end{array} \right.$$

Dans ce cas, le schéma implicite d'Euler sur  $x$ , induit sur la dynamique réelle du système,  $\dot{\zeta} = \Omega(\zeta, 0, \dots, 0)$ , ce même schéma de discrétisation d'Euler dont on connaît la convergence. Nous voyons donc que si les relations entre  $x$  et  $\xi$  sont affines, les termes d'ordre 2 disparaissent. Dans ce cas, le schéma implicite de discrétisation d'Euler converge quel que soit l'index. Nous retrouvons donc les résultats de convergence établis par Sincovec et al. [81] sur les systèmes algébro-différentiels linéaires.

Nous allons voir que les difficultés numériques viennent du fait qu'en général, le changement de variables,  $\xi = \Xi(x)$ , est non linéaire et introduit, au niveau de la discrétisation, des termes d'ordre 2 liés à la courbure de  $\Xi$ .

Notre analyse de la convergence repose sur deux points. Tout d'abord, il faut s'assurer que  $(\xi_1^{n+1}, \dots, \xi_\alpha^{n+1})$  reste proche de 0, i.e. que le schéma numérique ne nous écarte pas trop de la variété définie par  $\xi_0 = 0, \dots, \xi_\alpha = 0$  sur laquelle se trouve la solution. Ensuite, il faut vérifier que le schéma numérique induit sur la dynamique réelle du système  $\dot{\zeta} = \Omega(\zeta, 0, \dots, 0)$  est convergent.

Précisons enfin que notre analyse est générique dans le sens où nous ne faisons aucune hypothèse sur le changement de variables  $x = \Xi^{-1}(\xi)$ . Toutefois, pour des changements de variables particuliers  $\Xi^{-1}$ , des simplifications peuvent apparaître comme le suggèrent les paragraphes qui précèdent où  $\Xi^{-1}$  est supposé affine.

## Les systèmes implicites généraux

**Preuve de la convergence lorsque l'index est égal à 1** Supposons que l'index  $\alpha$  soit égal à 1. Nous montrons que, si  $\xi_1^n = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \xi_1^{n+1} &= 0 \\ \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{h} &= \Omega(\zeta^{n+1}, 0) + O(h). \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Il suffit d'utiliser le fait que  $\phi_i(\xi, \dot{\xi}_0, \dots, \dot{\xi}_{i-1}) = 0$  dès que  $(\dot{\xi}_0, \dots, \dot{\xi}_{i-1}) = 0$ .

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1^{n+1} = 0 \\ \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n + O(\|\xi_1^{n+1} - \xi_1^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h} = \\ \Omega\left(\zeta^{n+1}, \frac{\xi_1^{n+1} - \xi_1^n + O(\|\xi_1^{n+1} - \xi_1^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h}\right). \end{array} \right.$$

Donc

$$\xi_1^{n+1} = 0 \text{ et } \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{h} = \Omega(\zeta^{n+1}, 0) + O\left(h + \frac{\|\xi_1^n\|^2}{h}\right).$$

Comme  $\xi_1^n = 0$ , on voit que le schéma numérique (2.2) induit, à un  $O(h)$  près, sur l'équation  $\zeta = \Omega(\zeta, 0, \dots, 0)$  le schéma d'Euler implicite.

**Divergence possible lorsque l'index est supérieur ou égal à 2** Supposons que l'index  $\alpha$  soit égal à 2, les cas où  $\alpha > 2$  étant très similaires. Nous montrons que, même si  $x^n = x(t_n)$ , alors

$$\begin{aligned} \xi_1^{n+1} &= 0 \\ \xi_2^{n+1} &= O(h) \end{aligned}$$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{h} = \Omega(\zeta^{n+1}, 0, 0) + O(1).$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1^{n+1} = 0 \\ \xi_2^{n+1} = \phi_1\left(\zeta^{n+1}, \frac{\xi_1^{n+1} - \xi_1^n + O(\|\xi_1^{n+1} - \xi_1^n\|^2 + \|\xi_2^{n+1} - \xi_2^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h}\right) \\ \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n + O(\|\xi_1^{n+1} - \xi_1^n\|^2 + \|\xi_2^{n+1} - \xi_2^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h} = \\ \Omega\left(\zeta^{n+1}, \frac{\xi_1^{n+1} - \xi_1^n + O(\|\xi_1^{n+1} - \xi_1^n\|^2 + \|\xi_2^{n+1} - \xi_2^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h}, \right. \\ \left. \frac{\xi_2^{n+1} - \xi_2^n + O(\|\xi_1^{n+1} - \xi_1^n\|^2 + \|\xi_2^{n+1} - \xi_2^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h}\right). \end{array} \right.$$

Nous sommes dans le cas le plus favorable où  $x^n = x(t^n)$ . Ainsi  $\xi^n = \xi(t^n)$  et donc  $\xi_1^n = 0$  et  $\xi_2^n = 0$ . Il est clair que  $\xi_1^{n+1} = 0$ . En revanche, à cause des termes du second ordre,  $\xi_2^{n+1}$  n'a aucune raison d'être nul.

Soient  $r_2$  et  $p$  tel que  $\xi_2^{n+1} = O(h^{r_2})$  et

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{h} - \Omega(\zeta^{n+1}, 0, 0) = O(h^p).$$

Avec ces notations  $\zeta^{n+1} - \zeta^n = O(h^{\min(1, p+1)})$ .

$$\xi_2^{n+1} = \phi_1 \left( \xi^{n+1}, \frac{O(\|\xi_2^{n+1} - \xi_2^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h} \right)$$

implique que, génériquement<sup>9</sup>,  $r_2 = \min(2r_2 - 1, 2 \min(1, p + 1) - 1)$ . De même,

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n + O(\|\xi_2^{n+1}\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h} = \Omega \left( \zeta^{n+1}, \frac{O(\|\xi_2^{n+1}\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h}, \frac{\xi_2^{n+1} + O(\|\xi_2^{n+1}\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h} \right)$$

implique que, génériquement,  $p = \min(2 \min(1, p + 1) - 1, 2r_2 - 1, r_2 - 1)$ . Ainsi  $r_2 = 1$  et  $p = 0$ .

Le schéma en  $x$  n'est donc pas convergent car il induit sur la dynamique réelle en  $\zeta$  une approximation à l'ordre zéro en  $h$  du schéma implicite d'Euler et peut fournir des trajectoires numériques complètement fausses.

### Les systèmes semi-implicites : convergence si l'index vaut 2

Supposons le système semi-implicite et l'index égal à 2. Nous montrons que, si  $\xi_1^n = 0$  et  $\xi_2^n = O(h)$ , alors

$$\begin{aligned} \xi_1^{n+1} &= 0 \\ \xi_2^{n+1} &= O(h) \end{aligned}$$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{h} = \Omega(\zeta^{n+1}, 0, 0) + O(h).$$

La convergence du schéma sur les systèmes semi-implicites d'index 2 tient au fait que, sur leur forme canonique particulière, la dynamique réelle du système  $\dot{\zeta} = \Omega(\zeta, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2)$  ne dépend pas de  $\dot{\xi}_2$ . Pour s'en apercevoir, il suffit de réécrire la forme canonique particulière aux systèmes semi-implicites du théorème 2 comme une forme canonique générale du théorème 1.

Reprenons les calculs du paragraphe précédent en supposant que  $\Omega$  ne dépend pas de  $\dot{\xi}_2$ . Il est clair que  $\xi_1^{n+1} = 0$ .

<sup>9</sup>Le fait que le rang de  $\phi_1(\xi, \dot{\xi}_1)$  par rapport à  $\dot{\xi}_1$  est maximum s'avère ici *indispensable* pour conclure de façon générique, i.e. quel que soit le changement de variables  $x = \Xi^{-1}(\xi)$ .

Soient  $r_2$  et  $p$  tel que  $\xi_2^{n+1} = O(h^{r_2})$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{h} - \Omega(\zeta^{n+1}, 0, 0) = O(h^p).$$

Puisque  $\xi_2^n = O(h)$

$$\xi_2^{n+1} = \phi_1 \left( \xi^{n+1}, \frac{O(\|\xi_2^{n+1} - \xi_2^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h} \right)$$

implique que, génériquement,  $r_2 = \min(2r_2 - 1, 2 \min(1, p + 1) - 1, 1)$ . De même,

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n + O(\|\xi_2^{n+1} - \xi_2^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h} = \Omega \left( \zeta^{n+1}, \frac{O(\|\xi_2^{n+1} - \xi_2^n\|^2 + \|\zeta^{n+1} - \zeta^n\|^2)}{h} \right)$$

implique que, génériquement,  $p = \min(2 \min(1, p + 1) - 1, 2(\min(r_2, 1) - 1))$ . Ainsi  $r_2 = 1$  et  $p = 1$ .

## 2.6 Un algorithme formel explicite de réduction d'index

L'intégration numérique des systèmes d'index élevé se heurte à un problème numérique de fond. En effet, toute résolution numérique passe nécessairement par une dérivation numérique, une opération hautement instable. Dans certains cas, il peut apparaître donc souhaitable de remplacer ces dérivations numériques, source de sérieuses difficultés, par des dérivations formelles qui permettent de réduire l'index.

Nous avons vu qu'un système algèbro-différentiel d'index fini est, en fait, un système différentiel ordinaire sur une sous-variété [74]. La détermination de la sous-variété et du champ de vecteur sur cette sous-variété nécessite un changement de coordonnées et l'inversion de systèmes algébriques (cf. la démonstration du théorème 1, page 45). Sauf cas particulier, il n'est pas possible de calculer explicitement, à la fois des coordonnées locales sur la sous-variété et le champs de vecteurs dans ces coordonnées locales. Ramener la résolution numérique à celle des équations différentielles sur cette sous-variété n'est donc, en général, pas très réaliste.

Cependant, nous allons montrer ci-dessous qu'il est néanmoins possible, en conservant les variables naturelles  $x$  du système, de ramener, explicitement et avec des dérivations formelles, la résolution d'un système d'index fini à la résolution d'un système d'index 0 ou 1 pour lequel des méthodes numériques convergentes existent.

### Les systèmes d'index inférieur

Supposons que le système  $(\Sigma)$ ,  $h(x, \dot{x}) = 0$ , soit d'index fini  $\alpha$ . Soient  $h_k = (\bar{h}_k, \tilde{h}_k)$ , les fonctions qui interviennent dans l'algorithme d'inversion. pour le système étendu  $(\Sigma_e)$   $\dot{x} = u$ ,  $h(x, \dot{x}) = 0$ .



Considérons  $k < \alpha$ . Par construction  $h_{k+1} = 0$  est équivalent à

$$\bar{h}_k = 0 \text{ et } \frac{d\tilde{h}_k}{dt} = 0,$$

puisque

$$h_{k+1}(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_k(x, \dot{x}) \\ \frac{d}{dt}[\Phi_k(x, 0)] \end{pmatrix}$$

avec  $\tilde{h}_k(x, \dot{x}) = \Phi_k(x, \bar{h}_k(x, \dot{x}))$ . Ainsi les solutions du système algébro-différentiel  $h_k(x, \dot{x}) = 0$  sont les mêmes que celles du système algébro-différentiel  $h_{k+1}(x, \dot{x}) = 0$  pourvu que la condition initiale  $(x^0, \dot{x}^0)$  vérifie  $\tilde{h}_k(x^0, \dot{x}^0) = 0$ .  $\tilde{h}_k(x^0, \dot{x}^0)$  est composé de  $n - \mu_k$  intégrales premières du système  $h_{k+1}(x, \dot{x}) = 0$ .

Ceci implique que, pour  $1 \leq k \leq \alpha$ , les solutions de  $(\Sigma)$ ,  $h_0(x, \dot{x}) = h(x, \dot{x}) = 0$ , sont les mêmes que celles du système d'index  $\alpha - k$ ,  $h_k(x, \dot{x}) = 0$  pourvu que la condition initiale  $(x^0, \dot{x}^0)$  vérifie

$$\begin{pmatrix} \tilde{h}_0(x^0, \dot{x}^0) \\ \vdots \\ \tilde{h}_{k-1}(x^0, \dot{x}^0) \end{pmatrix} = 0.$$

Il suffit de prendre  $k = \alpha$  ou  $\alpha - 1$  pour ramener, sans changement de variable sur  $x$ , la résolution du système  $(\Sigma)$  d'index  $\alpha$  à celle d'un système d'index 0 ou 1 pour lequel la méthode de Gear converge.

Pour qu'une telle réduction soit utilisable, nous devons être capables de définir les fonctions  $(h_k(x, \dot{x}))_{k=1, \dots, \alpha}$  de façon explicite en fonction des dérivées partielles successives de  $h = h_0$  par rapport à  $x$  et  $\dot{x}$ .

### Détermination explicite des fonctions $h_k$ de l'algorithme d'inversion

Soient  $(h_k = (\bar{h}_k, \tilde{h}_k))_{k=0, \dots, \alpha}$ , les fonctions qui interviennent dans l'algorithme d'inversion pour le système étendu  $(\Sigma_e) : \dot{x} = u, h(x, \dot{x}) = 0$ .

Soit  $k < \alpha$ . Supposons connue  $h_k$ .  $h_{k+1}$  peut être déterminée à partir de  $h_k$  explicitement. Il suffit de reprendre la construction de  $h_{k+1}$  à partir de  $h_k$  :

$$h_{k+1}(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_k(x, \dot{x}) \\ \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right)_{(x,0)} \dot{x} \end{pmatrix}.$$

$\mu_k$  est le rang de  $\frac{\partial h_k}{\partial \dot{x}}$ . Alors, quitte à opérer des permutations sur les composantes du vecteur  $x$  et à changer l'ordre des équations, on peut supposer que, de façon similaire

à la décomposition  $h_k = (\bar{h}_k, \tilde{h}_k)$ ,  $x$  se décompose en deux parties,  $x = (\bar{x}_k, \tilde{x}_k)$ , de tailles respectives  $\mu_k$  et  $m - \mu_k$ , de sorte que le rang de

$$\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial \dot{\tilde{x}}_k}$$

soit égal à  $\mu_k$ .

La fonction  $\Phi_k$  est définie de façon implicite par

$$\tilde{h}_k(x, \dot{x}) = \Phi_k(x, \bar{h}_k(x, \dot{x}))$$

En revanche ses dérivées partielles peuvent être calculées explicitement. En effet, en dérivant par rapport à  $\dot{\tilde{x}}_k$  l'équation précédente, on obtient

$$\frac{\partial \tilde{h}_k}{\partial \dot{\tilde{x}}_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \bar{h}_k} \frac{\partial \bar{h}_k}{\partial \dot{\tilde{x}}_k}.$$

D'où

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \bar{h}_k} = \frac{\partial \tilde{h}_k}{\partial \dot{\tilde{x}}_k} \left[ \frac{\partial \bar{h}_k}{\partial \dot{\tilde{x}}_k} \right]^{-1}.$$

En dérivant cette fois par rapport à  $x$ , on obtient

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{h}_k}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{h}_k}{\partial \dot{\tilde{x}}_k} \left[ \frac{\partial \bar{h}_k}{\partial \dot{\tilde{x}}_k} \right]^{-1} \frac{\partial \bar{h}_k}{\partial x}.$$

Ce qui détermine de façon explicite par rapport aux dérivées partielles de  $h_k = (\bar{h}_k, \tilde{h}_k)$  la fonction  $h_{k+1}$  :

$$h_{k+1} = \left( \begin{array}{c} \bar{h}_k \\ \frac{\partial \tilde{h}_k}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial \tilde{h}_k}{\partial \dot{\tilde{x}}_k} \left[ \frac{\partial \bar{h}_k}{\partial \dot{\tilde{x}}_k} \right]^{-1} \frac{\partial \bar{h}_k}{\partial x} \dot{x} \end{array} \right).$$

Il est alors clair que l'on peut définir de façon explicite chaque  $h_k$  en fonction des dérivées partielles d'ordre  $k$  de  $h$ .

### Application sur un modèle dynamique de flash d'index 2

Considérons le système algèbro-différentiel représentant le comportement dynamique d'un ballon de flash avec des régulations parfaites de pression et de niveau (cf. le début de ce

chapitre) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n} = F - L - V \\ \dot{h} = Fh^F - (\sum_{i=1}^c L_i) h^L(L, T, P) - (\sum_{i=1}^c V_i) h^V(V, T, P) \\ n = \frac{n^L}{\sum_{i=1}^c L_i} L + \frac{n^{tot} - n^L}{\sum_{i=1}^c V_i} V \\ h = n^L h^L(L, T, P) + (n^{tot} - n^L) h^V(V, T, P) \\ \mu^L(L, T, P) = \mu^V(V, T, P) \end{array} \right.$$

les inconnues étant  $x = (n, h, L, V, T)$  ( $F, Fh^F, P, n^L$  et  $n^{tot}$  sont des paramètres constants). Calculons les fonctions  $h_k$  pour ce système que nous écrivons  $h_0(x, \dot{x}) = 0$ .

$\mu_0$ , le rang de  $h_0$  par rapport à  $\dot{x}$ , est égal à  $c + 1$ . Il est clair que

$$\bar{h}_0(x, \dot{x}) = \left( \begin{array}{c} \dot{n} - F - L - V \\ \dot{h} - Fh^F - (\sum_{i=1}^c L_i) h^L(L, T, P) - (\sum_{i=1}^c V_i) h^V(V, T, P) \end{array} \right)$$

et

$$\tilde{h}_0(x, \dot{x}) = \left( \begin{array}{c} \frac{n^L}{\sum_{i=1}^c L_i} L + \frac{n^{tot} - n^L}{\sum_{i=1}^c V_i} V - n \\ n^L h^L(L, T, P) + (n^{tot} - n^L) h^V(V, T, P) - h \\ \mu^L(L, T, P) - \mu^V(V, T, P) \end{array} \right).$$

$h_1$  se calcule directement :

$$h_1(x, \dot{x}) = \left( \begin{array}{c} \bar{h}_0(x, \dot{x}) \\ \frac{d}{dt}[\tilde{h}_0(x)] \end{array} \right)$$

avec

$$\frac{d\tilde{h}_0}{dt}(x, \dot{x}) = \left( \begin{array}{c} \frac{n^L}{\sum_{i=1}^c L_i} \left( \dot{L} - \frac{\sum_{i=1}^c \dot{L}_i}{\sum_{i=1}^c L_i} L \right) + \frac{n^{tot} - n^L}{\sum_{i=1}^c V_i} \left( \dot{V} - \frac{\sum_{i=1}^c \dot{V}_i}{\sum_{i=1}^c V_i} V \right) - \dot{n} \\ n^L \left( \frac{\partial h^L}{\partial L} \dot{L} + \frac{\partial h^L}{\partial T} \dot{T} \right) + (n^{tot} - n^L) \left( \frac{\partial h^V}{\partial V} \dot{V} + \frac{\partial h^V}{\partial T} \dot{T} \right) - \dot{h} \\ \frac{\partial \mu^L}{\partial L} \dot{L} + \frac{\partial \mu^L}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial \mu^V}{\partial V} \dot{V} - \frac{\partial \mu^V}{\partial T} \dot{T} \end{array} \right).$$

$\mu_1$ , le rang de  $h_1$  par rapport à  $\dot{x}$ , est égal  $\dim(x) - 2$ , car la dépendance de  $\tilde{h}_0$  par rapport à  $L$  est homogène de degré 0 et ainsi que celle par rapport à  $V$ . La permutation des lignes

de  $h_1 = (\bar{h}_1, \tilde{h}_1)$  avec

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} \dot{n} - F - L - V \\ \dot{h} - Fh^F - (\sum_{i=1}^c L_i) h^L(L, T, P) - (\sum_{i=1}^c V_i) h^V(V, T, P) \\ \frac{\partial \mu^L}{\partial L} \dot{L} + \frac{\partial \mu^L}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial \mu^V}{\partial V} \dot{V} - \frac{\partial \mu^V}{\partial T} \dot{T} \\ \frac{n^L}{\sum_{i=1}^c L_i} \left( \dot{L}_2 - \frac{\sum_{i=1}^c \dot{L}_i}{\sum_{i=1}^c L_i} L_2 \right) + \frac{n^{tot} - n^L}{\sum_{i=1}^c V_i} \left( \dot{V}_2 - \frac{\sum_{i=1}^c \dot{V}_i}{\sum_{i=1}^c V_i} V_2 \right) - \dot{n}_2 \\ \vdots \\ \frac{n^L}{\sum_{i=1}^c L_i} \left( \dot{L}_c - \frac{\sum_{i=1}^c \dot{L}_i}{\sum_{i=1}^c L_i} L_c \right) + \frac{n^{tot} - n^L}{\sum_{i=1}^c V_i} \left( \dot{V}_c - \frac{\sum_{i=1}^c \dot{V}_i}{\sum_{i=1}^c V_i} V_c \right) - \dot{n}_c \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{n^L}{\sum_{i=1}^c L_i} \left( \dot{L}_1 - \frac{\sum_{i=1}^c \dot{L}_i}{\sum_{i=1}^c L_i} L_1 \right) + \frac{n^{tot} - n^L}{\sum_{i=1}^c V_i} \left( \dot{V}_1 - \frac{\sum_{i=1}^c \dot{V}_i}{\sum_{i=1}^c V_i} V_1 \right) - \dot{n}_1 \\ n^L \left( \frac{\partial h^L}{\partial L} \dot{L} + \frac{\partial h^L}{\partial T} \dot{T} \right) + (n^{tot} - n^L) \left( \frac{\partial h^V}{\partial V} \dot{V} + \frac{\partial h^V}{\partial T} \dot{T} \right) - \dot{h} \end{pmatrix},$$

associée à la permutation des composantes de  $x = (\bar{x}_1, \tilde{x}_1)$  avec

$$\bar{x}_1 = (n, h, T, L_2, \dots, L_c, V_2, \dots, V_c) \quad \text{et} \quad \tilde{x}_1 = (L_1, V_1),$$

implique que la matrice carrée

$$\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \tilde{x}_1}$$

est de rang  $\mu_1 = \dim(x) - 2$ . Comme nous l'avons vu, le calcul de  $h_2$  est explicite :

$$h_2(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 \\ \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial \tilde{x}_1} \left[ \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right]^{-1} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial x} \dot{x} \end{pmatrix}.$$

$h_2$  est génériquement de rang maximum par rapport à  $\dot{x}$ , i.e.  $\mu_2 = 0$ . L'index de ce modèle de flash est égal à 2.

Pour la simulation, il n'est pas utile d'aller jusqu'à la détermination de  $h_2$ . Il suffit d'intégrer, par exemple par la méthode de Gear, le système algèbro-différentiel implicite  $h_1(x, \dot{x}) = 0$  d'index 1 en imposant à la valeur initiale  $x^0$  de vérifier  $\tilde{h}_0(x^0) = 0$ . Remarquons que  $h_1$  s'obtient par une simple dérivation par rapport au temps des équations algébriques du système de départ.

### Conclusion

Comme le suggère l'exemple du flash, la réduction formelle d'un système d'index supérieur ou égal à 3 par l'algorithme précédent, peut se heurter à des difficultés pratiques. Tout d'abord, la détermination du rang  $\mu_k$  et la partition de  $x$  en  $(\bar{x}_k, \tilde{x}_k)$  est formelle, ce qui, en pratique, peut être source de problèmes. Ensuite, l'imbrication des calculs rend, a priori, la complexité des dérivations formelles de plus en plus importante d'une étape à l'autre.

A ce niveau, comme le suggère Pantelides [63], des méthodes fondées sur la théorie des graphes et sur l'hypothèse structurelle selon laquelle le rang de toute fonction par rapport aux variables dont elle dépend effectivement est maximum, doit permettre de simplifier les calculs. En fait, l'algorithme du graphe de Kasinski et Lévine [41] est généralisable aux systèmes  $(S)$  où les commandes interviennent non linéairement. Sa généralisation doit permettre de simplifier l'algorithme d'inversion, de calculer rapidement les rangs  $\mu_k$  et les fonctions  $h_k$ , de réinterpréter et peut-être d'étendre les résultats de Pantelides [63].



## Part II

# Commande en qualité des colonnes à distiller





# Préliminaires bibliographiques

Nous commençons cette seconde partie par une revue bibliographique sommaire relative à la commande en qualité des colonnes à distiller. A partir de quelques articles significatifs, nous mettons surtout l'accent sur les différentes voies d'approche, les résultats qu'elles donnent, leurs inconvénients et leurs avantages.

## Rappel du problème

Sur la figure ci-dessous, nous rappelons (voir [79], pages 143 et 144), pour une colonne à distiller standard, les cinq variables de réglage ( $Q^c$ ,  $D$ ,  $R$ ,  $L$  et  $V^{10}$ ), les commandes, et les cinq variables à commander ( $P_2$ ,  $N_1$ ,  $N_n$ ,  $y_1$  et  $y_2$ ), les sorties<sup>11</sup>.

La commande des compositions du distillat et du résidu s'inscrit dans un problème plus vaste avec 5 commandes et 5 sorties. Sauf rares exceptions, l'ensemble des études sur le sujet (voir par exemple [83]) considère que la pression en tête de la colonne,  $P_2$ , est régulée correctement par la puissance de condensation,  $Q^c$ , avec un régulateur simple en général à grand gain.  $P_2$  peut donc être supposée constante. Cette hypothèse est raisonnable car, en pratique, la régulation de la pression ne pose pas de problème particulier. Le nombre d'entrées et de sorties est ainsi ramené à 4. Les commandes sont  $D$ ,  $R$ ,  $L$  et  $V$ . Les sorties sont  $N_1$ ,  $N_n$ ,  $y_1$  et  $y_2$ .

Comme les dynamiques des niveaux sont, avec une bonne approximation, linéaires et du premier ordre,

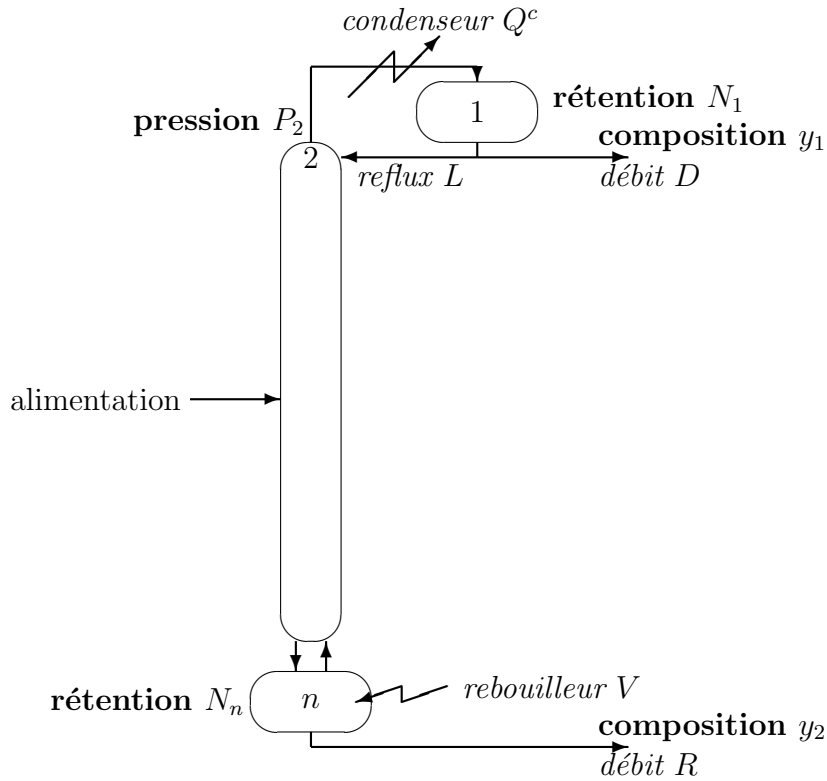
$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= V - L - D \\ \frac{dN_n}{dt} &= L + F - V - R\end{aligned}$$

(dans ces équations, nous avons pris les hypothèses de Lewis avec une alimentation de débit  $F$  liquide à température de bulle), ces derniers peuvent être régulés sans difficulté.

---

<sup>10</sup> $V$ , le débit de vapeur qui sort du rebouilleur, est, en bonne approximation, proportionnel à la puissance de rebouillage.

<sup>11</sup> Ces cinq commandes ne correspondent pas aux degrés de liberté issu d'une analyse du cas stationnaire. Si les caractéristiques de l'alimentation sont fixées, ces degrés de liberté statiques sont au nombre de trois :  $P_2$ ,  $L$  et  $V$  par exemple.



Les 5 variables de *commande* ( $Q^c, D, R, L, V$ ) et les 5 variables de *sortie* ( $P_2, N_1, N_n, y_1, y_2$ ) pour une colonne à distiller pseudo-binaire.

Un régulateur proportionnel et intégral (PI) classique qui agit soit sur  $L, D$  ou sur  $L + D$ , maintient  $N_1$  autour de sa consigne. Un autre régulateur PI qui agit soit sur  $V, R$  ou sur  $V + R$  maintient  $N_n$  autour de sa consigne. En pratique, ces régulations de niveaux n'engendrent aucune difficulté.

Ainsi, la plupart des auteurs ont concentré leurs efforts sur le problème à deux entrées et deux sorties : la régulation de  $y_1$  et  $y_2$  par les deux commandes laissées libres. Shinsky [79] montre que des couplages importants existent. Notamment, commander  $y_1$  et  $y_2$  simultanément comporte des difficultés non encore résolues. Cette étude bibliographique est relative à ce problème.

Nous avons choisi de partager les travaux déjà effectués en deux approches : la première que nous qualifions d'*externe*, car elle utilise uniquement les mesures  $y_1$  et  $y_2$  pour calculer les commandes ; la seconde que nous qualifions d'*interne*, car elle fait intervenir des états (ou plus généralement des états partiels selon la dénomination classique en théorie des systèmes) qui peuvent être obtenus à partir de mesures à l'intérieur de la colonne. Cette distinction correspond à la dichotomie classique en théorie de la commande des systèmes entre l'approche externe par un modèle qui ne prend en compte que les relations entre

les entrées et les sorties, et l'approche interne par un modèle faisant intervenir la notion d'état.

## Approche externe

### Le découplage statique

Une première approche consiste à s'intéresser uniquement aux relations statiques entre les 2 commandes restantes et les 2 sorties  $y_1$  et  $y_2$ . Elle utilise le critère élaboré par Bristol [7] pour mesurer le couplage statique. Ainsi les changements de variables, tant au niveau des 2 commandes qu'au niveau des 2 sorties, peuvent être comparés et classés par couplages croissants. Dans son livre, Shinskey [79] développe cette méthode "Relative Gain Array", RGA<sup>12</sup>. Elle possède l'avantage d'être simple et de ne reposer que sur des calculs statiques de colonnes. Récemment, Skogestad et Morari [83] ont fait une synthèse des implications les plus importantes de la méthode RGA.

La suite logique consiste, une fois effectués les changements de variables réduisant les couplages statiques, à commander les nouvelles sorties à partir des nouvelles commandes en supposant le système diagonal. Comme illustration récente, rappelons les travaux de Mountziaris et Georgiou [61]. Sous plusieurs hypothèses simplificatrices, ils montrent que la configuration

commande  $\rightarrow$  sortie

$$\begin{array}{l} D \rightarrow y_1 \\ V/F \rightarrow -b_1 \log(y_1) - b_2 \log(y_2) \end{array}$$

est assez bien découplée ( $b_1$  et  $b_2$  sont des coefficients dépendant des conditions opératoires). Mountziaris et Georgiou choisissent pour chacune des deux boucles un régulateur PI et ajustent les coefficients des termes proportionnels et intégraux en simulation. La qualité du compromis réalisé par ce bouclage dépend du jugement du concepteur, du cas de marche et de la précision des simulations.

L'un des résultats [40, 44, 84] les plus significatifs (qui correspond aussi à une limitation) de cette approche est le suivant : . La méthode RGA permet de voir que, d'une

---

<sup>12</sup>Si on considère deux entrées  $u_1$  et  $u_2$ , et deux sorties  $y_1$  et  $y_2$ , le vecteur qui permet d'analyser les couplages statiques (en anglais "relative gain array") se résume au scalaire

$$\lambda = \left[ 1 - \frac{\frac{\partial y_1}{\partial u_2} \frac{\partial y_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial y_1}{\partial u_1} \frac{\partial y_2}{\partial u_2}} \right]^{-1}.$$

$\lambda = 1$  correspond au découplage statique. Pour une colonne binaire standard avec  $u_1 = L$  et  $u_2 = V$ ,  $\lambda$  est supérieur à 2 en général et tend vers  $+\infty$  lorsque les produits deviennent très purs ( $y_1, y_2 \rightarrow 0$ ).

part, les gains et les couplages statiques dépendent fortement des valeurs de  $y_1$  et  $y_2$ , et que, d'autre part, lorsque les produits deviennent très purs ( $y_1, y_2 \rightarrow 0$ ), la matrice  $2 \times 2$  des gains statiques tend vers une matrice singulière de rang 1. Autrement dit, à haute pureté le système statique est proche d'un système dégénéré avec 2 sorties et une seule commande.

De nombreux auteurs appellent cette approche “découplage interne” car elle a pour but d'éliminer, par des manipulations algébriques sur les entrées et les sorties, les problèmes de couplages. Le défaut majeur de cette approche tient à l'absence de justification théorique sérieuse. En effet, non-interaction statique ne veut pas dire non interaction dynamique. Aussi, plusieurs auteurs préfèrent-ils une approche moins empirique qui utilise des méthodes multivariées de commande.

## Commande multivariable externe

Cette approche requiert un modèle entrée-sortie. A notre connaissance, la grande majorité des auteurs considère des modèles entrée-sortie à base de matrices de transfert. Les modèles issus de la physique sont généralement de grande dimension et non linéaires. Le calcul de matrices de transfert n'est donc pas aisé. Plusieurs méthodes ont été utilisées ou développées pour obtenir ces matrices. Parmi les publications les plus récentes, nous en retiendrons trois. Luyben [52] propose une méthode pour identifier les fonctions de transfert de colonnes fonctionnant à haute pureté et dont le comportement est fortement non linéaire : d'une part, les gains statiques entre les entrées et les sorties dépendent très fortement du niveau des puretés ; d'autre part, les “constantes de temps” augmentent fortement vers les hautes puretés. La méthode d'identification que propose Luyben repose sur la procédure de “auto-tuning” de Astrom et Hagglund [4] : cette méthode permet de maintenir, pendant la phase d'identification, le système dans une plage linéaire de fonctionnement, cette plage pouvant être étroite. Parallèlement, Moudgalya et al. [60] ont développé une procédure d'identification à partir des réponses des sorties à une double impulsion sur les entrées. Ils présentent les avantages pratiques et numériques d'une impulsion double par rapport à une impulsion simple dans le cas d'un système linéaire simple, asymptotiquement stable et à grande constante de temps. Ils appliquent cette méthode pour identifier en simulation une matrice de transfert  $2 \times 2$  donc les éléments sont du type

$$\frac{\kappa e^{-\tau s}}{\nu s + 1}$$

$s$  est la variable de Laplace,  $\kappa$ ,  $\tau$  et  $\nu$  sont des constantes dépendant de la position de l'élément). Skogestad et Morari [85] procèdent différemment : après avoir linéarisé, autour d'un point de fonctionnement, un modèle de connaissance de colonne binaire, ils le réduisent par une technique que Moore [58] a mis au point. Cette réduction est bien adaptée aux systèmes stables. Elle consiste, après un changement de coordonnées sur l'état linéarisé qui rend les grammians d'observabilité et de contrôlabilité identiques, à ne retenir que

les directions selon lesquelles les évolutions sont les plus lentes. Skogestad et Morari [85] indiquent que, pour des fréquences pas trop importantes, i.e. des échelles de temps pas trop rapide, une bonne description entrée-sortie peut être réalisée avec une modèle d'ordre inférieur ou égal à 5.

Une fois la matrice de transfert obtenue, la loi de commande peut être construite de multiples façons. Waller [94] et Luyben [51] utilisent des méthodes exactes de découplage et montrent en simulation qu'elles peuvent engendrer des instabilités pour des colonnes à haute pureté. Ces auteurs montrent également qu'un découplage partiel et simplifié permet d'éviter les instabilités.

Plus récemment, Waller et al. [96] proposent une synthèse de la commande par la méthode du "lieu de Nyquist" inverse : une telle technique consiste, après le rajout éventuel d'un précompensateur<sup>13</sup> qui rend la matrice de transfert à diagonale dominante soit par colonnes soit par lignes, à régler, par la méthode des cercles de Gershgorin et/ou d'Ostrowski dans le domaine de Nyquist [77], les gains du compensateur<sup>14</sup> de façon à ce que le système bouclé soit stable.

Plusieurs auteurs ont utilisé des méthodes linéaires quadratiques pour synthétiser une loi de commande en qualité. Par exemple, dans [33], Hammarström et al montrent, pour des modèles linéaires discrets de colonnes à distiller, que le choix des poids positifs du critère quadratique à minimiser ainsi que des erreurs de modélisation influencent notablement les performances de la loi de commande optimale qui en découlent.

Plus récemment, Georgiou et al. [30] appliquent des techniques de commande prédictive après avoir changé les sorties  $y_1$  et  $y_2$  en  $\log(y_1)$  et  $\log(y_2)$  afin de compenser les non linéarités statiques près de 0. Fondée sur un modèle linéaire discret en temps, la méthode consiste à calculer les futurs changements des variables de commande, ces changements devant correspondre au suivi optimal d'un certain modèle de référence. La dénomination "commande prédictive" vient du fait que cette méthode utilise, à chaque période d'échantillonnage, le modèle linéaire discret pour prédire les réponses échantillonnées futures du système. Ces auteurs discutent en simulation l'influence des paramètres de réglage de la loi de commande. Ils insistent aussi beaucoup sur l'intérêt de considérer le logarithme des sorties plutôt que les sorties elles-mêmes.

Pour répondre au problème de la dégénérescence statique entrée-sortie, Skogestad et Morari [86, 85] proposent une analyse de la robustesse du système en boucle fermée. Cette étude de robustesse repose sur deux points :

- une estimation, provenant de la connaissance physique des incertitudes, des erreurs sur les paramètres du modèle en boucle ouverte, sur les commandes, sur les perturbations mesurées (en amplitude et en direction) et sur les sorties ;
- un indicateur de performance fondé sur la valeur singulière maximale d'une matrice élaborée à partir de la matrice de transfert en boucle fermée entre les entrées

---

<sup>13</sup> "Compensator" en anglais.

<sup>14</sup> "Controler" en anglais.

(perturbations et consignes) et les erreurs de sortie.

L'analyse consiste alors à vérifier que, quelles que soient les incertitudes, le système bouclé est stable et l'indicateur de performance est vérifié. Cette analyse est facilitée par l'utilisation de résultats sur la "valeur singulière structurelle" d'une matrice (voir par exemple [87]). Skogestad et al. [86] en concluent que la représentation d'une colonne à distiller par une fonction de transfert entre les entrées et les sorties conduit à un modèle très sensible aux incertitudes sur les variations de débit de charge.

A notre connaissance, peu de références utilisent des méthodes de commande adaptative qui consistent à calculer, en même temps, les coefficients du modèle et la commande, en utilisant les réponses du système bouclé. Récemment, deux articles [1, 10] abordent cependant la question et montrent en simulation l'effet des paramètres de réglage et l'intérêt de ce type de méthode.

Les avantages de l'approche externe sont clairs : seules les mesures des entrées et des sorties sont nécessaires, les calculs sont souvent simples. Ses inconvénients aussi : il est difficile de résoudre simplement le problème des non linéarités et de la dégénérescence entrée-sortie près du régime stationnaire ; on ne peut pas, par ces méthodes, analyser les problèmes de stabilité interne. En pratique, les sorties sont mesurées avec des retards importants. L'utilisation industrielle de ces méthodes est fortement compromise car elles n'utilisent pour calculer la commande que les mesures des sorties. Toutes ces raisons expliquent pourquoi plusieurs auteurs essaient d'utiliser directement ou indirectement l'état de la colonne via des températures.

## Approche interne

Le terme interne est relatif à l'information utilisée pour calculer la commande : en plus des sorties, la loi de commande dépend aussi de l'état, le profil des compositions dans la colonne. Cet état ne peut être utilisé que si l'on sait prédire son évolution, autrement dit si l'on dispose d'une représentation interne.

## Les températures

Dès 1962, Rosenbrock[75] propose de commander des compositions intermédiaires en rectification et épuisement plutôt que les compositions du distillat et du résidu. Plus récemment, Waller et al. [95] comparent expérimentalement sur une colonne pilote quatre structures de régulation pour commander simultanément une température en épuisement

$T_s$  et une température en rectification  $T_e$ <sup>15</sup>:

$$\begin{pmatrix} L & \longrightarrow & T_r \\ V & \longrightarrow & T_e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D & \longrightarrow & T_r \\ V & \longrightarrow & T_e \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{D}{L+D} & \longrightarrow & T_r \\ V & \longrightarrow & T_e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{D}{L+D} & \longrightarrow & T_r \\ \frac{V}{B} & \longrightarrow & T_e \end{pmatrix}.$$

Ils montrent que, face à des perturbations de composition de charge, les deux schémas,

$$\begin{pmatrix} L & \longrightarrow & T_r \\ V & \longrightarrow & T_e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{D}{L+D} & \longrightarrow & T_r \\ V & \longrightarrow & T_e \end{pmatrix},$$

sont les mieux adaptés et que, face à des variations de débit de la charge, le schéma en ratios

$$\begin{array}{l} \frac{D}{L+D} \longrightarrow T_r \\ \frac{V}{B} \longrightarrow T_e \end{array}$$

est le meilleur.

Commander les températures ne signifie pas commander les compositions des deux produits mais conduit en pratique à limiter les variations de ces dernières. Certains auteurs sont allés plus loin en considérant des profils de températures. Par exemple, Yu et Luyben [98] montrent que, pour des colonnes multi-composés, les consignes de températures peuvent être modifiées en fonction de températures voisines de façon à diminuer l'influence des composés différents des deux composés clés.

Sur une colonne à très haute pureté, Fuentes et Luyben [21] montrent en simulation que l'on peut notablement améliorer la robustesse, par rapport à des retards de mesures, d'une commande par appoche externe en introduisant, pour chacune des deux sorties, une cascade de deux régulateurs : le premier régule une température, le second modifie la consigne de température en fonction de la sortie. Un tel schéma est simple à mettre en oeuvre. De façon similaire, Mountziaris et Georgiou [61] montrent que, par rapport à une régulation à partir des sorties uniquement, le rajout des températures augmente sensiblement les performances de la commande.

Les informations contenues dans le profil de températures sont importantes. Cependant, ces méthodes de commande n'utilisent en fait que les mesures de températures et sont encore largement perfectibles si l'on tient compte simultanément des mesures de

<sup>15</sup>Les notations  $L$ ,  $D$ ,  $V$  et  $B$  sont celles de la figure précédente.

qualité  $y_1$  et  $y_2$ . Ces constatations sont à rapprocher des études suivantes qui utilisent un modèle fondé sur les équations de bilan et qui font ainsi intervenir, en plus des sorties, l'état de la colonne.

## La méthode du rejet des perturbations

Cette approche date des années 1980. Elle part d'un modèle physique et élabore une commande par retour d'état qui rend les sorties insensibles aux perturbations. Takamatsu et al. [91] ont été les premiers à introduire ces techniques pour la commande des colonnes. Ils ont utilisé les résultats géométriques de Wonham [97] sur un modèle physique linéarisé autour d'un état stationnaire. Ils ont montré que les perturbations de composition de l'alimentation peuvent être rejetées par retour d'état. Plusieurs travaux ont suivi. L'un des plus récents (Kümmel et Andersen [45]) montre en simulation la supériorité de ces méthodes géométriques en linéaire, par rapport à des méthodes classiques de commande "proportionnelle et intégrale". Cette supériorité est essentiellement due à la prise en compte des couplages dynamiques (au premier ordre).

En 1983, Gauthier et al. [25] ont appliqué les résultats d'Isidori et al. [39, 38] pour étendre les résultats de Takamatsu et al. [91] à un modèle non linéaire de colonne. Ils ont montré que le système possède la structure requise pour rejeter les perturbations de composition d'alimentation par retour non linéaire de l'état.

Le résultat principal de ces méthodes est qu'il n'est pas nécessaire, pour maintenir les compositions des deux produits constantes, de mesurer la composition de la charge ; la mesure de son débit et les informations contenues dans l'état de la colonne suffisent.

## Conclusions

De ce panorama, deux ensembles de difficultés apparaissent clairement :

- des difficultés liées à la structure du système ; le système à commander est non-linéaire et de grande dimension, les couplages commande-sortie sont importants et peuvent être très mal conditionnés près de l'état stationnaire ;
- des difficultés liées à l'application industrielle ; les perturbations de composition de l'alimentation ne sont pas connues, les mesures des sorties ont un retard parfois important.

Parmi les diverses méthodes déjà introduites, la commande par rejet de perturbation nous semble la plus prometteuse car elle repose sur un modèle dynamique de connaissance réputé fiable, elle permet de prendre en compte de façon rigoureuse les non linéarités et les couplages, elle fait intervenir l'état du système et donc une information voisine de celle contenue dans le profil des températures. Jusqu'à présent, cette voie n'a été que peu explorée. L'objet de la seconde partie de cette thèse est de l'explorer davantage. L'objectif



est de proposer une loi de retour d'état, calculable en ligne à partir des mesures disponibles et suffisamment robuste vis à vis des erreurs de modèle et de mesures, en particulier, des retards dans les mesures des sorties.

Le chapitre 3 traite des colonnes binaires. Pour ces colonnes, des modèles de connaissance non linéaires assez simples existent. Comme ces modèles sont de trop grande dimension pour la commande, nous développons une méthode de réduction qui préserve les comportements qualitatifs, qui s'interprète rigoureusement dans le cadre de la théorie des perturbations singulières des systèmes à plusieurs échelles de temps, qui fournit des modèles de commande de tailles réalistes et représentant les dynamiques les plus lentes. Sur ces modèles réduits, la méthode du rejet de perturbations conduit à des lois non linéaires de retour d'état et à un système bouclé asymptotiquement stable autour de n'importe quel état stationnaire. Ces lois non linéaires peuvent être directement calculées à partir des sorties et de deux températures à l'intérieur de la colonne. Une étude en simulation montre que le rejet des perturbations est asymptotique, que ces lois de commande sont très robustes face à des retards dans les mesures de sorties et que, en comparaison avec d'autres méthodes de commande, elles correspondent à un compromis acceptable entre la robustesse vis à vis des retards et la précision.

Dans le chapitre 4, les résultats obtenus pour les colonnes binaires sont étendus de façon heuristique et formelle aux colonnes multi-composés. Une étude en simulation dans le cas d'un débutaniseur de raffinerie montre que le système bouclé est asymptotiquement stable et que, comme pour les colonnes binaires, le rejet des perturbations est asymptotique et la commande peu sensible aux retards de mesure sur les sorties.

Le chapitre 5 présente la mise en oeuvre sur des colonnes réelles de ces méthodes non linéaires de commande avec les résultats obtenus sur un dépropaniseur, une colonne binaire, et un débutaniseur, une colonne multi-composés.



# Chapter 3

## Les colonnes binaires

### 3.1 Construction de modèles de commande

#### 3.1.1 Le modèle de connaissance (L,V)

##### Les équations d'état

Nous appelons colonne binaire (cf. figure 3.1, page 80) une colonne à distiller qui sépare un mélange de 2 composés : en tête sort le distillat, le composé léger de la charge avec un peu du composé lourd ; en fond sort le résidu, le composé lourd de la charge avec un peu du composé léger.

Pour ce procédé, les seules équations dynamiques et non linéaires disponibles sont fondées sur une modélisation physique. Dans le chapitre 1, nous avons présenté un modèle dynamique très complet de la colonne qui prend en compte aussi bien l'hydrodynamique du plateau que les régulations de niveaux et de pression. Ce modèle est intéressant pour la simulation. Pour la commande, il est mathématiquement trop complexe et trop lourd à manipuler. De plus, il mélange des phénomènes très différents, comme l'hydrodynamique, généralement rapide, et la dynamique des compositions, nettement plus lente. Nous n'utiliserons pas ce modèle dynamique pour élaborer la commande. Cette dernière sera calculée à partir d'un modèle moins complet et prenant principalement en compte les transitoires liés aux compositions.

Les hypothèses de modélisation pour la commande sont les suivantes :

- sur chaque plateau les phases liquide et vapeur sont homogènes et à l'équilibre thermodynamique ;
- sur chaque plateau, la rétention molaire liquide est constante, la rétention vapeur est négligeable ; dans la colonne, la pression est constante et uniforme<sup>1</sup> ;

---

<sup>1</sup>L'uniformité de la pression permet d'omettre les dépendances en pression dans les équations. Les développements qui vont suivre restent entièrement valables si la pression diffère d'un plateau à l'autre.

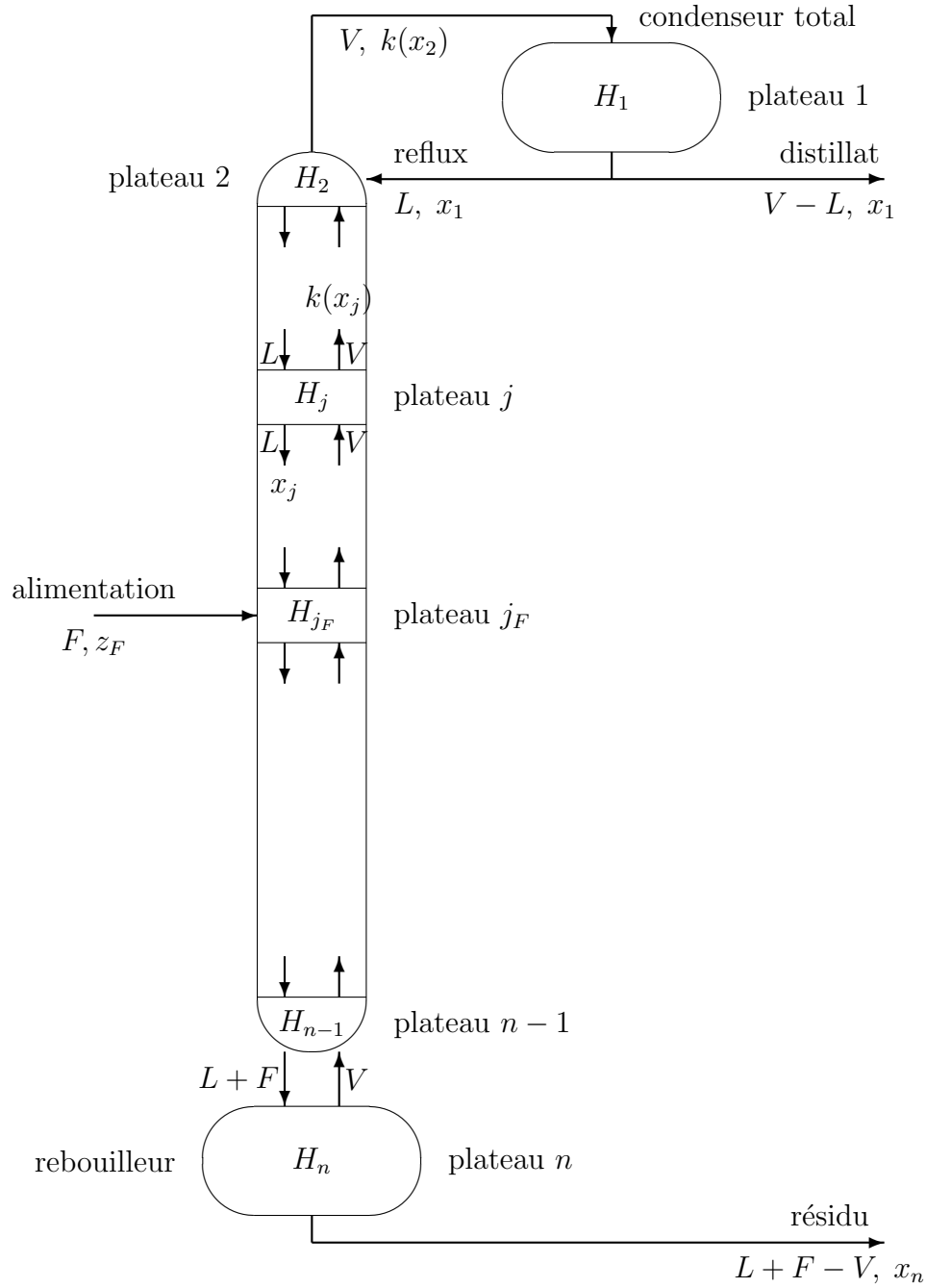


Figure 3.1: une colonne binaire classique.

- sur chaque plateau, à l'exception du ballon de reflux et du fond de la colonne, le flux molaire total liquide (resp. vapeur) entrant est égal au flux molaire total liquide (resp. vapeur) sortant ; la charge est liquide et à sa température de bulle<sup>2</sup>.

De nombreux auteurs [85, 79, 91], qui s'intéressent à la commande, utilisent des hypothèses très voisines des nôtres. Autour d'un régime statique, ces dernières sont raisonnables : les plateaux sont conçus pour que le contact entre le liquide et la vapeur soit important ; loin de l'engorgement, la géométrie du plateau assure un volume de rétention liquide quasiment indépendant du débit ; en pratique, les régulations de la pression de tête et des niveaux du ballon de reflux et du fond sont suffisamment rapides et stables pour que leurs dynamiques puissent être négligées.

Sous les hypothèses précédentes, le modèle dynamique est constitué uniquement par les équations de bilan sur chaque plateau d'un des deux composés. Les équations d'état sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 \frac{dx_1}{dt} = Vk(x_2) - Vx_1 \\ \text{pour } j = 2, \dots, j_F - 1 : \\ H_j \frac{dx_j}{dt} = Lx_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - Lx_j - Vk(x_j) \\ H_{j_F} \frac{dx_{j_F}}{dt} = Lx_{j_F-1} + Vk(x_{j_F+1}) - (L + F)x_{j_F} - Vk(x_{j_F}) + Fz_F \\ \text{pour } j = j_F + 1, \dots, n - 1 : \\ H_j \frac{dx_j}{dt} = (L + F)x_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - (L + F)x_j - Vk(x_j) \\ H_n \frac{dx_n}{dt} = (L + F)x_{n-1} - (L + F - V)x_n - Vk(x_n) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec

- $j$  l'indice de plateau ( $1 \leq j \leq n$ ,  $j = 1$  correspond au ballon de reflux,  $j = j_F$  au plateau d'alimentation,  $j = n$  au fond, ( $3 \leq j_F \leq n - 1$ ) ;
- $(H_j)_{j=1, \dots, n}$  les rétentions liquides (constantes) ;
- $x_j$  la fraction molaire liquide du plateau  $j$  ;
- $k(x_j)$  la fraction molaire vapeur du plateau  $j$  (l'inversion formelle des équations d'équilibre thermodynamique fournit la fonction  $k$  en même temps que la température sur le plateau  $j$ ,  $T_j = \Theta(x_j)$ ) ; nous avons omis la dépendance en pression car celle-ci est supposée constante et uniforme ;

<sup>2</sup>Comme le montre la sous-section 3.2.3, page 114, l'abandon de cette hypothèse sur la charge ne pose pas de difficulté.

- $F$  le débit molaire de la charge,  $z_F$  sa composition ;
- $L$  le débit de reflux,  $V$  le débit de vapeur sortant du rebouilleur.

Les deux commandes sont  $L$  et  $V$ . Les perturbations sont  $F$  et  $z_F$ . Les deux sorties sont  $y_1 = x_1$  et  $y_2 = x_n$ , respectivement la composition du distillat et la composition du résidu.

**Remarque 3.** *Nous supposons que les niveaux du ballon de reflux et du fond sont régulés respectivement par les débits de distillat et de résidu. Nous avons vu précédemment que d'autres configurations peuvent être utilisées. Par exemple, le niveau du ballon de reflux peut être commandé en agissant sur le débit de reflux. Pour le modèle ci-dessus, toutes ces possibilités sont à interpréter comme des changements de variables, paramétrés par  $F$ , sur les commandes  $L$  et  $V$ . Les résultats qui vont suivre (propriétés en boucle ouverte, rejet des perturbations  $z_F$ ) demeurent valables pour ces autres choix de variables de commande.*

Pour des raisons physiques évidentes, nous introduisons les deux hypothèses :

**H1** les débits sont positifs, i.e.  $F > 0$ ,  $L > 0$ ,  $V > 0$ ,  $V - L > 0$  et  $L + F - V > 0$ .  
Rappelons que  $z_F \in ]0, 1[$  par définition.

**H2** la fonction  $k$  satisfait  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $k(x) \in [0, 1]$ , si  $x = 0$  alors  $k(x) = 0$ , et si  $x = 1$  alors  $k(x) = 1$ .

### Propriétés en boucle ouverte du modèle (L,V)

En 1962, Rosenbrock [76] a démontré, pour un modèle un peu plus compliqué que le modèle (3.1), l'unicité et la stabilité asymptotique globale. Nous allons réutiliser ces résultats (annexe D) pour démontrer des propriétés analogues sur le modèle (3.1).

Le théorème 4 ci-dessous énonce des propriétés qualitatives du modèle (3.1). Tout d'abord, pour chaque jeu d'entrées ayant un sens physique, il existe un point stationnaire unique ayant un sens physique. Si ces entrées sont constantes au cours du temps, le système revient naturellement à ce point stationnaire, et ce quel que soit le point de départ. A partir de n'importe quel régime stationnaire, la réaction du système à un échelon sur l'une des entrées  $L$ ,  $V$  ou  $z_F$  est monotone.

**Théorème 4.** *Considérons le système (3.1). Supposons que **H1** et **H2** sont vérifiées et que  $dk/dx > 0$  pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ .<sup>3</sup> Alors,*

- (i) *pour toute condition initiale dans  $[0, 1]^n$ , la solution maximale en temps est définie pour  $t$  dans  $[0, +\infty[$  et reste dans  $[0, 1]^n$  ;*

---

<sup>3</sup> Le second principe de la thermodynamique implique que la fonction  $k$  est croissante, voir par exemple [54].

- (ii) pour chaque  $F$ ,  $z_F$ ,  $L$  et  $V$ , il existe un unique point stationnaire  $\bar{x}$  dans  $]0, 1[^n$  dépendant régulièrement de  $(F, z_F, L, V)$ ; si de plus  $k(x) < x$  pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$ ,<sup>4</sup> alors le point stationnaire vérifie

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < 1 ;$$

- (iii) si  $F$ ,  $z_F$ ,  $L$  et  $V$  sont constants, alors l'unique point stationnaire est globalement asymptotiquement stable (i.e. pour toute condition initiale dans  $[0, 1]^n$ , la solution converge vers le point stationnaire quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ); de plus, pour tout  $x$  dans  $[0, 1]^n$  le jacobien du système par rapport à  $x$  a  $n$  valeurs propres réelles, distinctes et strictement négatives;
- (iv) si  $F$ ,  $z_F$ ,  $L$  et  $V$  sont constants et si au temps  $t = 0$  les  $n$  composantes de  $dx/dt$  sont positives (resp. négatives), alors, pour tout  $t > 0$ , les  $n$  composantes de  $dx/dt$  restent positives (resp. négatives); si l'on suppose en plus que  $k(x) < x$  pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$ , la réponse de l'état du système à un échelon sur l'une des entrées  $z_F$ ,  $L$  et  $V$  est monotone, i.e. la solution correspondante  $(x_j(t))_{j=1, \dots, n}$  de (3.1) est telle que, à chaque instant  $t > 0$ , soit pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$   $dx_j/dt \geq 0$ , soit pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$   $dx_j/dt \leq 0$ .

**Preuve de (i)** Il suffit de montrer que le champ de vecteur associé au système dynamique (3.1) est rentrant dans  $[0, 1]^n$ . Soit donc  $x = (x_j)_{j=1, \dots, n}$  sur le bord de  $[0, 1]^n$ . Nécessairement, il existe  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tel que, soit  $x_j = 0$ , soit  $x_j = 1$ . Supposons que  $x_j = 0$ , il est alors clair sur les équations (3.1) que  $dx_j/dt \geq 0$  puisque  $x_{j-1} \geq 0$  et  $x_{j+1} \geq 0$ . De même, si  $x_j = 1$  alors  $dx_j/dt \leq 0$ . Ce qui montre que le champ est rentrant.

**Preuve de (ii)** La démonstration de l'existence et l'unicité du point stationnaire s'inspire de la construction graphique bien connue de McCabe-Thiele ([93] page 260). Un état stationnaire  $\bar{x} = (\bar{x}_j)_{j=1, \dots, n}$  est caractérisé par

$$Fz_f = (V - L)\bar{x}_1 + (L + F - V)\bar{x}_n \quad (3.2)$$

$$k(\bar{x}_{j+1}) = \frac{L}{V}\bar{x}_j + \left(1 - \frac{L}{V}\right)\bar{x}_1, \quad j = 1, \dots, j_f - 1 \quad (3.3)$$

$$\bar{x}_{j-1} = \frac{V}{L + F}k(\bar{x}_j) + \left(1 - \frac{V}{L + F}\right)\bar{x}_n, \quad j = j_f + 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

où (3.2) est obtenu en sommant toutes les équations de (3.1) (le bilan global), (3.3) correspond à la somme des  $j$  premières équations et (3.4) à la somme des  $n - j + 1$  dernières équations<sup>5</sup>. Comme  $k$  est une fonction croissante, les relations (3.3) permettent

<sup>4</sup> $k(x) < x$  signifie physiquement que le composé choisi pour écrire les équations de bilan est le composé lourd.

<sup>5</sup> Les relations (3.3) et (3.4) définissent les droites opératoires de la méthode de McCabe-Thiele.

de calculer  $\bar{x}_{j_F}$  en fonction de  $\bar{x}_1$ . Plus précisément,  $\bar{x}_{j_F} = \phi_1(\bar{x}_1)$  avec  $\phi_1$  fonction strictement croissante,  $\phi_1(0) = 0$  et  $\phi_1(1) = 1$ . De la même façon, (3.4) définit la fonction strictement croissante  $\phi_n$  avec  $\bar{x}_{j_F} = \phi_n(\bar{x}_n)$ ,  $\phi_n(0) = 0$  et  $\phi_n(1) = 1$ . De  $\phi_1(\bar{x}_1) = \phi_n(\bar{x}_n)$ , nous déduisons  $\bar{x}_n = \alpha(\bar{x}_1)$  avec  $\alpha$  bijection croissante de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ . Ainsi le système (3.2) (3.3) (3.4) se réduit à l'équation scalaire

$$Fz_f = (V - L)\bar{x}_1 + (L + F - V)\alpha(\bar{x}_1).$$

Le terme de droite de cette équation est une fonction strictement croissante de  $\bar{x}_1$ , égale à 0 lorsque  $\bar{x}_1 = 0$  et  $F$  lorsque  $\bar{x}_1 = 1$ . Comme  $z_f \in ]0, 1[$ , il existe un unique  $\bar{x}_1$  dans  $]0, 1[$  satisfaisant cette équation. L'existence et l'unicité du point stationnaire sont donc prouvées. Si l'on suppose de plus que  $k(x) < x$  pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$ , alors les inégalités du point **(ii)** résultent directement des relations récurrentes (3.3) et (3.4).

**Preuve de (iii)** Nous utilisons ici un résultat de Rosenbrock rappelé dans l'annexe D. Montrons que le système (3.1) vérifie les conditions du théorème de Rosenbrock. Dans notre cas,  $p = n$ ,  $\xi_k = H_k x_k$  pour  $k = 1, \dots, n$ ,  $\Omega = \prod_{k=1}^n [0, H_k]$  et le système (3.1) s'écrit  $d\xi/dt = \phi(\xi)$  avec  $\phi$  continûment dérivable. La dépendance de  $\phi$  par rapport aux entrées  $L, V, F$  et  $z_f$  est omise puisque ces dernières sont supposées constantes.

Le point **(i)** implique que la condition **(i)** du théorème de Rosenbrock est satisfaite. De (3.1), nous voyons que, pour  $i = 2, \dots, n-1$ ,  $\psi_i = 0$ ,  $\psi_1 = (V - L)/H_1$  et  $\psi_n = (L + F - V)H_n$  avec  $\psi_i$  définie par (D.1). **H1** implique que la condition **(ii)** est aussi vérifiée. Le jacobien du système  $\partial\phi/\partial\xi$  est la matrice de Jacobi  $J$  du lemme 10 (annexe D) avec  $p = n$ ,

$$a = \left( \frac{L}{H_1}, \dots, \frac{L}{H_{j_f-1}}, \frac{L+F}{H_{j_f}}, \dots, \frac{L+F}{H_{n-1}}, \frac{L+F-V}{H_n} \right)$$

et

$$b = \left( \frac{V-L}{H_1}, \frac{V}{H_2} \frac{dk}{dx}(x_2), \dots, \frac{V}{H_n} \frac{dk}{dx}(x_n) \right).$$

Ainsi les vecteurs  $a$  et  $b$  ont toutes leurs composantes positives. La condition **(iii)** du théorème de Rosenbrock est remplie. La stabilité asymptotique globale de l'unique point stationnaire est donc démontrée.

Le lemme 10 nous dit que les valeurs propres de  $\partial\phi/\partial\xi$  sont réelles, distinctes et strictement négatives. Comme le jacobien du système (3.1) est semblable à  $\partial\phi/\partial\xi$ , ces valeurs propres restent les mêmes. Ceci termine la preuve du point **(iii)**.

**Preuve de (iv)** Nous détaillons la preuve pour une condition initiale telle que les composantes de  $dx/dt$  sont toutes positives. Le cas où elles sont toutes négatives se traite de la même manière. Il suffit de montrer que le champ de vecteurs défini par (3.1) est rentrant dans  $\Omega^+ = \{x \in [0, 1]^n \text{ tel que } \forall j \in \{1, \dots, n\}, dx_j/dt \geq 0\}$ . Soit  $x$  sur le bord de  $\Omega^+$ . Alors il existe  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $dx_j/dt = 0$ . En dérivant (3.1) par



rapport au temps, nous voyons que, si  $dx_j/dt = 0$ ,  $d^2x_j/dt^2$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs de  $dx_{j-1}/dt$  et  $dx_{j+1}/dt$ . Ainsi  $d^2x_j/dt^2 \geq 0$  puisque  $dx_{j-1}/dt \geq 0$  et  $dx_{j+1}/dt \geq 0$ . Ce qui prouve que le champ de vecteurs est rentrant dans  $\Omega^+$ .

Pour prouver la monotonie par rapport à un échelon sur l'une des entrées  $z_F$ ,  $L$  ou  $V$ , il suffit de montrer que, partant d'un état stationnaire à  $t = 0^-$ ,  $dx/dt$  à  $t = 0^+$  a ses composantes soit toutes positives, soit toutes négatives. Prenons par exemple un échelon sur le débit de reflux,  $L \rightarrow L + \delta L$ . Nous supposons que  $(F, z_F, L, V)$  et  $(F, z_F, L + \delta L, V)$  vérifient **H1**. D'après **(ii)**, le point stationnaire de départ  $\bar{x}$ , associé aux entrées  $(F, z_F, L, V)$ , vérifie  $\bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_n$ . Il est facile de voir avec (3.1) que  $dx/dt$  vaut au temps  $t = 0^+$

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \quad \frac{dx_j}{dt} = \frac{(\bar{x}_{j-1} - \bar{x}_j)\delta L}{H_j} \text{ pour } j = 2, \dots, n.$$

A  $t = 0^+$  les composantes de  $dx/dt$  ont toutes le même signe, celui de  $-\delta L$ . Les cas de  $z_F$  et  $V$  se traitent de façon similaire.

### Discussion

Ce modèle dynamique de connaissance est en fait un modèle de taille importante. Pour le dépropaniseur de raffinerie décrit dans le chapitre 1, ce modèle comporte un état de dimension 42. Au régime nominal de fonctionnement, le modèle linéarisé tangent possède un spectre très étendu (cf. tableau 3.1) : le rapport entre la plus grande échelle de temps et la plus petite est de 8700 environ. De plus, face aux phénomènes hydrauliques dont les constantes de temps avoisinent la minute et qui sont ici négligés, les 33 valeurs propres inférieures à  $-1 \text{ mn}^{-1}$  ne sont pas significatives. Autrement dit, la partie la plus rapide n'a aucune raison de bien représenter les transitoires rapides de la colonne. En revanche, la partie la plus lente doit effectivement correspondre à la dynamique lente des compositions, les grandeurs que l'on veut commander. Il est donc important d'extraire de ce modèle de connaissance sa partie lente afin d'obtenir un modèle fiable de petite dimension qui peut être utilisé pour la commande.

$i$	$\lambda_i$	$i$	$\lambda_i$	$i$	$\lambda_i$
1	-22,5807	15	- 8,4581	29	- 2,2734
2	-21,0925	16	- 8,2902	30	- 2,0871
3	-19,2560	17	- 7,8743	31	- 1,6527
4	-18,0316	18	- 7,6954	32	- 1,1078
5	-16,9416	19	- 6,7288	33	- 1,0155
6	-16,2543	20	- 6,7001	34	- 0,6977
7	-14,2483	21	- 5,7575	35	- 0,5145
8	-13,8522	22	- 5,2752	36	- 0,3687
9	-11,6824	23	- 5,0693	37	- 0,2917
10	-11,3547	24	- 4,7030	38	- 0,1874
11	-10,8763	25	- 3,7317	39	- 0,1332
12	-10,8015	26	- 3,4867	40	- 0,0565
13	- 9,6780	27	- 3,4367	41	- 0,0094
14	- 8,7125	28	- 2,2909	42	- 0,0026

Table 3.1: spectre du modèle de connaissance (L,V) pour un dépropaniseur de 42 plateaux (les valeurs propres  $(\lambda_i)_{i=1,\dots,42}$  sont en  $\text{mn}^{-1}$ ).

### 3.1.2 Agrégation par échelle de temps du modèle (L,V)

Dans cette section, nous proposons une méthode pour obtenir, à partir du modèle (L,V) de colonne (3.1), un modèle dynamique réduit et lent. Pour cela, nous utilisons la méthode des perturbations singulières. Elle permet de négliger les effets dynamiques qui se stabilisent rapidement et de ne conserver que les effets dynamiques lents. Pour un aperçu complet de l'utilisation des perturbations singulières en modélisation et en commande, nous renvoyons le lecteur aux travaux de Kokotovic [42]. Ici, nous n'avons besoin que du théorème de Tikhonov, rappelé dans l'annexe D.

Pour des raisons de simplicité, nous présentons d'abord la méthode dans le cas d'un compartiment de  $m$  plateaux. Ensuite, nous l'appliquons à la colonne entière.

#### L'agrégation d'un compartiment

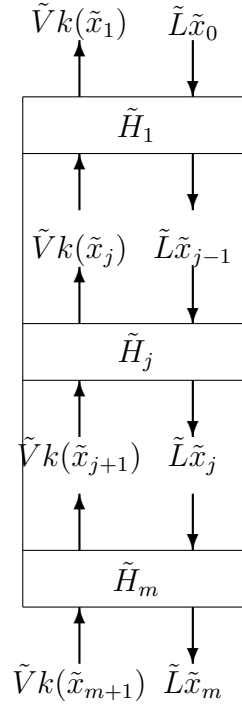
**Les équations** Considérons le compartiment de  $m$  plateaux décrit schématiquement par la figure 3.2. Sous les mêmes hypothèses que celles faites pour le modèle (L,V) (3.1), ce compartiment est décrit par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}_1 \frac{d\tilde{x}_1}{dt} = \tilde{L}\tilde{x}_0 + \tilde{V}k(\tilde{x}_2) - \tilde{L}\tilde{x}_1 - \tilde{V}k(\tilde{x}_1) \\ \tilde{H}_2 \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \tilde{L}\tilde{x}_1 + \tilde{V}k(\tilde{x}_3) - \tilde{L}\tilde{x}_2 - \tilde{V}k(\tilde{x}_2) \\ \vdots \\ \tilde{H}_{m-1} \frac{d\tilde{x}_{m-1}}{dt} = \tilde{L}\tilde{x}_{m-2} + \tilde{V}k(\tilde{x}_m) - \tilde{L}\tilde{x}_{m-1} - \tilde{V}k(\tilde{x}_{m-1}) \\ \tilde{H}_m \frac{d\tilde{x}_m}{dt} = \tilde{L}\tilde{x}_{m-1} + \tilde{V}k(\tilde{x}_{m+1}) - \tilde{L}\tilde{x}_m - \tilde{V}k(\tilde{x}_m) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

avec

- $(\tilde{H}_j)_{1 \leq j \leq m}$  les rétentions liquides,
- $\tilde{x}_j$  la composition liquide sur le plateau  $j$ ,
- $\tilde{L}$  et  $\tilde{V}$  les flux liquide et vapeur rentrant dans la section,  $\tilde{x}_0$  et  $k(\tilde{x}_{m+1})$  leurs compositions respectives.

**Les propriétés du modèle (L,V) de compartiment** Le modèle (L,V) d'un compartiment (3.5) possède des propriétés qualitatives voisines de celles du modèle (L,V) de la colonne : existence et unicité du point stationnaire, stabilité asymptotique globale, ... Ces propriétés sont énoncées dans le lemme ci-dessous.

Figure 3.2: un compartiment de  $m$  plateaux.

**Lemme 2.** *Considérons le système (3.5). Supposons que  $\tilde{L} > 0$ ,  $\tilde{V} > 0$ ,  $0 \leq \tilde{x}_0, \tilde{x}_{m+1} \leq 1$   $k$  soit une fonction continûment dérivable strictement croissante de  $x \in [0, 1]$ ,  $k(0) = 0$  et  $k(1) = 1$ . Alors*

- (i) *pour toute condition initiale dans  $[0, 1]^m$ , la solution maximale de (3.5) est définie sur  $[0, +\infty[$  et reste dans  $[0, 1]^m$ .*
- (ii) *pour chaque  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_m$ , (3.5) admet un unique point stationnaire  $\hat{x}$  dans  $[0, 1]^m$ ,  $k(\hat{x}_1)$  et  $\hat{x}_m$  sont des fonctions continûment dérivables de  $(\tilde{L}/\tilde{V}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_{m+1})$  notées respectivement  $Y_m(\tilde{L}/\tilde{V}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_{m+1})$  et  $X_m(\tilde{L}/\tilde{V}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_{m+1})$ . Ces fonctions sont reliées par la relation*

$$\tilde{L}X_m(\tilde{L}/\tilde{V}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_{m+1}) + \tilde{V}Y_m(\tilde{L}/\tilde{V}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_{m+1}) = \tilde{L}\tilde{x}_0 + \tilde{V}k(\tilde{x}_{m+1}). \quad (3.6)$$

Elle vérifient les relations

$$\begin{aligned}
0 \leq Y_m \leq 1 & & 0 \leq X_m \leq 1 \\
0 < \frac{\partial Y_m}{\partial \tilde{x}_0} < \frac{\tilde{L}}{\tilde{V}} & & 0 < \frac{\partial X_m}{\partial \tilde{x}_0} < 1 \\
0 < \frac{\partial Y_m}{\partial \tilde{x}_{m+1}} < \frac{dk}{dx}(\tilde{x}_{m+1}) & & 0 < \frac{\partial X_m}{\partial \tilde{x}_{m+1}} < \frac{\tilde{V}}{\tilde{L}} \frac{dk}{dx}(\tilde{x}_{m+1}).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

De plus, si  $\hat{x}$  vérifie  $\tilde{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_r < \tilde{x}_{m+1}$ , alors

$$\frac{\partial Y_m}{\partial \tilde{L}/\tilde{V}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial X_m}{\partial \tilde{L}/\tilde{V}} < 0. \tag{3.8}$$

(iii) si les fonctions  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_m$  sont constantes et si la condition initiale est dans  $[0, 1]^m$ , alors le système est globalement asymptotiquement stable :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}(t) = \hat{x}$$

où  $\tilde{x}(t)$  est la solution du système et  $\hat{x}$  est l'unique point stationnaire défini dans le point (ii) précédent.

Les points (i) et (iii) se montrent de la même façon que les points (i) et (iii) du théorème 4. Nous ne présentons pas les détails de leur preuve. En revanche, il convient de démontrer le point (ii).

**Preuve de (ii)** Remarquons que (3.6) n'est autre que la somme des équations de (3.5) à l'état stationnaire. Il reste à montrer l'existence et l'unicité de  $\hat{x}$  ainsi que les relations (3.7) et (3.8). Comme  $X_m$  et  $Y_m$  jouent un rôle symétrique, il suffit en fait de montrer l'existence et l'unicité de  $\hat{x}$  et les relations concernant  $Y_m$  par exemple. Pour cela, nous procédons par récurrence sur  $m$ .

Si  $m = 1$ ,  $\hat{x}$  existe et est unique, (3.7) et (3.8) sont vérifiées. En effet,  $\hat{x}_1$  est donné par

$$\frac{\tilde{L}}{\tilde{V}} \hat{x}_1 + k(\hat{x}_1) = \frac{\tilde{L}}{\tilde{V}} \tilde{x}_0 + k(\tilde{x}_2).$$

Comme  $k$  est une bijection de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ ,  $\hat{x}_1$  existe, est unique et appartient à  $[0, 1]$ ; de plus  $k(\hat{x}_1)$  est une fonction  $C^1$  de  $\tilde{L}/\tilde{V}$ ,  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_2$ . Les inégalités sur les dérivées partielles de  $Y_1$  s'obtiennent sans difficulté en dérivant l'équation ci-dessus.

Supposons le résultat vrai pour un compartiment de  $m - 1$  plateaux,  $m - 1 \geq 1$ . Considérons  $\hat{x} = (\hat{x}_j)_{j=1, \dots, m}$  solution de (3.5) au régime stationnaire. Alors  $(\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)$

est solution des équations statiques du compartiment composé des plateaux 2 à  $m$ . Ainsi, nous pouvons écrire

$$k(\hat{x}_2) = Y_{m-1}(\tilde{L}/\tilde{V}, \hat{x}_1, \tilde{x}_{m+1}),$$

avec  $Y_{m-1}$  satisfaisant

$$\begin{aligned} 0 &\leq Y_{m-1} \leq 1 \\ 0 &< \frac{\partial Y_{m-1}}{\partial \hat{x}_1} < \frac{\tilde{L}}{\tilde{V}} \\ 0 &< \frac{\partial Y_{m-1}}{\partial \tilde{x}_{m+1}} < \frac{dk}{dx}(\tilde{x}_{m+1}). \end{aligned}$$

De plus si  $\hat{x}_1 < \hat{x}_2 < \dots < \hat{x}_r < \tilde{x}_{m+1}$ , alors

$$\frac{\partial Y_{m-1}}{\partial \tilde{L}/\tilde{V}} < 0.$$

$\hat{x}_1$  est alors donné par

$$\frac{\tilde{L}}{\tilde{V}} \hat{x}_1 + k(\hat{x}_1) - Y_{m-1}(\tilde{L}/\tilde{V}, \hat{x}_1, \tilde{x}_{m+1}) - \frac{\tilde{L}}{\tilde{V}} \tilde{x}_0 = 0, \quad (3.9)$$

l'équation statique du plateau 1. Le terme de droite de cette équation est une fonction de  $\hat{x}_1$  continûment dérivable, strictement croissante de  $\hat{x}_1$ , négative en 0 et positive en 1. Il existe donc un unique  $\hat{x}_1 \in [0, 1]$  vérifiant (3.9).  $k(\hat{x}_1)$  et donc  $\hat{x}_1$  sont des fonctions continûment dérivables de  $\tilde{L}/\tilde{V}$ ,  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_{m+1}$ . Les inégalités de (3.7) et (3.8) relatives à  $Y_m$  s'obtiennent en dérivant par rapport à  $\tilde{x}_0$ ,  $\tilde{x}_{m+1}$  et  $\tilde{L}/\tilde{V}$  l'équation (3.9).

**La réduction par échelle de temps du modèle (L,V) de compartiment** Le théorème de Tikhonov (voir annexe D) suppose l'existence d'un petit paramètre positif  $\varepsilon$  devant certaines dérivées. Or les équations ci-dessus ne contiennent pas de façon explicite et évidente un tel  $\varepsilon$ . Il nous faut en trouver un ou plutôt en choisir un. Si le nombre de plateaux est suffisamment élevé, le comportement de deux plateaux successifs doit être très similaire; autrement dit, leurs différences de comportement doivent s'avérer négligeables par rapport à un comportement moyen d'ensemble. Cette idée peut se formaliser comme suit.

Supposons que le nombre de plateaux  $m$  soit important (typiquement  $m \geq 10$ ) et que les plateaux soient de tailles voisines. Notons  $\mathcal{H} = \sum_1^m \tilde{H}_j$  la rétention liquide du compartiment et choisissons un plateau numéroté  $j_a \in \{1, \dots, m\}$ , appelé par la suite le plateau d'agrégation. Pour  $j \neq j_a$ , nous pouvons poser  $\tilde{H}_j = \varepsilon \alpha_j \mathcal{H}$  avec  $0 < \varepsilon \ll 1$  et  $\alpha_j \approx 1$ . Alors, nous avons  $\tilde{H}_{j_a} = \mathcal{H}(1 - \sum_{j \neq j_a} \varepsilon \alpha_j)$ . Ceci nous conduit au changement de

variables suivant

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_a-1} \\ \tilde{x}_{j_a} \\ \tilde{x}_{j_a+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 = \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_{j_a-1} = \tilde{x}_{j_a-1} \\ \tilde{x} = \left( \sum_1^m \tilde{H}_j \tilde{x}_j \right) / \mathcal{H} \\ \tilde{z}_{j_a+1} = \tilde{x}_{j_a+1} \\ \vdots \\ \tilde{z}_m = \tilde{x}_m \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

où les compositions des plateaux  $j \neq j_a$  restent inchangées, et où la composition du plateau  $j_a$  est remplacée par la moyenne pondérée des compositions des  $m$  plateaux. Avec ces nouvelles variables d'état,  $\tilde{z}_j$  et  $\tilde{x}$ , les équations du compartiment,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \alpha_1 \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_1}{dt} = \tilde{L}\tilde{x}_0 + \tilde{V}k(\tilde{z}_2) - \tilde{L}\tilde{z}_1 - \tilde{V}k(\tilde{z}_1) \\ \vdots \\ \varepsilon \alpha_{j_a-2} \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_{j_a-2}}{dt} = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-3} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-1}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-2} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-2}) \\ \varepsilon \alpha_{j_a-1} \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_{j_a-1}}{dt} = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-2} + \tilde{V}k\left(\frac{\tilde{x} - \varepsilon \sum_{j \neq j_a} \alpha_j \tilde{z}_j}{1 - \varepsilon \sum_{j \neq j_a} \alpha_j}\right) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-1} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-1}) \\ \mathcal{H} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{L}\tilde{x}_0 + \tilde{V}k(\tilde{x}_{m+1}) - \tilde{L}\tilde{z}_m - \tilde{V}k(\tilde{z}_1) \\ \varepsilon \alpha_{j_a+1} \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_{j_a+1}}{dt} = \tilde{L}\left(\frac{\tilde{x} - \varepsilon \sum_{j \neq j_a} \alpha_j \tilde{z}_j}{1 - \varepsilon \sum_{j \neq j_a} \alpha_j}\right) + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+2}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+1} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+1}) \\ \varepsilon \alpha_{j_a+2} \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_{j_a+2}}{dt} = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+1} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+3}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+2} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+2}) \\ \vdots \\ \varepsilon \alpha_m \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_m}{dt} = \tilde{L}\tilde{z}_{m-1} + \tilde{V}k(\tilde{x}_{m+1}) - \tilde{L}\tilde{z}_m - \tilde{V}k(\tilde{z}_m), \end{array} \right. \quad (3.11)$$

prennent la forme singulièrement perturbée standard (D.2) du théorème de Tikhonov. Le

sous-système lent est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{L}\tilde{x}_0 + \tilde{V}k(\tilde{x}_{m+1}) - \tilde{L}\tilde{z}_m - \tilde{V}k(\tilde{z}_1) \\ 0 = \tilde{L}\tilde{x}_0 + \tilde{V}k(\tilde{z}_2) - \tilde{L}\tilde{z}_1 - \tilde{V}k(\tilde{z}_1) \\ \vdots \\ 0 = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-3} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-1}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-2} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-2}) \\ 0 = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-2} + \tilde{V}k(\tilde{x}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-1} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-1}) \\ \\ 0 = \tilde{L}\tilde{x} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+2}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+1} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+1}) \\ 0 = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+1} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+3}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+2} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+2}) \\ \vdots \\ 0 = \tilde{L}\tilde{z}_{m-1} + \tilde{V}k(\tilde{x}_{m+1}) - \tilde{L}\tilde{z}_m - \tilde{V}k(\tilde{z}_m). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Le sous-système rapide est

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_1}{d\tau} = \tilde{L}\tilde{x}_0 + \tilde{V}k(\tilde{z}_2) - \tilde{L}\tilde{z}_1 - \tilde{V}k(\tilde{z}_1) \\ \vdots \\ \alpha_{j_a-2} \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_{j_a-2}}{d\tau} = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-3} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-1}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-2} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-2}) \\ \alpha_{j_a-1} \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_{j_a-1}}{d\tau} = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-2} + \tilde{V}k(\tilde{x}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-1} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-1}) \\ \\ \alpha_{j_a+1} \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_{j_a+1}}{d\tau} = \tilde{L}\tilde{x} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+2}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+1} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+1}) \\ \alpha_{j_a+2} \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_{j_a+2}}{d\tau} = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+1} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+3}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+2} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+2}) \\ \vdots \\ \alpha_m \mathcal{H} \frac{d\tilde{z}_m}{d\tau} = \tilde{L}\tilde{z}_{m-1} + \tilde{V}k(\tilde{x}_{m+1}) - \tilde{L}\tilde{z}_m - \tilde{V}k(\tilde{z}_m) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

avec  $\tau = t/\varepsilon$ .

Le système rapide (3.13) représente deux compartiments découplés (les plateaux 1 à  $j_a-1$  et les plateaux  $j_a+1$  à  $m$ ) puisque  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_{m+1}$  sont supposés être des paramètres. Le lemme 2 implique que ce système est globalement asymptotiquement stable : nous voyons immédiatement que les hypothèses du théorème de Tikhonov (annexe D) sont vérifiées. Ainsi les solutions du système lent-rapide (3.11) tendent vers celles du système lent (3.12). Il est donc raisonnable d'approximer le système (3.5) par le sous-système lent (3.12). Ce



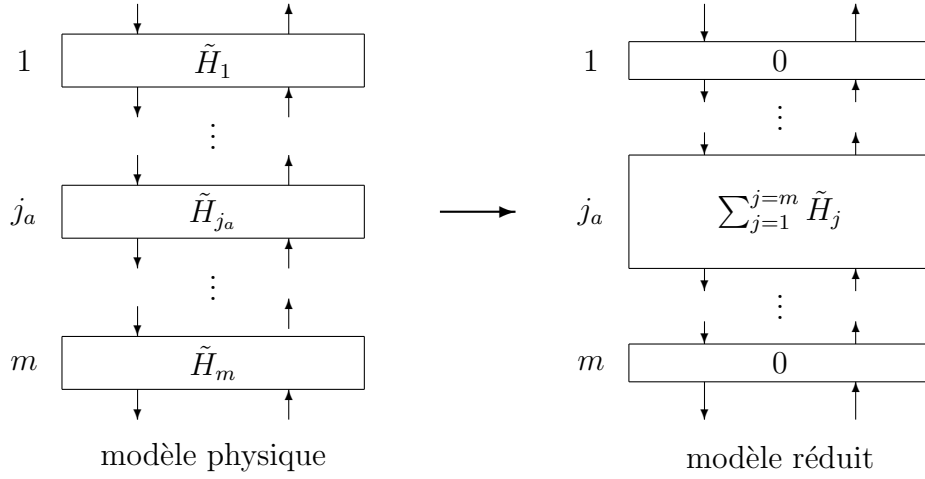


Figure 3.3: la méthode de réduction.

dernier se réécrit ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-1} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+1}) - \tilde{L}\tilde{x} - \tilde{V}k(\tilde{x}) \\ 0 = \tilde{L}\tilde{x}_0 + \tilde{V}k(\tilde{z}_2) - \tilde{L}\tilde{z}_1 - \tilde{V}k(\tilde{z}_1) \\ \vdots \\ 0 = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-3} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-1}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-2} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-2}) \\ 0 = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-2} + \tilde{V}k(\tilde{x}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a-1} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a-1}) \\ \\ 0 = \tilde{L}\tilde{x} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+2}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+1} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+1}) \\ 0 = \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+1} + \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+3}) - \tilde{L}\tilde{z}_{j_a+2} - \tilde{V}k(\tilde{z}_{j_a+2}) \\ \vdots \\ 0 = \tilde{L}\tilde{z}_{m-1} + \tilde{V}k(\tilde{x}_{m+1}) - \tilde{L}\tilde{z}_m - \tilde{V}k(\tilde{z}_m). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Les équations statiques des deux compartiments, 1 à  $j_a - 1$  et  $j_a + 1$  à  $m$ , forment la partie algébrique. Les équations dynamiques autour du plateau  $j_a$  constituent la partie différentielle.

**Remarque 4.** *Le principe de réduction est simple : comme le montre la figure 3.3, il consiste à concentrer les rétentions sur un seul plateau  $j_a$  et à utiliser comme modèle réduit le modèle physique correspondant à ce nouveau profil de rétentions.*

Bien que cette méthode de réduction soit simple, la complexité numérique du modèle n'est pas diminuée : le système différentiel de départ est remplacé par un système algébro-

différentiel de même dimension. Pour la simulation dynamique, une telle réduction ne présente pas d'intérêt. En revanche pour la commande, la réduction est effective puisque la dimension différentielle du système diminue. De plus, par construction, les gains statiques ainsi que la signification physique des variables sont préservés.

### L'agrégation d'une colonne et le choix des compartiments

Pour utiliser la méthode de réduction précédente sur une colonne complète, il suffit de découper la colonne en compartiments et d'utiliser la remarque 4. Le découpage doit tenir compte, dans une certaine mesure, du profil de rétentions. A notre connaissance, la majorité des colonnes binaires possède un profil de rétentions dont les caractéristiques sont :

- les rétentions dans le ballon de reflux et le fond de la colonne sont nettement plus importantes que celle d'un plateau ( $H_1, H_n \gg H_j$  pour  $j = 2, \dots, n-1$ );
- les rétentions  $H_1$  et  $H_n$  sont comparables à  $\sum_{j=2}^{n-1} H_j$ ;
- les rétentions sur les plateaux 2 à  $n-1$  sont voisines ( $H_j \approx H_k$  pour  $2 \leq j, k \leq n-1$ ).

Le modèle réduit doit à la fois représenter correctement la dynamique de la colonne et être de petite dimension.

En conséquence, il est raisonnable, dans un premier temps, de considérer que les plateaux 1 et  $n$  ont leur propre dynamique lente. Pour les plateaux internes 2 à  $n-1$ , le nombre de compartiments est libre.

Pour choisir ce nombre, nous avons comparé en simulation trois possibilités pour le dépropaniseur décrit dans le chapitre 1 : découpages réguliers des plateaux 2 à  $n-1$  en 1, 2 et 3 compartiments<sup>6</sup>.

La figure 3.4 montre les réponses, lorsque la teneur en propane de la charge passe en 15 mn de 0,40 à 0,20, <sup>7</sup> de 4 modèles dynamiques :

- le modèle (3.1) avec 42 plateaux;
- le modèle réduit en 5 compartiments (le ballon de reflux 1, la rectification 2 à 13, l'alimentation 14 à 27, l'épuisement 28 à 41, le fond de colonne 42);
- le modèle réduit en 4 compartiments (le ballon de reflux 1, la rectification 2 à 21, l'épuisement 22 à 41, le fond de colonne 42);
- le modèle réduit en 3 compartiments (le ballon de reflux 1, la colonne 2 à 41, le fond de colonne 42).

<sup>6</sup> La position à l'intérieur d'un compartiment du plateau d'agrégation n'a pas une influence significative sur le modèle réduit. Pour les simulations, ce plateau a toujours été choisi au milieu du compartiment.

<sup>7</sup>La teneur en butane passe dans le même temps de 0,60 à 0,80.

Un bon compromis entre la précision et la dimension du modèle réduit peut être obtenu avec le modèle à 5 compartiments.

Nous avons aussi envisagé d'autres types d'agrégation où le ballon de reflux et le fond de colonne sont considérés comme les autres plateaux. Comme pour la figure 3.4, la figure 3.5 montre les réponses de 3 modèles à la même variation de la composition de l'alimentation :

- le modèle réduit en 5 compartiments (le ballon de reflux 1, la rectification 2 à 13, l'alimentation 14 à 27, l'épuisement 28 à 41, le fond de colonne 42) ;
- un premier modèle réduit en 3 compartiments, le ballon de reflux 1, la colonne 2 à 41, le fond de colonne 42 ;
- un second modèle réduit en 3 compartiments, la rectification 1 à 13, l'alimentation 14 à 27, l'épuisement 28 à 42.

Si le modèle agrégé en 5 compartiments est encore trop grand, nous pouvons le réduire en 3 compartiments. Il suffit, par exemple, de rajouter au compartiment de rectification le ballon de reflux, et au compartiment d'épuisement le fond de colonne.

Pour bien comprendre l'influence de la réduction sur la commande, nous considérons à partir de maintenant les deux types de modèles réduits suivants :

- le modèle en 5 compartiments, ballon de reflux 1, un compartiment de rectification 2 à  $j_r$ , un compartiment autour de l'alimentation  $j_r + 1$  à  $j_s - 1$ , un compartiment d'épuisement  $j_s$  à  $n - 1$ , le fond de la colonne  $n$  ; les plateaux d'agrégation sont  $r$  dans  $\{2, \dots, j_r\}$ ,  $j_F$  dans  $\{j_r + 1, \dots, j_s - 1\}$  et  $s$  dans  $\{j_s, \dots, n - 1\}$  ;
- le modèle en 3 compartiments, un compartiment de rectification incluant le ballon de reflux 1 à  $j_r$ , un compartiment autour de l'alimentation  $j_r + 1$  à  $j_s - 1$ , un compartiment d'épuisement incluant le fond de la colonne  $j_s$  à  $n$  ; les plateaux d'agrégation sont  $r$  dans  $\{2, \dots, j_r\}$ ,  $j_F$  dans  $\{j_r + 1, \dots, j_s - 1\}$  et  $s$  dans  $\{j_s, \dots, n - 1\}$ .

Schématiquement, le modèle en 5 compartiments est assez précis, alors que le modèle en 3 compartiments est plus grossier.

## CHAPITRE 3. LES COLONNES BINAIRES

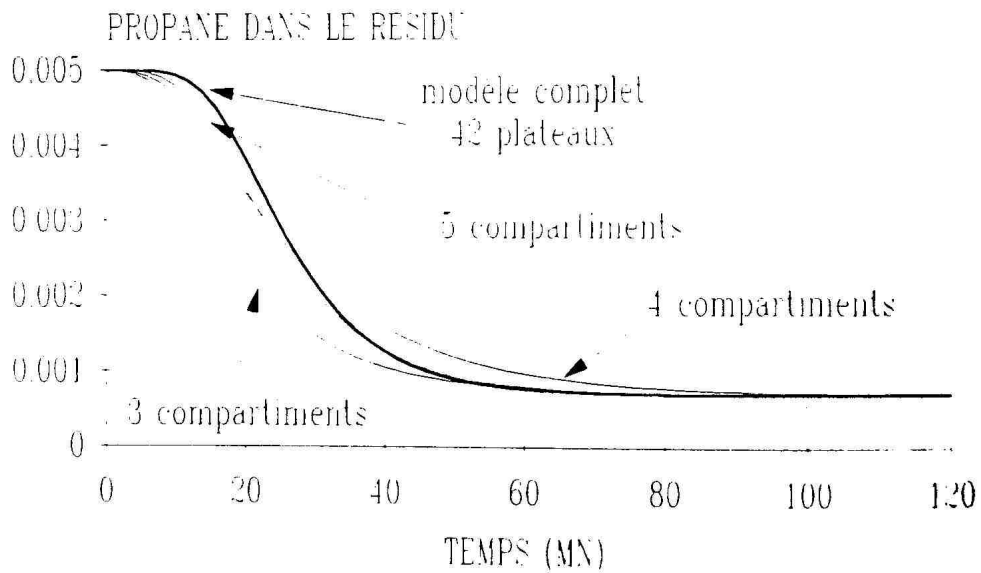
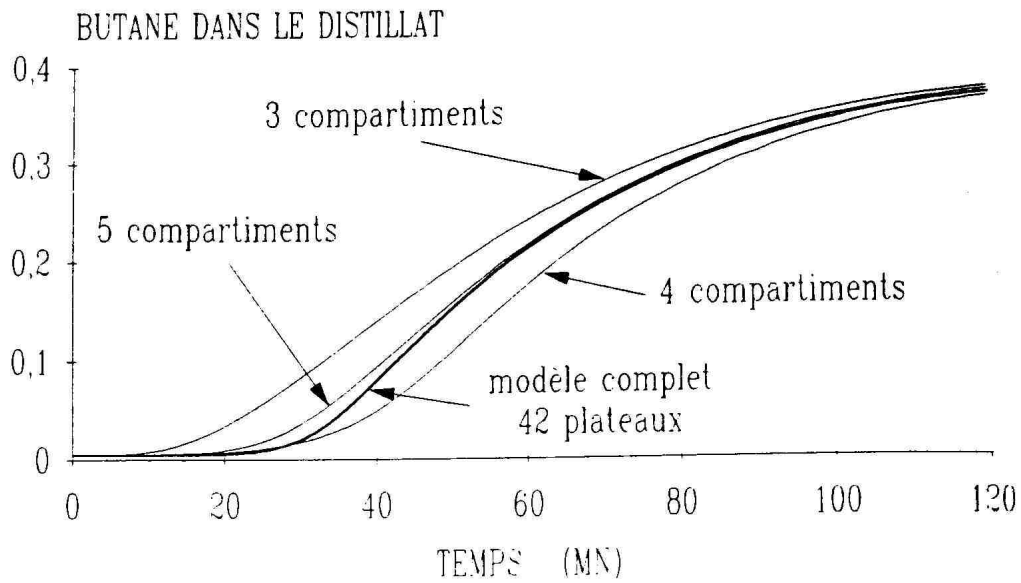
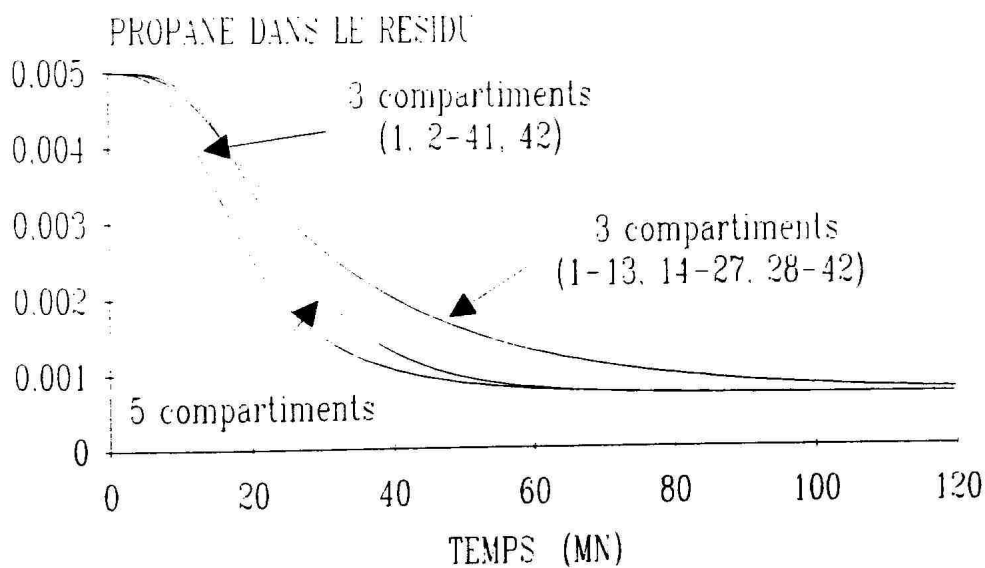
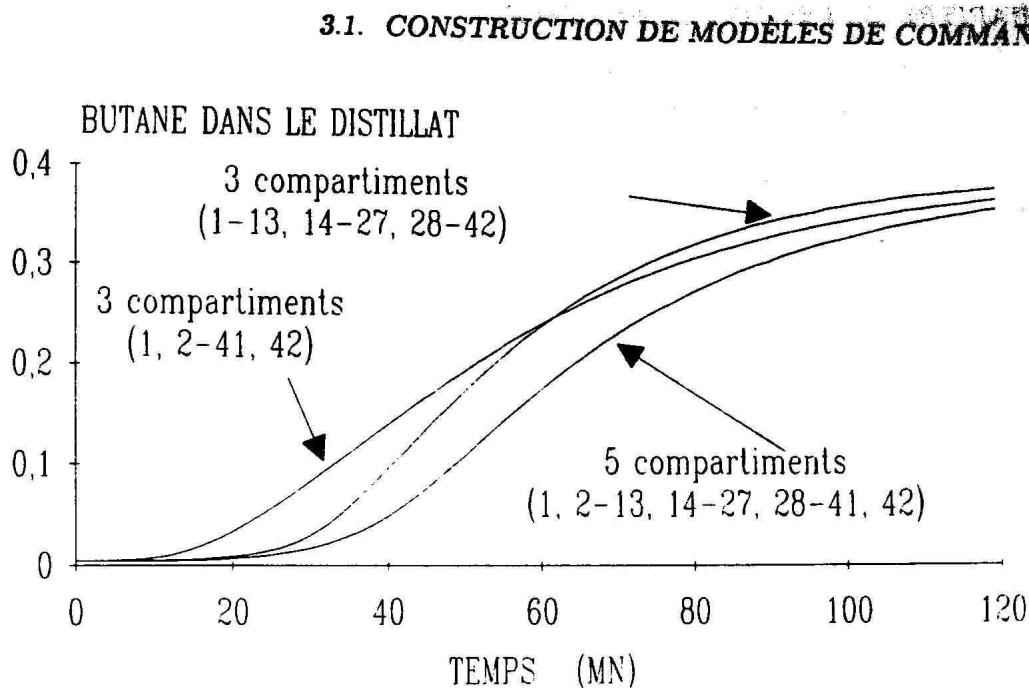


Figure 3.4: comparaison de modèles agrégés en 5, 4 et 3 compartiments; dépropaniseur de 42 plateaux; variation de composition de l'alimentation.



... .. modèles agrégés en 5 et 3 compartiments; dépropaniseur de

Figure 3.5: comparaison de modèles agrégés en 5 et 3 compartiments; dépropaniseur de 42 plateaux; variation de composition de l'alimentation.

$i$	1	2	3	4	5
$\lambda_i$	-0,2260	-0,1862	-0,0605	-0,0149	-0,0040

Table 3.2: spectre du modèle de commande agrégé en 5 compartiments (dépropaniseur de 42 plateaux, les valeurs propres  $(\lambda_i)_{i=1,\dots,5}$ ) sont en  $\text{mn}^{-1}$ ).

$i$	1	2	3
$\lambda_i$	-0,1534	-0,0129	-0,0019

Table 3.3: spectre du modèle de commande agrégé en 3 compartiments (dépropaniseur de 42 plateaux, les valeurs propres  $(\lambda_i)_{i=1,\dots,3}$ ) sont en  $\text{mn}^{-1}$ ).

Nous avons calculé, pour le régime nominal de fonctionnement du dépropaniseur, les spectres des modèles linéaires tangents (cf. tableaux 3.2 et 3.3) correspondant aux modèles en 5 et en 3 compartiments. La comparaison des ces valeurs propres avec celles issues du modèle de grande dimension (tableau 3.1) indique effectivement que les deux modèles agrégés précédents sont lents. La distribution des valeurs propres du modèle de grande dimension (tableau 3.1) permet aussi de définir, uniquement autour d'un point stationnaire, le nombre de compartiments qu'il convient de choisir pour représenter les dynamiques dont les temps caractéristiques sont supérieurs à une limite fixée par avance.

**Remarque 5.** *Dans les simulations précédentes, nous comparons le comportement de plusieurs modèles dynamiques de colonnes binaires. Cette comparaison est faite en boucle ouverte. Il ne s'agit donc que d'indications sur les capacités descriptives de ces modèles et non sur leur aptitude à être commandés.*

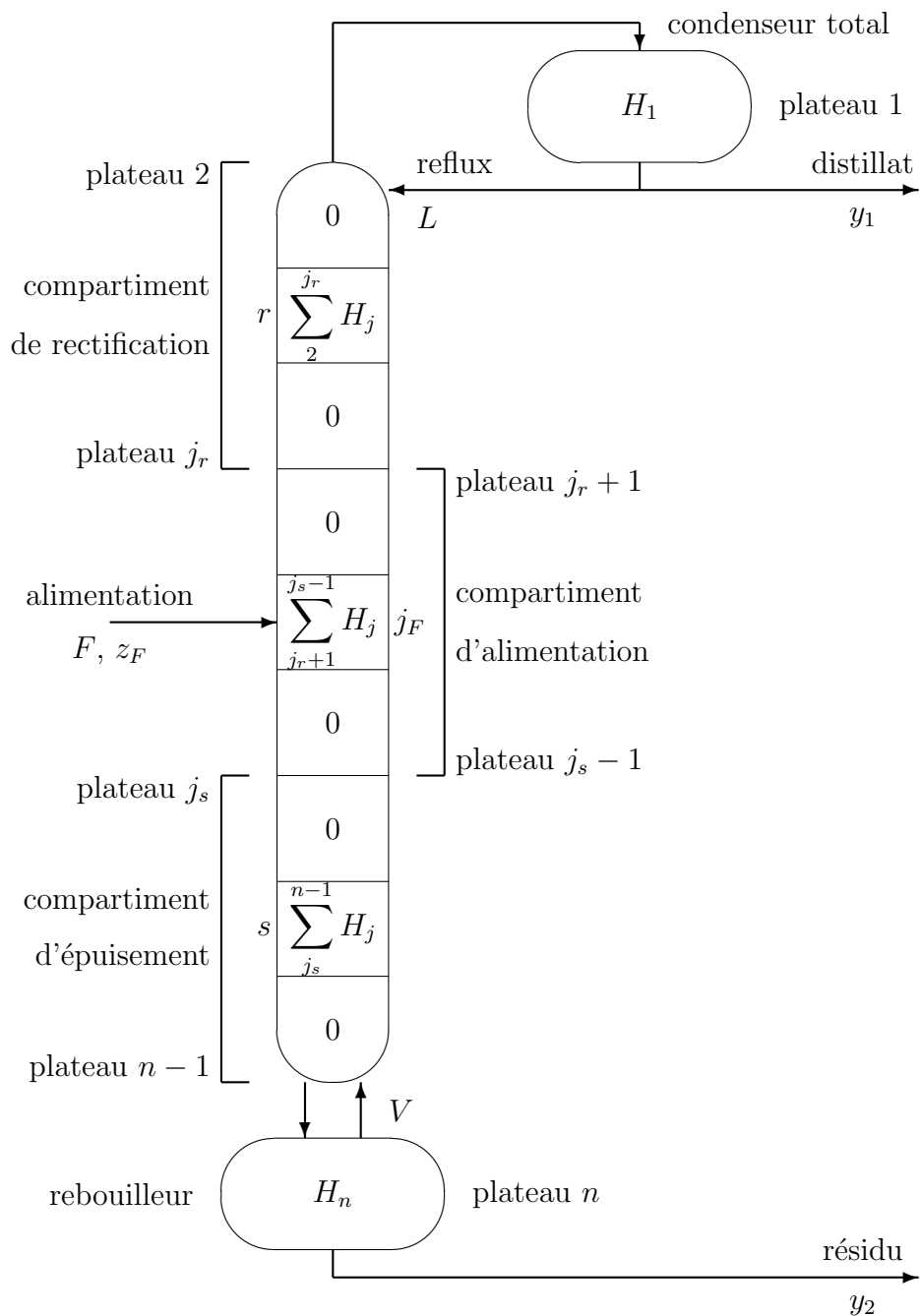


Figure 3.6: l'agrégation en 5 compartiments.

### 3.1.3 Deux modèles de commande

Dans cette sous-section nous détaillons les équations d'état ainsi que les propriétés en boucle ouverte de deux modèles agrégés qui vont servir de modèle de commande.

#### Le modèle agrégé en 5 compartiments

**Les équations** La figure 3.6 de la page 99 schématise l'agrégation en 5 compartiments de la colonne.

Le modèle agrégé en 5 compartiments est décrit par le système algébro-différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{H}_1 \frac{dx_1}{dt} = Vk(x_2) - Vx_1 \\
 \text{pour } j = 2, \dots, r-1 : \\
 0 = Lx_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - Lx_j - Vk(x_j) \\
 \mathcal{H}_r \frac{dx_r}{dt} = Lx_{r-1} + Vk(x_{r+1}) - Lx_r - Vk(x_r) \\
 \text{pour } j = r+1, \dots, j_F-1 : \\
 0 = Lx_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - Lx_j - Vk(x_j) \\
 \mathcal{H}_F \frac{dx_{j_F}}{dt} = Lx_{j_F-1} + Vk(x_{j_F+1}) - (L+F)x_{j_F} - Vk(x_{j_F}) + Fz_F \\
 \text{pour } j = j_F+1, \dots, s-1 : \\
 0 = (L+F)x_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - (L+F)x_j - Vk(x_j) \\
 \mathcal{H}_s \frac{dx_s}{dt} = (L+F)x_{s-1} + Vk(x_{s+1}) - (L+F)x_s - Vk(x_s) \\
 \text{pour } j = s+1, \dots, n-1 : \\
 0 = (L+F)x_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - (L+F)x_j - Vk(x_j) \\
 \mathcal{H}_n \frac{dx_n}{dt} = (L+F)x_{n-1} - (L+F-V)x_n - Vk(x_n)
 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

avec

$$\mathcal{H}_1 = H_1, \quad \mathcal{H}_r = \sum_2^{j_r} H_j, \quad \mathcal{H}_F = \sum_{j_r+1}^{j_s-1} H_j, \quad \mathcal{H}_s = \sum_{j_s}^{n-1} H_j, \quad \mathcal{H}_n = H_n.$$

La partie algébrique est formée par les équations statiques de 4 compartiments : 2 à  $r-1$ ,  $r+1$  à  $j_F-1$ ,  $j_F+1$  à  $e-1$  et  $e+1$  à  $n-1$ . Il nous faut éliminer ces équations algébriques pour obtenir un système d'équations différentielles ordinaires uniquement.<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Le système (3.15) est un système algébro-différentiel d'index 1 (cf. chapitre 2).



Pour cela, il suffit d'utiliser le point (ii) du lemme 2, page 88. Ses équations d'état s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_r, L, V) \\ \frac{dx_r}{dt} = f_r(x_1, x_r, x_{j_F}, L, V) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = f_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = f_s(x_{j_F}, x_s, x_n, L + F, V) \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_s, x_n, L + F, V) \end{array} \right. \quad (3.16)$$

où

- $x_j$  est la composition liquide sur les plateaux  $j = 1, r, j_F, s, n$  ;
- les fonctions  $f_j$  sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_1 f_1(x_1, x_r, L, V) = VY_{r-2}(L/V, x_1, x_r) - Vx_1 \\ \mathcal{H}_r f_r(x_1, x_r, x_{j_F}, L, V) = LX_{r-2}(L/V, x_1, x_r) \\ \quad + VY_{j_F-r-1}(L/V, x_r, x_{j_F}) \\ \quad - Lx_r - Vk(x_r) \\ \mathcal{H}_F f_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) = Fz_F + LX_{j_F-r-1}(L/V, x_r, x_{j_F}) \\ \quad + VY_{s-j_F-1}((L+F)/V, x_{j_F}, x_s) \\ \quad - (L+F)x_{j_F} - Vk(x_{j_F}) \\ \mathcal{H}_s f_s(x_{j_F}, x_s, x_n, L + F, V) = (L+F)X_{s-j_F-1}((L+F)/V, x_{j_F}, x_s) \\ \quad + VY_{n-s-1}((L+F)/V, x_s, x_n) \\ \quad - (L+F)x_s - Vk(x_s) \\ \mathcal{H}_n f_n(x_s, x_n, L + F, V) = (L+F)X_{n-s-1}((L+F)/V, x_s, x_n) \\ \quad - (L+F-V)x_n - Vk(x_n) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

(les fonctions  $X_m$  et  $Y_m$  sont définies par les équations statiques d'un compartiment, point (ii) du lemme 2, avec

$$m = r - 2, j_F - r - 1, s - j_F - 1, n - s - 1).$$

**Les propriétés en boucle ouverte du modèle en 5 compartiments** Le théorème 4 est directement transposable au modèle en 5 compartiments. Autrement dit, la réduction en 5 compartiments préserve les principaux comportements qualitatifs du modèle de connaissance (L, V) de grande dimension.

**Théorème 5.** *Considérons le système (3.16). Supposons que les hypothèses **H1** et **H2** soient vérifiées et que  $dk/dx > 0$  pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ . Alors,*

- (i) *pour toute condition initiale dans  $[0, 1]^5$ , la solution maximale est définie pour  $t$  dans  $[0, +\infty[$  et reste dans  $[0, 1]^5$ ;*
- (ii) *pour chaque  $F, z_F, L$  et  $V$ , il existe un unique point stationnaire  $\bar{x}$  dans  $]0, 1[^5$  dépendant régulièrement de  $(F, z_F, L, V)$ ; si de plus  $k(x) < x$  pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$  alors le point stationnaire vérifie*

$$0 < x_1 < x_r < x_{j_F} < x_s < x_n < 1;$$

- (iii) *si  $F, z_F, L$  et  $V$  sont constants, alors l'unique point stationnaire est globalement asymptotiquement stable (i.e. pour toute condition initiale dans  $[0, 1]^5$ , la solution converge vers le point stationnaire quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ); de plus, pour tout  $x$  dans  $[0, 1]^5$  le jacobien du système par rapport à  $x$  a 5 valeurs propres réelles, distinctes et strictement négatives;*
- (iv) *si  $F, z_F, L$  et  $V$  sont constants et si au temps  $t = 0$  les 5 composantes de  $dx/dt$  sont positives (resp. négatives), alors, pour tout  $t > 0$ , les 5 composantes de  $dx/dt$  restent positives (resp. négatives); si l'on suppose en plus que  $k(x) < x$  pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$ , la réponse de l'état du système à un échelon sur l'une des entrées  $z_F, L$  et  $V$  est monotone, i.e. la solution correspondante  $(x_j(t))_{j=1,r,j_F,s,n}$  de (3.1) est telle que, à chaque instant  $t > 0$ , soit pour tout  $j$  dans  $\{1, r, j_F, s, n\}$   $dx_j/dt \geq 0$ , soit pour tout  $j$  dans  $\{1, r, j_F, s, n\}$   $dx_j/dt \leq 0$ .*

**Preuve** Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 4 relatif au comportement en boucle ouverte du modèle (3.1), et d'utiliser le point (ii) du lemme 2.

### Le modèle agrégé en 3 compartiments

Nous pouvons reprendre point par point, pour le modèle agrégé en 3 compartiments (1 à  $j_r, j_r + 1$  à  $j_s - 1, j_s$  à  $n$ ), les résultats que nous avons établis pour le modèle agrégé en 5 compartiments.

**Les équations** Tous calculs faits, l'équation d'état du système est

$$\begin{cases} \frac{dx_r}{dt} = g_r(x_r, x_{j_F}, L, V) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = g_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = g_s(x_{j_F}, x_s, L + F, V) \end{cases} \quad (3.18)$$

où

- $x_j$  est la composition liquide sur les plateaux  $j = r, j_F, s$  ;
- les fonctions  $g_j$  sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_r g_r(x_1, x_r, x_{j_F}, L, V) = L\mathcal{X}_{r-2}(L/V, x_r) \\ \quad + VY_{j_F-r-1}(L/V, x_r, x_{j_F}) \\ \quad - Lx_r - Vk(x_r) \\ \mathcal{H}_F g_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) = Fz_F + LX_{j_F-r-1}(L/V, x_r, x_{j_F}) \\ \quad + VY_{s-j_F-1}((L+F)/V, x_{j_F}, x_s) \\ \quad - (L+F)x_{j_F} - Vk(x_{j_F}) \\ \mathcal{H}_s g_s(x_{j_F}, x_s, x_n, L+F, V) = (L+F)X_{s-j_F-1}((L+F)/V, x_{j_F}, x_s) \\ \quad + V\mathcal{Y}_{n-s-1}((L+F)/V, x_s) \\ \quad - (L+F)x_s - Vk(x_s) ; \end{array} \right. \quad (3.19)$$

les fonctions  $X_m$  and  $Y_m$  sont définies par le point **(ii)** du lemme 2 pour  $m = j_F - r - 1$  et  $m = s - j_F - 1$  ; la fonction  $\mathcal{X}_{r-1}$  correspond au cas où la première équation de (3.5) au régime stationnaire est remplacée par

$$\tilde{V}(k(\tilde{x}_2) - \tilde{x}_1) = 0 ;$$

la fonction  $\mathcal{Y}_{n-s-1}$  correspond au cas où la dernière équation de (3.5) au régime stationnaire est remplacée par

$$\tilde{L}\tilde{x}_{m-1} - (\tilde{L} - \tilde{V})\tilde{x}_m - Vk(\tilde{x}_m) = 0.$$

**Les propriétés en boucle ouverte du modèle en 3 compartiments** Comme pour le modèle réduit en 5 compartiments, le comportement qualitatif du modèle réduit en 3 compartiments est identique à celui du modèle de connaissance (L, V).

**Théorème 6.** *Considérons le système (3.18). Supposons que les hypothèses **H1** et **H2** soient vérifiées et que  $dk/dx > 0$  pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ . Alors,*

- (i) *pour toute condition initiale dans  $[0, 1]^3$ , la solution maximale est définie pour  $t$  dans  $[0, +\infty[$  et reste dans  $[0, 1]^3$  ;*
- (ii) *pour chaque  $F$ ,  $z_F$ ,  $L$  et  $V$ , il existe un unique point stationnaire  $\bar{x}$  dans  $]0, 1[^3$  dépendant régulièrement de  $(F, z_F, L, V)$  ; si de plus  $k(x) < x$  pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$  alors le point stationnaire vérifie*

$$0 < x_r < x_{j_F} < x_s < 1 ;$$

- (iii) si  $F$ ,  $z_F$ ,  $L$  et  $V$  sont constants, alors l'unique point stationnaire est globalement asymptotiquement stable (i.e. pour toute condition initiale dans  $[0, 1]^3$  la solution converge vers le point stationnaire quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ); de plus, pour tout  $x$  dans  $[0, 1]^3$  le jacobien du système par rapport à  $x$  a 3 valeurs propres réelles, distinctes et strictement négatives;
- (iv) si  $F$ ,  $z_F$ ,  $L$  et  $V$  sont constants et si au temps  $t = 0$  les 3 composantes de  $dx/dt$  sont positives (resp. négatives), alors, pour tout  $t > 0$ , les 3 composantes de  $dx/dt$  restent positives (resp. négatives); si l'on suppose en plus que  $k(x) < x$  pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$ , la réponse de l'état du système à un échelon sur l'une des entrées  $z_F$ ,  $L$  et  $V$  est monotone, i.e. la solution correspondante  $(x_j(t))_{j=r, j_F, s}$  de (3.1) est telle que, à chaque instant  $t > 0$ , soit pour tout  $j$  dans  $\{r, j_F, s\}$   $dx_j/dt \geq 0$ , soit pour tout  $j$  dans  $\{r, j_F, s\}$   $dx_j/dt \leq 0$ .

## Conclusion

Cette méthode de réduction est voisine de celle que proposent Benallou et al. [6] puisqu'elle produit un modèle compartimenté de la colonne. Elle en est néanmoins distincte : nous conservons la structure tridiagonale; nous justifions la réduction par des considérations d'échelles de temps et nous montrons que notre modèle réduit est un modèle lent; nous démontrons que les propriétés qualitatives du système sont préservées par la réduction. Contrairement à la méthode de réduction d'España et Landau [17], nous n'avons pas besoin d'approximer le système par un système bilinéaire ni d'identifier les paramètres du modèle réduit à partir de trajectoires du modèle complet.

En conclusion, cette méthode de réduction est simple et rigoureuse. Elle peut s'étendre, au moins formellement, aux colonnes multi-composés (cf. le chapitre 4), à d'autres procédés de séparation multi-étagés. Pour la simulation, elle ne présente pas beaucoup d'intérêt. En revanche, pour la commande, elle fournit des modèles dynamiques non linéaires de petite dimension qui préservent les phénomènes lents et asymptotiques. Par rapport aux modèles utilisés dans la littérature pour calculer une commande en qualité, les modèles (3.16) et (3.18) sont les seuls qui soient de taille restreinte et qui, en même temps, possèdent les mêmes propriétés qualitatives que celles du modèle de connaissance  $(L, V)$  (3.1).

## 3.2 Le rejet de perturbations avec stabilité

L'objectif de la commande est de rendre les qualités du distillat  $y_1 = x_1$  et du résidu  $y_2 = x_n$  indépendantes du débit et de la composition de l'alimentation. Nous allons calculer la loi de commande en utilisant les techniques de rejet de perturbations, présentées dans l'annexe A, sur le modèle en 5 compartiments et sur le modèle en 3 compartiments. Pour ces deux modèles de commande, la loi de commande existe autour de n'importe quel

point stationnaire, est unique (il n'y a pas de singularité) et peut être calculée directement avec les sorties et deux températures. De plus ces deux modèles de commande sont localement asymptotiquement stables en boucle fermée (leur dynamiques des zéros sont localement asymptotiquement stables).

### 3.2.1 Le rejet de perturbations sur le modèle en 5 compartiments

Le modèle de commande est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_r, L, V) \\ \frac{dx_r}{dt} = f_r(x_1, x_r, x_{j_F}, L, V) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = f_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = f_s(x_{j_F}, x_s, x_n, L + F, V) \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_s, x_n, L + F, V) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_n \end{array} \right. \quad (3.20)$$

(les fonctions  $f_j$  sont définies par (3.17)). Les sorties sont  $y_1$  et  $y_2$ . Les commandes sont  $L$  et  $V$ . Les perturbations sont  $F$  et  $z_F$ .

#### Existence et stabilité

**Théorème 7.** *Considérons le modèle agrégé en 5 compartiments (3.20). Supposons que la fonction  $k$  soit continûment dérivable de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(1) = 1$ ,  $\frac{d}{dx}k > 0$  et  $k(x) < x$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ . Soit  $\bar{x}$ , l'état stationnaire associé aux entrées  $\bar{L} > 0$ ,  $\bar{V} > 0$ ,  $\bar{F} > 0$  et  $\bar{z}_F \in ]0, 1[$  vérifiant  $\bar{L} < \bar{V} < \bar{L} + \bar{F}$ . Les valeurs stationnaires des sorties sont notées  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$ . Alors, localement autour de  $\bar{x}$ , les deux propositions qui suivent sont vraies :*

- (i) *il existe une loi de commande unique dépendant de  $x_1$ ,  $x_r$ ,  $x_s$ ,  $x_n$  et  $F$  telle que la dynamique des sorties en boucle fermée soit*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = \phi_1(y_1) \\ \frac{dy_2}{dt} = \phi_2(y_2), \end{array} \right.$$

avec  $\phi_1$  et  $\phi_2$  des fonctions régulières arbitraires s'annulant au point stationnaire ( $\phi_1(\bar{y}_1) = 0$  et  $\phi_2(\bar{y}_2) = 0$ ); cette loi de commande est la solution du système

$$\begin{cases} V (Y_{r-2}(L/V, x_1, x_r) - x_1) = \phi_1(y_1) \\ (L + F) X_{n-s-1}((L + F)/V, x_s, x_n) \\ \quad - (L + F - V) x_n - V k(x_n) = \phi_2(y_2) \end{cases} \quad (3.21)$$

où les fonctions  $Y_{r-2}$  et  $X_{n-s-1}$  sont définies par les relations du point (ii) du lemme 2;

(ii) si la dynamique des sorties,  $\phi_1(y_1)$  et  $\phi_2(y_2)$ , est choisie asymptotiquement stable, alors le système (3.20) avec la loi de commande solution de (3.21) est asymptotiquement stable; autrement dit, la dynamique des zéros est stable.

**Preuve de (i)** Comme le montre l'annexe A, la commande est obtenue en dérivant les sorties par rapport au temps. La loi de commande vérifie nécessairement

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_r, L, V) = \phi_1(y_1) \\ f_n(x_s, x_n, L + F, V) = \phi_2(y_2). \end{cases}$$

En utilisant les relations (3.17),  $L$  et  $V$  vérifient nécessairement

$$\begin{cases} V (Y_{r-2}(L/V, x_1, x_r) - x_1) = \phi_1(y_1) \\ (L + F) X_{n-s-1}((L + F)/V, x_s, x_n) - (L + F - V) x_n - V k(x_n) = \phi_2(y_2). \end{cases}$$

Considérons le changement de variables suivant

$$\begin{pmatrix} L \\ V \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r_r = L/V \\ r_e = V/(L + F) \end{pmatrix}.$$

C'est bien un changement de variable autour du point stationnaire car  $r_r r_e < 1$  et donc

$$L = \frac{r_r r_e}{1 - r_r r_e} F \quad \text{et} \quad V = \frac{r_e}{1 - r_r r_e} F.$$

Ainsi,  $r_r$  et  $r_e$  vérifient

$$\begin{cases} \frac{r_e F}{1 - r_r r_e} (Y_{r-2}(r_r, x_1, x_r) - x_1) = \phi_1(y_1) \\ \frac{F}{1 - r_r r_e} (X_{n-s-1}(1/r_e, x_s, x_n) - (1 - r_e) x_n - r_e k(x_n)) = \phi_2(y_2). \end{cases}$$

Le jacobien de ce système par rapport à  $r_r$  et  $r_e$  est diagonal au point stationnaire<sup>9</sup> :

$$\begin{pmatrix} \frac{r_e F}{1 - r_r r_e} \frac{\partial Y_{r-2}}{\partial(L/V)} & 0 \\ 0 & \frac{F}{1 - r_r r_e} \left( \bar{x}_n - k(\bar{x}_n) - \frac{1}{r_e^2} \frac{\partial X_{n-s-1}}{\partial(L/V)} \right) \end{pmatrix}.$$

Comme  $k(x) < x$  pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$ , nous avons (théorème 4)  $0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_n$ . Les inégalités (3.8) du lemme 2 sont donc satisfaites pour  $Y_{r-1}$  et  $X_{n-s-1}$  :

$$\frac{\partial Y_{r-1}}{\partial(\tilde{L}/\tilde{V})} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial X_{n-s-1}}{\partial(\tilde{L}/\tilde{V})} < 0.$$

Ainsi

$$\frac{\partial Y_{r-2}}{\partial(L/V)}(\bar{L}/\bar{V}, \bar{x}_1, \bar{x}_r) < 0$$

et

$$\bar{x}_n - k(\bar{x}_n) - \left( \frac{\bar{L} + \bar{F}}{\bar{V}} \right)^2 \frac{\partial X_{n-s-1}}{\partial(L/V)}((\bar{L} + \bar{F})/\bar{V}, \bar{x}_s, \bar{x}_n) > 0.$$

Ce qui montre que le jacobien est inversible au point stationnaire. Le théorème des fonctions implicites permet alors de conclure.

**Preuve de (ii)** Comme les dynamiques  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont choisies asymptotiquement stables, il suffit de vérifier que la dynamique des zéros (voir l'annexe A et [9]) est asymptotiquement stable. Nous allons montrer directement la stabilité locale en utilisant le critère de Routh-Hurwitz (voir [24] par exemple) sur le linéarisé tangent au point stationnaire.

La loi de commande est donnée localement par

$$\begin{aligned} L &= \Xi_1(x_1, x_r, x_s, x_n, F, \phi_1(x_1), \phi_2(x_n)) \\ V &= \Xi_2(x_1, x_r, x_s, x_n, F, \phi_1(x_1), \phi_2(x_n)), \end{aligned}$$

où  $\Xi_1$  et  $\Xi_2$  sont des fonctions continûment dérivables. Le système bouclé est donc décrit

---

<sup>9</sup>Au point stationnaire,  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  et donc  $Y_{r-2} - \bar{x}_1 = 0$  et  $X_{n-s-1} - (1 - r_e)\bar{x}_n - r_e k(\bar{x}_n) = 0$ . Ce qui simplifie les calculs du jacobien.

par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \phi_1(x_1) \\ \frac{dx_r}{dt} = f_r(x_1, x_r, x_{j_F}, \Xi_1(x_1, x_r, x_s, x_n, F, \phi_1(x_1), \phi_2(x_n)), \\ \Xi_2(x_1, x_r, x_s, x_n, F, \phi_1(x_1), \phi_2(x_n))) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = f_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, \Xi_1(x_1, x_r, x_s, x_n, F, \phi_1(x_1), \phi_2(x_n)), \\ \Xi_2(x_1, x_r, x_s, x_n, F, \phi_1(x_1), \phi_2(x_n)), F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = f_s(x_{j_F}, x_s, x_n, \Xi_1(x_1, x_r, x_s, x_n, F, \phi_1(x_1), \phi_2(x_n)), \\ \Xi_2(x_1, x_r, x_s, x_n, F, \phi_1(x_1), \phi_2(x_n)), F) \\ \frac{dx_n}{dt} = \phi_2(x_n). \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Les dynamiques de  $x_1$  et  $x_n$  sont découplées et stables par hypothèse. La stabilité est donc assurée si la dynamique des zéros, obtenue en fixant  $\phi_1$  à 0,  $\phi_2$  à 0,  $x_1$  à  $\bar{y}_1$  et  $x_n$  à  $\bar{y}_2$  dans (3.22), est asymptotiquement stable. C'est à dire, si

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_r}{dt} = f_r(\bar{y}_1, x_r, x_{j_F}, \Xi_1(\bar{y}_1, x_r, x_s, \bar{y}_2, F, 0, 0), \Xi_2(\bar{y}_1, x_r, x_s, \bar{y}_2, F, 0, 0)) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = f_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, \Xi_1(\bar{y}_1, x_r, x_s, \bar{y}_2, F, 0, 0), \Xi_2(\bar{y}_1, x_r, x_s, \bar{y}_2, F, 0, 0), F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = f_s(x_{j_F}, x_s, \bar{y}_2, \Xi_1(\bar{y}_1, x_r, x_s, \bar{y}_2, F, 0, 0), \Xi_2(\bar{y}_1, x_r, x_s, \bar{y}_2, F, 0, 0), F) \end{array} \right. \quad (3.23)$$

est asymptotiquement stable.

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette démonstration, nous supposons implicitement que toutes les fonction sont évaluées au point stationnaire. De plus, pour des raisons de clarté dans les formules, nous notons  $\frac{\partial}{\partial x_r} L$  pour  $\frac{\partial}{\partial x_r} \Xi_1$  et  $\frac{\partial}{\partial x_r} V$  pour  $\frac{\partial}{\partial x_r} \Xi_2$ .

Les équations définissant la loi de commande se découpent lorsque  $\phi_1 = 0$  et  $\phi_2 = 0$ . Elles deviennent<sup>10</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{r-2} \left( \bar{y}_1, x_r, \frac{L}{V} \right) - \bar{y}_1 = 0 \\ \frac{L+F}{V} x_s - \left( \frac{L+F}{V} - 1 \right) \bar{y}_2 - Y_{n-s-1} \left( x_s, \bar{y}_2, \frac{L+F}{V} \right) = 0. \end{array} \right.$$

<sup>10</sup>Nous avons utilisé (3.6) pour la deuxième équation de façon à ne faire intervenir que des fonctions  $Y_m$ .



Les inégalités (3.8) du lemme 2 impliquent que

$$\frac{V}{L+F} \frac{\partial L}{\partial x_r} = \frac{\partial V}{\partial x_r} > 0, \quad \frac{\partial L/V}{\partial x_r} > 0, \quad \frac{\partial(L+F)/V}{\partial x_r} = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial L/V}{\partial x_s} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_s} = \frac{L}{V} \frac{\partial V}{\partial x_s} < 0, \quad \frac{\partial(L+F)/V}{\partial x_s} > 0. \quad (3.25)$$

En utilisant (3.17), le système (3.23) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r \frac{dx_r}{dt} &= -\xi_1 + \xi_r \\ \mathcal{H}_{j_F} \frac{dx_{j_F}}{dt} &= Fz_F - \xi_r - \xi_s \\ \mathcal{H}_s \frac{dx_s}{dt} &= -\xi_n + \xi_s, \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec  $\xi_1$ ,  $\xi_r$ ,  $\xi_s$  et  $\xi_n$  fonctions de  $(x_r, x_{j_F}, x_s)$  et définies par

$$\begin{aligned} \xi_1(x_r, x_s) &= (V(x_r, x_s) - L(x_r, x_s)) \bar{y}_1 \\ \xi_r(x_r, x_{j_F}, x_s) &= V(x_r, x_s) Y_{j_F-r-1} \left( \frac{L}{V}(x_r), x_r, x_{j_F} \right) - L(x_r, x_s) x_r \\ \xi_s(x_r, x_{j_F}, x_s) &= (L(x_r, x_s) + F) x_{j_F} - V(x_r, x_s) Y_{s-j_F-1} \left( \frac{L+F}{V}(x_s), x_{j_F}, x_s \right) \\ \xi_n(x_r, x_s) &= (L(x_r, x_s) + F - V(x_r, x_s)) \bar{y}_2. \end{aligned}$$

Nous allons calculer le linéarisé tangent de (3.26). Les équations (3.25) et  $\xi_r - \xi_1 = 0$  au point stationnaire impliquent que

$$\frac{\partial}{\partial x_s} (\xi_r - \xi_1) = 0.$$

Symétriquement,

$$\frac{\partial}{\partial x_r} (\xi_s - \xi_n) = 0.$$

En conséquence, la matrice jacobienne  $A$  s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a_1 + a_2}{\mathcal{H}_r} & \frac{a_3}{\mathcal{H}_r} & 0 \\ -\frac{a_2 + b_2}{\mathcal{H}_F} & -\frac{a_3 + b_3}{\mathcal{H}_F} & -\frac{a_4 + b_4}{\mathcal{H}_F} \\ 0 & \frac{b_3}{\mathcal{H}_s} & \frac{b_1 + b_4}{\mathcal{H}_s} \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\partial \xi_1}{\partial x_r}, & a_2 &= \frac{\partial \xi_r}{\partial x_r}, & a_3 &= \frac{\partial \xi_r}{\partial x_{j_F}}, & a_4 &= \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s}, \\ b_1 &= -\frac{\partial \xi_n}{\partial x_s}, & b_2 &= \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r}, & b_3 &= \frac{\partial \xi_s}{\partial x_{j_F}}, & b_4 &= \frac{\partial \xi_s}{\partial x_s}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres  $\lambda$  de  $A$  sont solutions de

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1 + a_2}{\mathcal{H}_r} - \lambda & \frac{a_3}{\mathcal{H}_r} & 0 \\ -\frac{a_2 + b_2}{\mathcal{H}_F} & -\frac{a_3 + b_3}{\mathcal{H}_F} - \lambda & -\frac{a_4 + b_4}{\mathcal{H}_F} \\ 0 & \frac{b_3}{\mathcal{H}_s} & \frac{b_1 + b_4}{\mathcal{H}_s} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou, de façon équivalente, de

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 - \mathcal{H}_r \lambda & a_3 & 0 \\ a_1 - b_2 - \mathcal{H}_r \lambda & -\mathcal{H}_F \lambda & b_1 - a_4 - \mathcal{H}_s \lambda \\ 0 & b_3 & b_1 + b_4 - \mathcal{H}_s \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= \frac{\partial(L - V)}{\partial x_r} \bar{y}_1 + \frac{\partial(VY_{j_F-r-1} - Lx_r)}{\partial x_r} \\ &= \frac{L + F - V}{L + F} \bar{y}_1 \frac{\partial L}{\partial x_r} + \frac{VY_{j_F-r-1} - (L + F)x_r}{L + F} \frac{\partial L}{\partial x_r} \\ &\quad + V \left( \frac{\partial Y_{j_F-r-1}}{\partial(L/V)} \right) \frac{\partial L/V}{\partial x_r} + V \frac{\partial Y_{j_F-r-1}}{\partial x_r} - L \\ &= \underbrace{\frac{F(\bar{y}_1 - x_r)}{L + F}}_{<0} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_r}}_{>0} + V \left( \underbrace{\frac{\partial Y_{j_F-r-1}}{\partial(L/V)}}_{<0} \right) \underbrace{\frac{\partial L/V}{\partial x_r}}_{>0} + \underbrace{V \frac{\partial Y_{j_F-r-1}}{\partial x_r} - L}_{<0}, \end{aligned}$$

(utiliser  $\xi_1 = \xi_r$  au point stationnaire, (3.24), (3.7) avec  $m = j_F - r - 1$  et  $x_r$  jouant le rôle de  $\tilde{x}_0$ ,  $\bar{y}_1 < \bar{x}_r$ ). Ainsi  $a_1 + a_2 < 0$ .

Des calculs similaires montrent que

$$a_3 > 0, \quad a_1 - b_2 < 0, \quad b_1 - a_4 < 0, \quad b_3 > 0, \quad b_1 + b_4 < 0.$$

Notons

$$\alpha_1 = -\frac{a_1 + a_2}{\mathcal{H}_r}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_1 - b_2}{\mathcal{H}_r}, \quad \alpha_3 = \frac{a_3}{\mathcal{H}_F},$$

et

$$\beta_1 = -\frac{b_1 + b_4}{\mathcal{H}_s}, \quad \beta_2 = -\frac{b_1 - a_4}{\mathcal{H}_s}, \quad \beta_3 = \frac{b_3}{\mathcal{H}_F}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  sont strictement positifs. Le polynôme caractéristique de  $A$  est alors

$$\lambda^3 + (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_3)\lambda^2 + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\beta_1 + \beta_3\beta_2 + \beta_3\alpha_1)\lambda + \alpha_2\alpha_3\beta_1 + \beta_2\beta_3\alpha_1.$$

Ses coefficients vérifient les inégalités de Routh-Hurwitz (voir [24], page 176) :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_3 &> 0 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\beta_1 + \beta_3\beta_2 + \beta_3\alpha_1 &> 0 \\ \alpha_2\alpha_3\beta_1 + \beta_2\beta_3\alpha_1 &> 0 \\ (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_3)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\beta_1 + \beta_3\beta_2 + \beta_3\alpha_1) &> \alpha_2\alpha_3\beta_1 + \beta_2\beta_3\alpha_1. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition (ii) du théorème.

### Synthèse en température de la commande

La loi de commande donnée par (3.21) dépend des compositions du distillat et du résidu ( $x_1$  et  $x_n$ ), mais aussi du débit d'alimentation et des compositions sur les plateaux d'agrégation  $r$  et  $s$ . En pratique, les compositions des produits sont mesurées ainsi que le débit d'alimentation. En revanche les compositions internes ne le sont pas. Cependant elles peuvent être estimées à l'aide de températures.

Soit  $T_r$  la température sur le plateau d'agrégation en rectification  $r$ . Soit  $T_s$  la température sur le plateau d'agrégation en épuisement  $s$ . Si ces deux températures sont mesurées elles peuvent être considérées comme des sorties du système (3.20). En effet, l'équilibre thermodynamique entre le liquide et la vapeur implique que les températures sont fonctions des compositions liquides  $x_r$  et  $x_s$  :

$$T_r = \Theta(x_r) \quad T_s = \Theta(x_s).$$

Ainsi, nous pouvons remonter aux compositions ( $x_r, x_s$ ) et ainsi calculer la loi de commande (3.21).

En résumé, si les compositions du distillat et du résidu, ( $x_1$  et  $x_n$ ), le débit d'alimentation  $F$ , la température de rectification  $T_r$  et la température d'épuisement  $T_s$  sont mesurées, la loi de commande peut être calculée en résolvant le système algébrique de dimension 4 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_r, L, V) = \phi_1(y_1) \\ f_n(x_s, x_n, L + F, V) = \phi_2(y_2) \\ \Theta(x_r) = T_r \\ \Theta(x_s) = T_s. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Les 4 inconnues sont  $x_r, x_s, L$  et  $V$ .

Cette synthèse en température de la loi de commande suppose que les compositions du distillat et du résidu sont mesurées. Si  $x_1$  et  $x_n$  ne sont pas mesurées, la démarche précédente peut être modifiée afin de les remplacer par deux températures additionnelles l'une en rectification et l'autre en épuisement. En effet, il est facile de voir que les températures sur les plateaux 2 à  $r - 1$  et  $s + 1$  à  $n$  sont fonctions uniquement de  $x_1$ ,  $x_r$ ,  $x_s$ ,  $x_n$ ,  $L$ ,  $F$  et  $V$ . Par exemple, si l'on dispose des températures de tête  $T_2$  et du plateau de fond  $T_n$ , alors la commande est donnée par le système algébrique de dimension 6

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_r, L, V) = \phi_1(y_1) \\ f_n(x_s, x_n, L + F, V) = \phi_2(y_2) \\ \Theta \left( k^{-1} \left( x_1 + \frac{H_1 f_1(x_1, x_r, L, V)}{V} \right) \right) = T_2 \\ \Theta(x_r) = T_r \\ \Theta(x_s) = T_s \\ \Theta(x_n) = T_n, \end{array} \right.$$

les inconnues étant  $x_1$ ,  $x_r$ ,  $x_s$ ,  $x_n$ ,  $L$  et  $V$  ( $k^{-1}$  est l'inverse de la fonction d'équilibre  $k$ ).

En d'autres termes, il est possible de remplacer des capteurs de compositions, en général coûteux et introduisant des retards, par des capteurs de températures peu chers et instantanés. De plus, les positions des températures peuvent être choisies de façon que le système ci-dessus, dont la solution fournit les deux commandes  $L$  et  $V$ , soit le mieux conditionné possible. Ceci constitue un critère simple et ne faisant intervenir que des équations statiques, pour choisir une bonne instrumentation en température de la colonne.

Enfin, les raisons pour lesquelles de nombreux auteurs (voir par exemple [61]) suggèrent des cascades de régulation température/composition s'expliquent très simplement ici : l'information contenue dans les températures de rectification et d'épuisement équivaut à celle des variables de l'état lent.

### 3.2.2 Le rejet de perturbations sur le modèle en 3 compartiments

Le modèle de commande est ici

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_r}{dt} = g_r(x_r, x_{j_F}, L, V) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = g_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = g_s(x_{j_F}, x_s, L + F, V) \\ y_1 = S_1(L/V, x_r) \\ y_2 = S_2((L + F)/V, x_s) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

(les fonctions  $g_j$  sont définies par (3.19)). Les sorties sont  $y_1$  et  $y_2$ . Elles dépendent directement des commandes  $L$  et  $V$ . En effet, si nous reprenons les calculs du chapitre 3 qui conduisent au modèle réduit en 3 compartiments, nous nous apercevons rapidement que les compositions du distillat et du résidu sont respectivement fonctions de  $(x_r, L/V)$  et  $(x_s, (L + F)/V)$ . Ceci explique la présence des fonctions  $S_1$  et  $S_2$ . Ces fonctions sont obtenues en résolvant les équations statiques des plateaux 1 à  $r - 1$  et  $s + 1$  à  $n$ , c'est à dire en résolvant par rapport à  $(x_1, \dots, x_{r-1})$

$$\begin{cases} 0 = Vk(x_2) - Vx_1 \\ 0 = Lx_1 + Vk(x_3) - Lx_2 - Vk(x_2) \\ \vdots \\ 0 = Lx_{r-2} + Vk(x_r) - Lx_{r-1} - Vk(x_{r-1}) \end{cases} \quad (3.29)$$

avec  $S_1 = x_1$ , et en résolvant par rapport à  $(x_{s+1}, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} 0 = (L + F)x_s + Vk(x_{s+2}) - (L + F)x_{s+1} - Vk(x_{s+1}) \\ \vdots \\ 0 = (L + F)x_{n-2} + Vk(x_n) - (L + F)x_{n-1} - Vk(x_{n-1}) \\ 0 = (L + F)x_{n-1} - (L + F - V)x_n - Vk(x_n) \end{cases} \quad (3.30)$$

avec  $S_2 = x_n$ .

### Existence et stabilité

**Théorème 8.** *Considérons le modèle agrégé en 3 compartiments (3.28). Supposons que la fonction  $k$  soit continûment dérivable de  $]0, 1[$  dans  $[0, 1]$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(1) = 1$ ,  $\frac{dk}{dx} > 0$  et  $k(x) < x$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ . Soit  $\bar{x}$  l'état stationnaire associé aux entrées  $\bar{L} > 0$ ,  $\bar{V} > 0$ ,  $\bar{F} > 0$  et  $\bar{z}_F \in ]0, 1[$  vérifiant  $\bar{L} < \bar{V} < \bar{L} + \bar{F}$ . Les valeurs stationnaires des sorties sont notées  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$ . Alors, localement autour de  $\bar{x}$ , les deux propositions qui suivent sont vraies :*

- (i) *il existe une loi de commande unique dépendant de  $x_r$ ,  $x_s$  et  $F$  telle que les sorties en boucle fermée soient constantes,*

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{y}_1 \\ y_2 &= \bar{y}_2 ; \end{aligned}$$

*les commandes sont solutions du système*

$$\begin{cases} S_1(L/V, x_r) = \bar{y}_1 \\ S_2((L + F)/V, x_s) = \bar{y}_2 ; \end{cases} \quad (3.31)$$

- (ii) *le système bouclé est asymptotiquement stable.*

**Preuve de (i)** Comme pour le point **(ii)** du lemme 2, il est possible de montrer que

$$\frac{\partial S_1}{\partial(L/V)} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S_2}{\partial((L+F)/V)} < 0.$$

Pour cela, il suffit de raisonner, avec les relations algébriques (3.29) et (3.30), par récurrence sur le nombre de plateaux ; les détails sont laissés au lecteur. Dès lors, les deux équations qui permettent de calculer la commande,

$$\begin{aligned} S_1(L/V, x_r) &= \bar{y}_1 \\ S_2((L+F)/V, x_s) &= \bar{y}_2, \end{aligned}$$

sont inversibles.

**Preuve de (ii)** Remarquons que le système bouclé est identique au système (3.23) décrivant la dynamique des zéros lors de la preuve du point **(ii)** du théorème 7 : seules changent les rétentions  $\mathcal{H}_r$  et  $\mathcal{H}_s$ . Comme la preuve de la stabilité de (3.23) ne suppose que  $\mathcal{H}_r > 0$  et  $\mathcal{H}_s > 0$ , la stabilité autour du point stationnaire du système en boucle fermée est donc assurée.

### Synthèse en température de la commande

Comme pour le modèle en 5 compartiments, les compositions internes  $x_r$  et  $x_s$  peuvent être reconstituées à l'aide des deux températures  $T_r$  et  $T_s$ .

Si le débit d'alimentation  $F$ , les températures  $T_r$  et les températures d'épuisement  $T_s$  sont mesurés, la loi de commande est donnée par

$$\begin{cases} S_1(L/V, x_r) = y_1^c \\ S_2((L+F)/V, x_s) = y_2^c \\ \Theta(x_r) = T_r \\ \Theta(x_s) = T_s \end{cases} \quad (3.32)$$

avec  $y_1^c$  et  $y_2^c$  les consignes des sorties.

La loi de commande élaborée sur le modèle réduit en 3 compartiments permet de commander les compositions du distillat et du résidu *sans* les mesurer, uniquement en connaissant le débit d'alimentation, une température en rectification et une température en épuisement.

### 3.2.3 Conclusions

Dans les deux théorèmes 7 et 8, l'hypothèse  $k(x) < x$  pour tout  $x \in ]0, 1[$  signifie que les équations du modèle sont relatives au composé lourd. Pour des raisons de symétrie, les mêmes résultats restent valables si les équations correspondent au composé léger, i.e.

si  $\forall x \in ]0, 1[$ ,  $k(x) > x$ . Cette analyse reste donc valable si nous supposons que  $k(x) < x$ ,  $\forall x \in ]0, a[$  et  $k(x) > x$ ,  $\forall x \in ]a, 1[$  où  $a \in ]0, 1[$  est la composition azéotropique ( $k(a) = a$ ). La raison est simple : les compositions stationnaires sont toutes du même côté de  $a$  si  $z_F \neq a$ . Ainsi, pour n'importe quelle colonne binaire, les propositions **(i)** et **(ii)** des deux théorèmes précédents sont vraies.

Dans les modèles précédents, nous avons supposé, pour éviter de compliquer encore plus les calculs, que l'alimentation est liquide et à température de bulle. Les résultats précédents restent naturellement vrais si la charge est liquide et sous-refroidie, partiellement vaporisée ou vapeur et surchauffée. Notons  $v_{frac}$  la fraction vaporisée de la charge<sup>11</sup>. Les débits liquides et vapeurs deviennent alors  $L$  et  $V + v_{frac}F$  en rectification,  $L + (1 - v_{frac})F$  et  $V$  en épuisement. Ceci n'entraîne que des modifications mineures au niveau du modèle de connaissance (L,V) et des deux modèles agrégés. Le rejet de perturbation sur le modèle en 5 compartiments est donné par

$$\begin{aligned} (V + v_{frac}F) (Y_{r-2}(L/(V + v_{frac}F), x_1, x_r) - x_1) &= \phi_1(y_1) \\ (L + (1 - v_{frac})F) X_{n-s-1}((L + (1 - v_{frac})F)/V, x_s, x_n) \\ - (L + (1 - v_{frac})F - V) x_n - V k(x_n) &= \phi_2(y_2). \end{aligned}$$

Le rejet de perturbation sur le modèle en 3 compartiments est donné par

$$\begin{aligned} S_1(L/(V + v_{frac}F), x_r) &= \bar{y}_1 \\ S_2((L + (1 - v_{frac})F)/V, x_s) &= \bar{y}_2. \end{aligned}$$

(3.21) et (3.31) sont des cas particuliers des relations ci-dessus avec  $v_{frac} = 0$ .

Dans la proposition **(i)** du théorème 7, les fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  peuvent être choisies de façon à suivre une trajectoire de référence *lente* arbitraire. Il en est de même pour la proposition **(i)** du théorème 8 avec les grandeurs  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$ . Ainsi ces lois de commande permettent le changement des points de consignes.

L'existence des lois de commande n'a été démontrée que localement autour de n'importe quel point stationnaire. Nous n'avons pas démontré que loin des régimes stationnaires, ces lois de commande existent toujours et n'admettent pas de singularités. Les résultats de stabilité précédents ne s'appliquent plus nécessairement lors d'un changement de consigne arbitrairement rapide : la caractérisation de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ou de  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$  tels que la dynamique des zéros soit stable en présence de transitoires sur les sorties est un problème ouvert.

A ce niveau, les simulations en boucle fermée deviennent indispensables car les démonstrations de l'existence globale de la commande d'une part et de la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée d'autre part, se heurtent à des difficultés mathématiques sérieuses. Les simulations ci-dessous montrent, pour une colonne réelle et sur une très

<sup>11</sup> $v_{frac} < 0$  correspond au cas liquide sous-refroidi,  $v_{frac} \in [0, 1]$  au cas partiellement vaporisé et  $v_{frac} > 1$  au cas vapeur surchauffée.

large plage de fonctionnement, l'absence de singularité au niveau du calcul de la loi de commande et la stabilité asymptotique du système en boucle fermée.

Construites sur les modèles lents de colonne, ces lois ne peuvent rejeter efficacement que des perturbations “lentes”. Ainsi, des oscillations persistantes et “rapides” du débit et de la composition de la charge ne peuvent pas être rejetées complètement en pratique. L'étude en simulation qui suit précise, entre autres, ce point.

### 3.3 Simulations

Les développements mathématiques précédents ne sont pas gratuits : les modèles agrégés choisis pour la commande approchent le modèle dynamique de connaissance (L,V) et en conséquence la réalité ; les méthodes de rejet de perturbations s'appliquent localement correctement. Pour une colonne binaire, les résultats précédents permettent d'affirmer *a priori* que les méthodes de rejet de perturbation sont bien adaptées à l'élaboration d'une commande en qualité. Il convient cependant de vérifier *a posteriori* en simulation que les approximations faites lors de la construction des modèles agrégés ne sont pas trop importantes pour la commande.

Cette étude en simulation est conduite sur le dépropaniseur de raffinerie décrit dans le chapitre 1. Le modèle de simulation n'est *ni* un des modèles agrégés précédents, *ni* le modèle de connaissance (L,V), *mais le modèle complet* décrit dans le chapitre 1 et prenant en compte rigoureusement les phénomènes enthalpiques et hydrauliques ainsi que les deux composés supplémentaires minoritaires que sont l'éthane et le pentane. Toutes les simulations dynamiques de cette section démarrent du même régime stationnaire. Ce régime stationnaire correspond au fonctionnement nominal du dépropaniseur. Il est décrit à la fin du chapitre 1. Toutes les perturbations qui sont appliquées au système correspondent à des perturbations dont les domaines d'amplitude et de fréquence sont représentatifs des perturbations que l'on peut rencontrer en réalité.

#### 3.3.1 Les paramètres de réglage des deux lois de commande

Les lois de commande des théorèmes 7 et 8 comportent des degrés de liberté (les fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  et les paramètres  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$ ). Nous allons utiliser ces degrés de liberté pour introduire des paramètres de réglage dans les lois de commande afin de prendre en compte, entre autres, les décalages statiques qui existent entre les modèles agrégés et le modèle de simulation.

Nous avons :

- $r = 7$ ,  $s = 31$  sont les positions des plateaux d'agrégation ;
- la fonction  $k$  qui relie la composition de la vapeur à celle du liquide est calculée avec le modèle thermodynamique de Soave pour le mélange propane-butane ;



- le débit de vapeur  $V$  du modèle de commande est supposé proportionnel à la puissance de rebouillage  $Q^{reb}$  du modèle de simulation ;
- pour la loi de commande en 5 compartiments, (système (3.21) de la page 106), nous imposons à chaque instant  $t$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = \frac{y_1^c(t) - y_1(t)}{\tau_1^P} + \frac{\int_0^t (y_1^c(\mu) - y_1(\mu)) d\mu}{\tau_1^I \tau_1^P} \\ \phi_2 = \frac{y_2^c(t) - y_2(t)}{\tau_2^P} + \frac{\int_0^t (y_2^c(\mu) - y_2(\mu)) d\mu}{\tau_2^I \tau_2^P} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

avec  $y_1^c$  et  $y_2^c$  les deux consignes,  $\tau_1^P = \tau_2^P = 10$  mn,  $\tau_1^I = \tau_2^I = 90$  mn ; nous avons rajouté un terme intégral dans la dynamique des sorties  $\phi_1$  et  $\phi_2$  car le modèle de simulation est différent du modèle de commande ; il n'a donc pas exactement les mêmes relations statiques entrée-sortie que le modèle de commande ; le terme intégral sert donc à compenser ces décalages ; les temps intégraux  $\tau_1^I$  et  $\tau_2^I$  ont volontairement été choisis grands car ils correspondent à un recalage asymptotique du modèle de commande ;

- pour la loi de commande en 3 compartiments (système (3.31) de la page 113), nous imposons à chaque instant  $t$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_1 = y_1^c(t) + \frac{\int_0^t (y_1^c(\mu) - y_1(\mu)) d\mu}{\tau_1^I} \\ \bar{y}_2 = y_2^c(t) + \frac{\int_0^t (y_2^c(\mu) - y_2(\mu)) d\mu}{\tau_2^I} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

avec  $y_1^c$  et  $y_2^c$  les deux consignes,  $\tau_1^I = \tau_2^I = 90$  mn ; les deux termes intégraux sont introduits dans le même but que ci-dessus.

Nous verrons plus loin comment agissent, sur le comportement en boucle fermée, ces paramètres de réglage  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_1^I$  et  $\tau_2^I$ .

### 3.3.2 Rejet asymptotique et robustesse

#### Le rejet des perturbations est asymptotique

Comme les modèles de commande sont des modèles lents, les lois qui en dérivent ne rejettent qu'asymptotiquement les perturbations. La figure 3.7 le montre bien. Elle

correspond à des variations entretenues de la composition de l'alimentation : les teneurs en propane et butane oscillent respectivement entre 20% et 50% et entre 75% et 45% avec une période commune de 60 mn (leurs valeurs moyennes sont celles du régime stationnaire, 35% et 60%). Sur la figure 3.7, nous avons tracé les trajectoires des sorties commandées et non commandées. Il ne faut pas s'étonner de voir les sorties non commandées varier notablement : en effet la charge devient partiellement vaporisée lorsque la teneur en propane dépasse 40% ; le reste du temps, la charge est liquide. Nous voyons donc bien que la dynamique lente est commandée, alors que la dynamique rapide<sup>12</sup> (les oscillations) ne l'est pas. Les consignes ne sont respectées qu'en moyenne.

### La robustesse vis à vis des retards dans les mesures des sorties

Nous étudions la sensibilité des lois de commande des théorèmes 7 et 8 vis à vis des retards de mesures sur les sorties. En pratique, ces retards dépassent souvent 10 mn.

Les figures 3.8 et 3.9 correspondent à un quasi-échelon sur la composition de la charge : de  $t = 0$  à  $t = 15$  mn, la teneur du propane diminue de 35% à 20%, celle du butane augmente de 60% à 75%. Pour la figure 3.8, l'état est parfaitement mesuré. Pour la figure 3.9, seules les mesures des sorties sont retardées de 10 mn. Nous voyons que les performances des deux lois sont comparables. En revanche, la loi de commande correspondant au modèle agrégé en 5 compartiments s'avère plus sensible au retard sur les sorties.

Les figures 3.10 et 3.11 correspondent à un changement de consigne : de  $t = 0$  à  $t = 120$  mn,  $y_1^c$  augmente de 0,005 à 0,02 alors que  $y_2^c$  reste inchangé. Pour la figure 3.10, l'état est parfaitement mesuré. Pour la figure 3.11, seules les mesures des sorties sont retardées de 10 mn. Nous voyons que les performances de la loi de commande correspondant au modèle agrégé en 5 compartiments sont meilleures.

La conclusion est double. Tout d'abord, les phénomènes hydrauliques et enthapiques qui ont été négligés pour la commande n'engendrent pas d'instabilité ; il est donc normal de les éliminer pour le calcul de la commande. Ensuite, la commande est suffisamment lente pour tolérer des retards de 10 mn dans les mesures des sorties.

---

<sup>12</sup>En toute rigueur, il convient de définir le terme rapide. Un phénomène dont l'échelle de temps est inférieure au temps de séjour dans la colonne, est considéré rapide pour la commande. Le temps de séjour dans le dépropaniseur est de l'ordre de 20 mn.

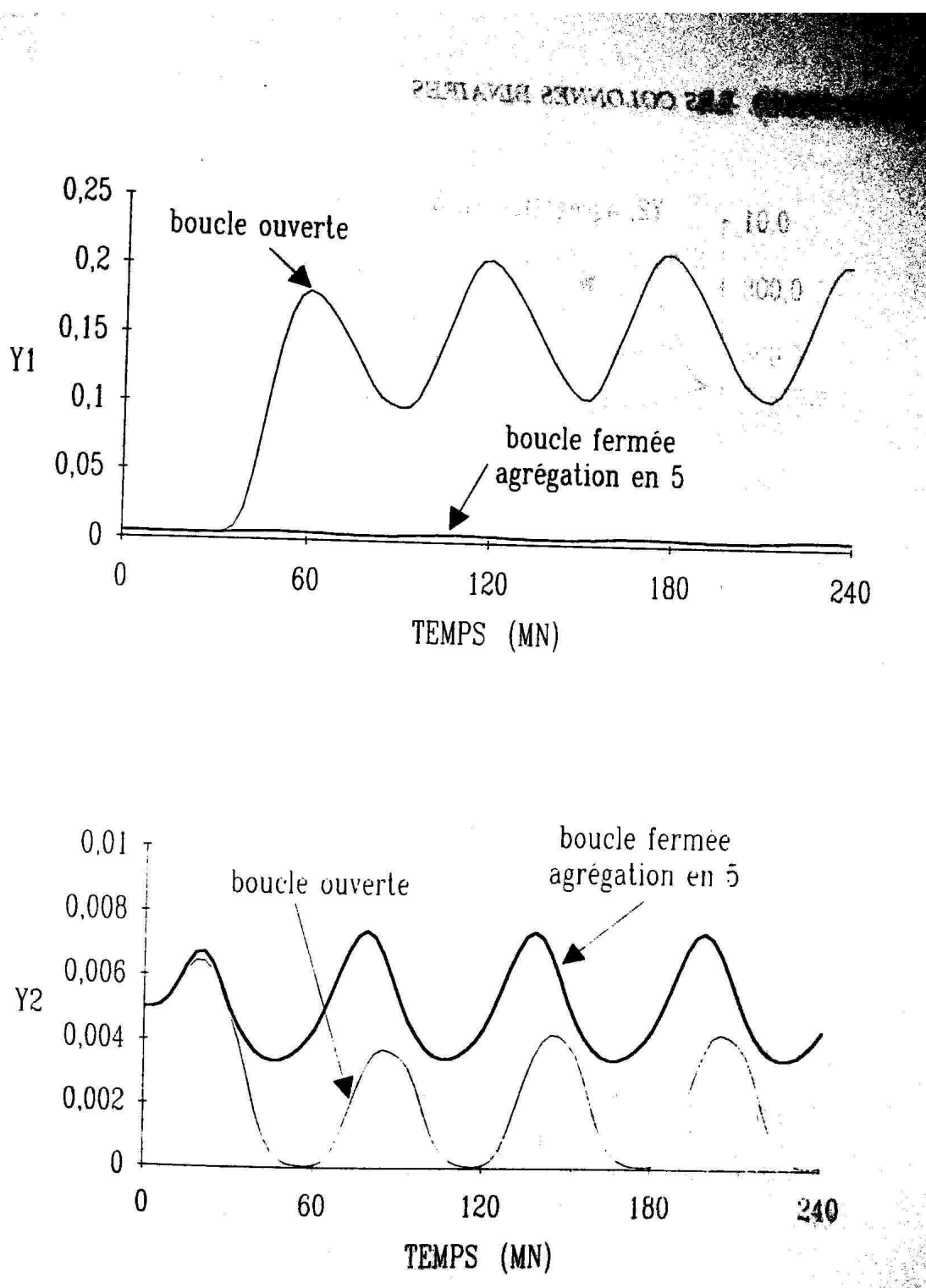


Figure 3.7: dépropaniseur ; oscillation de la composition de l'alimentation ; commandes calculées sur le modèle en 5 compartiments ; pas de retard dans les mesures des sorties.

## CAPITRE 3. LES COLONNES BINAIRES

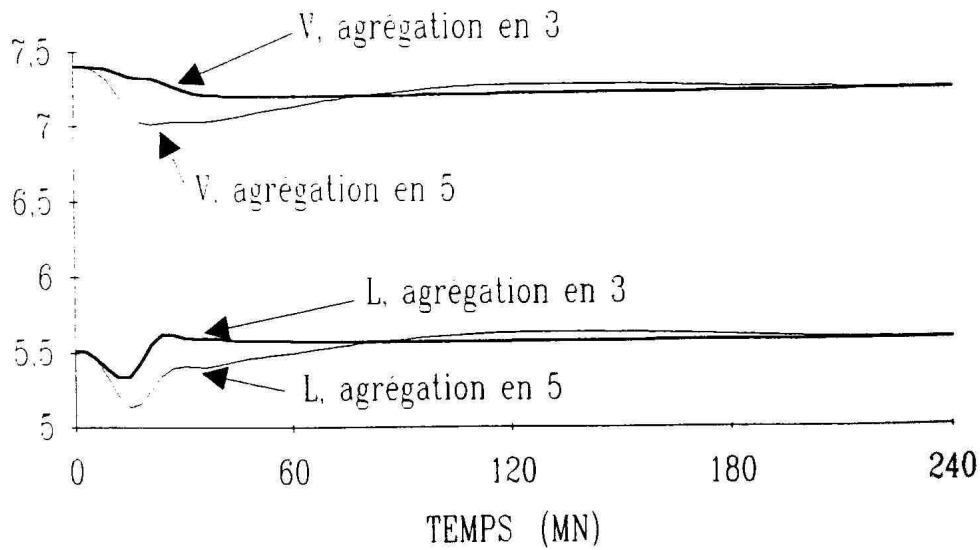
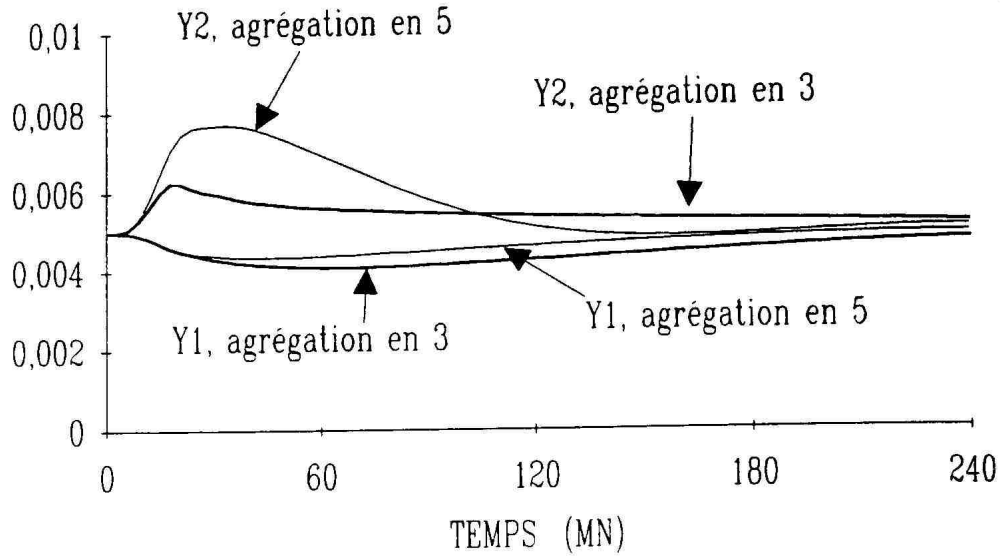


Figure 3.8: dépropaniseur ; réponse à une perturbation de composition de l'alimentation ; commandes calculées sur les modèles agrégés en 3 et 5 compartiments ; pas de retard dans les mesures des sorties.

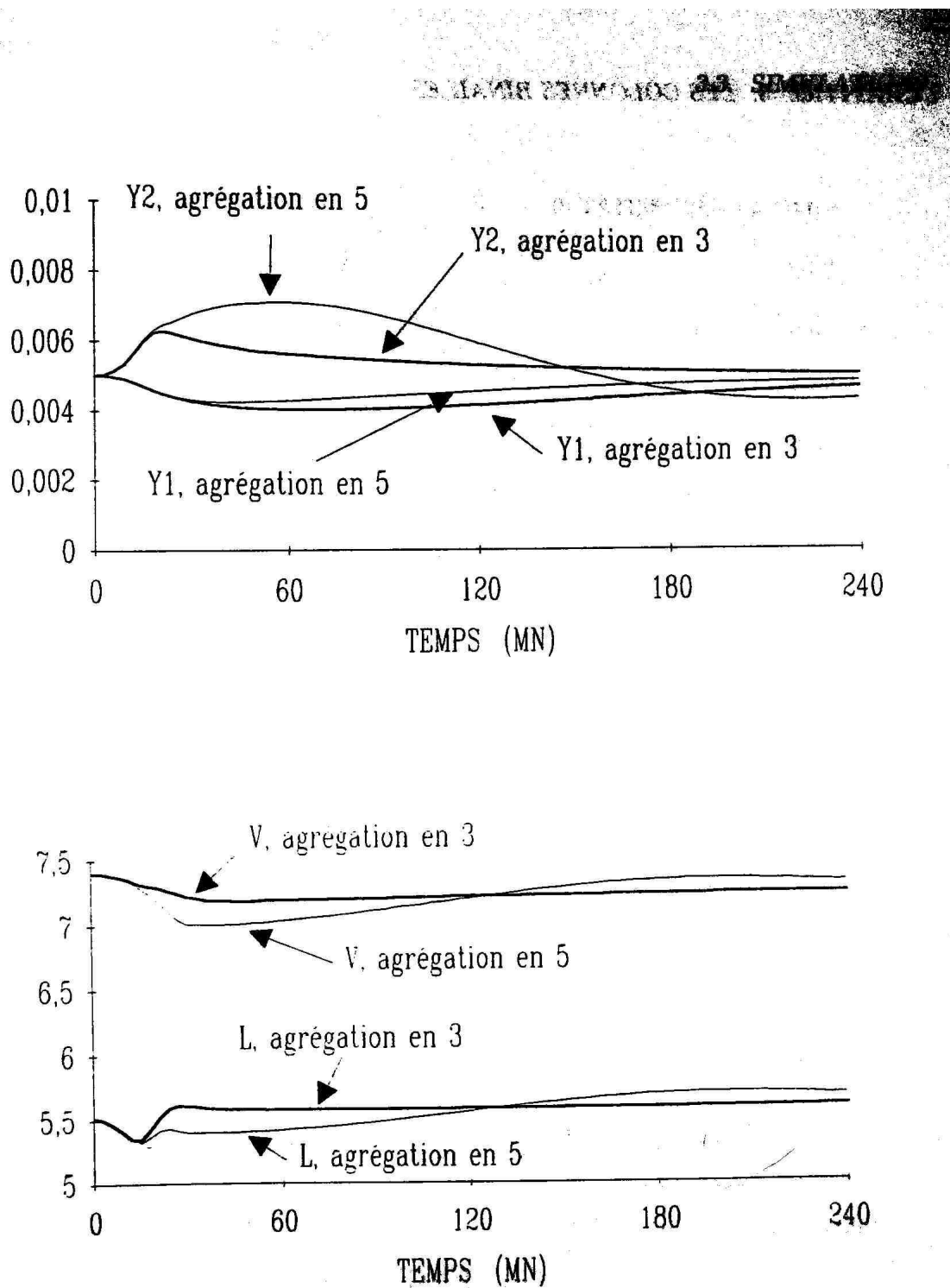


Figure 3.9: dépropaniseur ; réponse à une perturbation de composition de l'alimentation ; commandes calculées sur les modèles agrégés en 3 et 5 compartiments ; retard de 10 mn dans les mesures des sorties.

**HAPITRE 3. LES COLONNES BINAIRES**

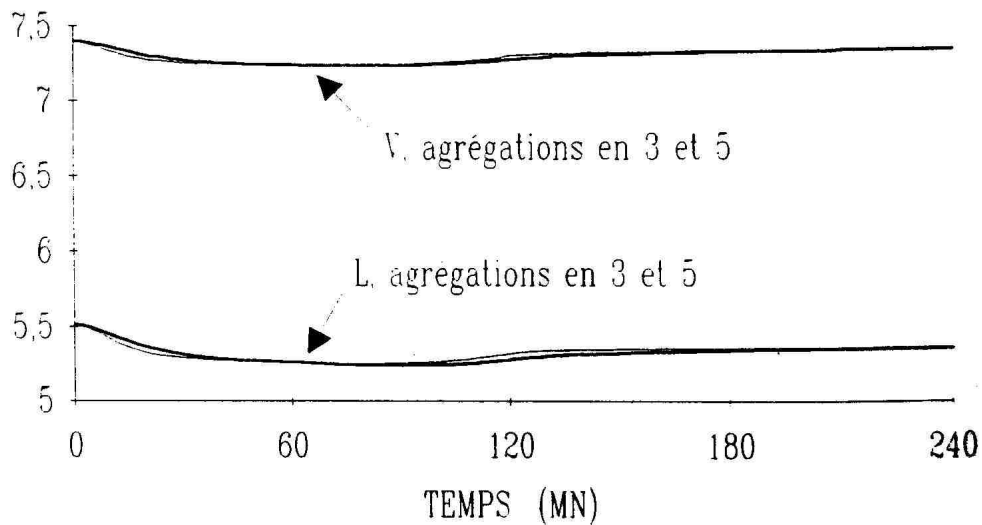
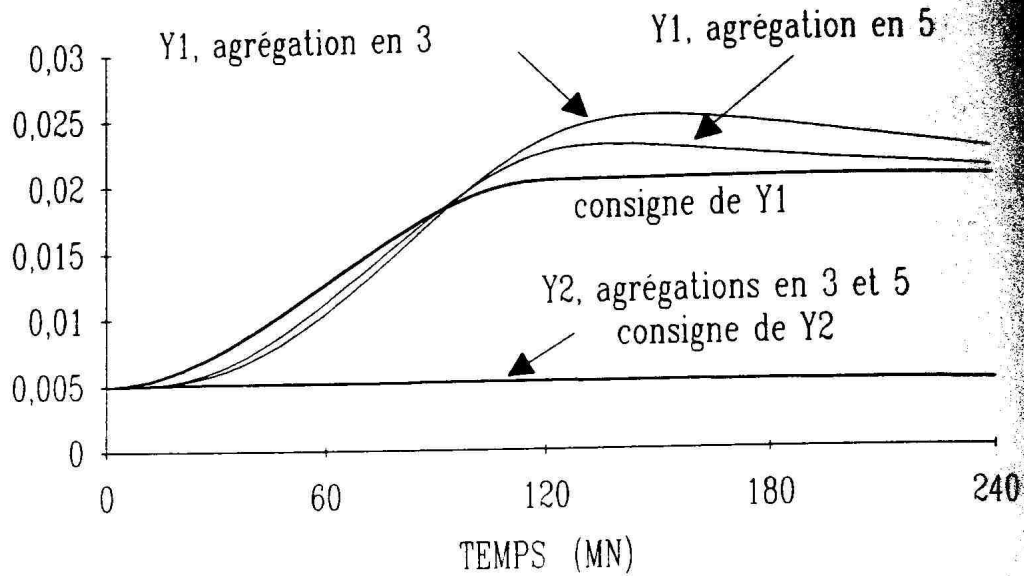


Figure 3.10: dépropaniseur ; changement de la consigne de tête ; commandes calculées sur les modèles agrégés en 3 et 5 compartiments ; pas de retard dans les mesures des sorties.

## 3.3. SIMULATIONS

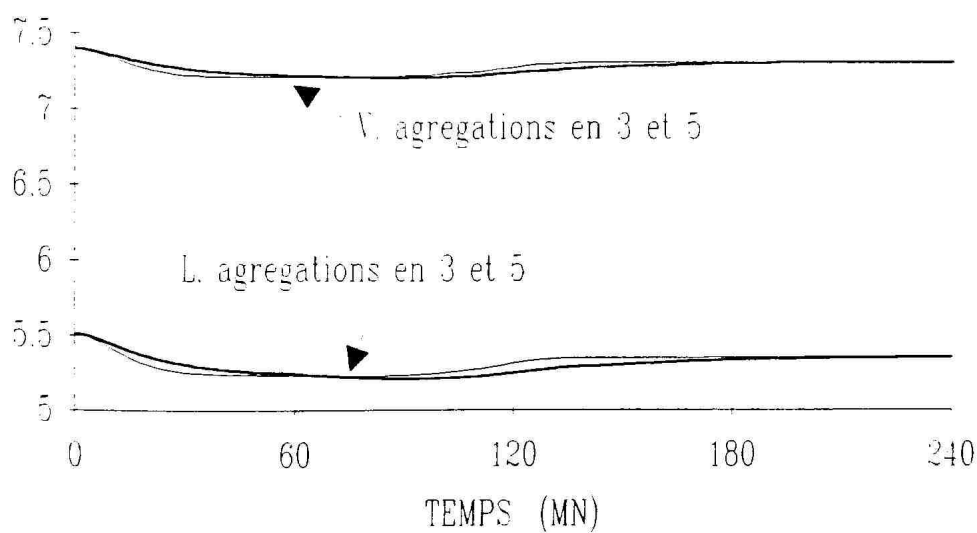
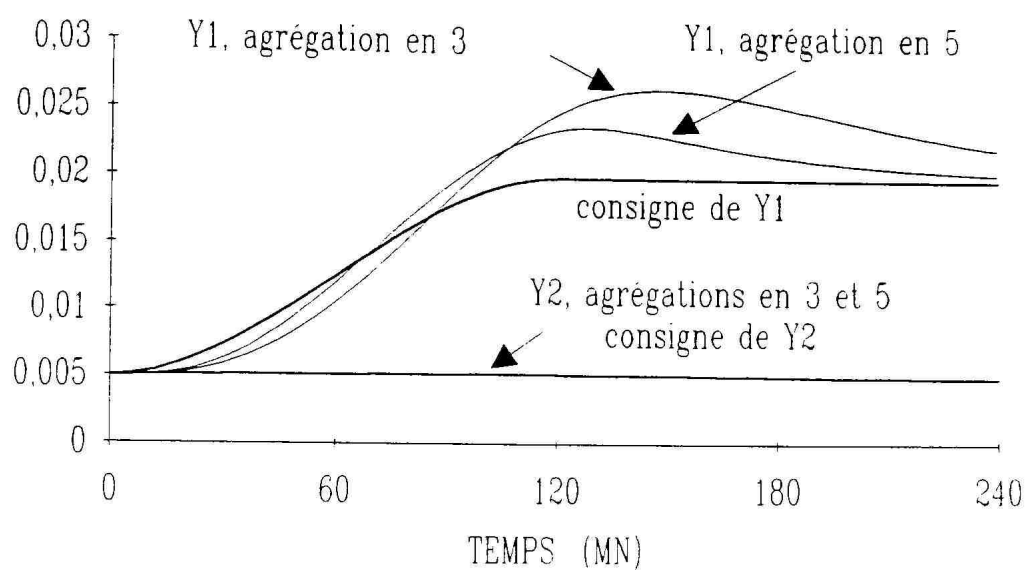


Figure 3.11: dépropaniseur; changement de la consigne de tête; commandes calculées sur les modèles agrégés en 3 et 5 compartiments; retard de 10 mn dans les mesures des sorties.

### 3.3.3 Influence des paramètres de réglage

Nous analysons, dans cette sous-section, la réponse en boucle fermée du système face à la même perturbation de composition d'alimentation que celle de la sous-section ci-dessus et pour des paramètres différents de réglage de la commande (formules (3.33) et (3.34)).

La figure 3.12 montre qu'une diminution sensible des temps proportionnels  $\tau_1^P$  et  $\tau_2^P$ <sup>13</sup> pour la commande du modèle en 5 compartiments, permet un bien meilleur suivi des consignes. Lorsque les sorties sont retardées de 10 mn, cette diminution s'accompagne d'un comportement plus oscillant des sorties, d'une moins bonne stabilité et donc d'une baisse de la robustesse.

Il est clair que les temps intégraux  $\tau_1^I$  et  $\tau_2^I$  (relations (3.33) et (3.34)) ne peuvent être choisis trop près de 0. En effet, ils sont introduits pour compenser les décalages asymptotiques entre les modèles de commande et de simulation. Nous avons vérifié, en simulation, que, si ces temps sont choisis en dessous de 15 mn, le système bouclé est instable. La figure 3.13 montre qu'une diminution notable des temps intégraux  $\tau_1^I$  et  $\tau_2^I$ ,<sup>14</sup> pour la commande du modèle en 3 compartiments, n'a pas une influence très significative sur la précision. Avec des sorties retardées de 10 mn, cette diminution ne semble pas remettre en cause la stabilité. Des simulations identiques, non présentées ici, conduisent aux mêmes conclusions pour la commande du modèle en 5 compartiments.

L'enseignement est simple : *la réduction du modèle permet d'augmenter la robustesse de la loi de commande qui en découle ; elle diminue en revanche sa précision.* Si l'on dispose d'une colonne bien instrumentée et dont la modélisation peut être précise, alors il convient d'utiliser la loi de commande du modèle en 5 compartiments pour laquelle un réglage fin du comportement des sorties est possible avec les paramètres  $\tau_1^P$  et  $\tau_2^P$  des relations (3.33). Si, par contre, l'instrumentation est peu précise et la modélisation approximative, la loi de commande du modèle en 3 compartiments semble préférable. Cette dernière ne permet pas lors de perturbations importantes un suivi très précis des consignes. En revanche, elle est plus robuste.

---

<sup>13</sup> $\tau_1^P$  et  $\tau_2^P$  passent de 10 à 5 mn.

<sup>14</sup> $\tau_1^I$  et  $\tau_2^I$  passent de 90 à 45 mn.



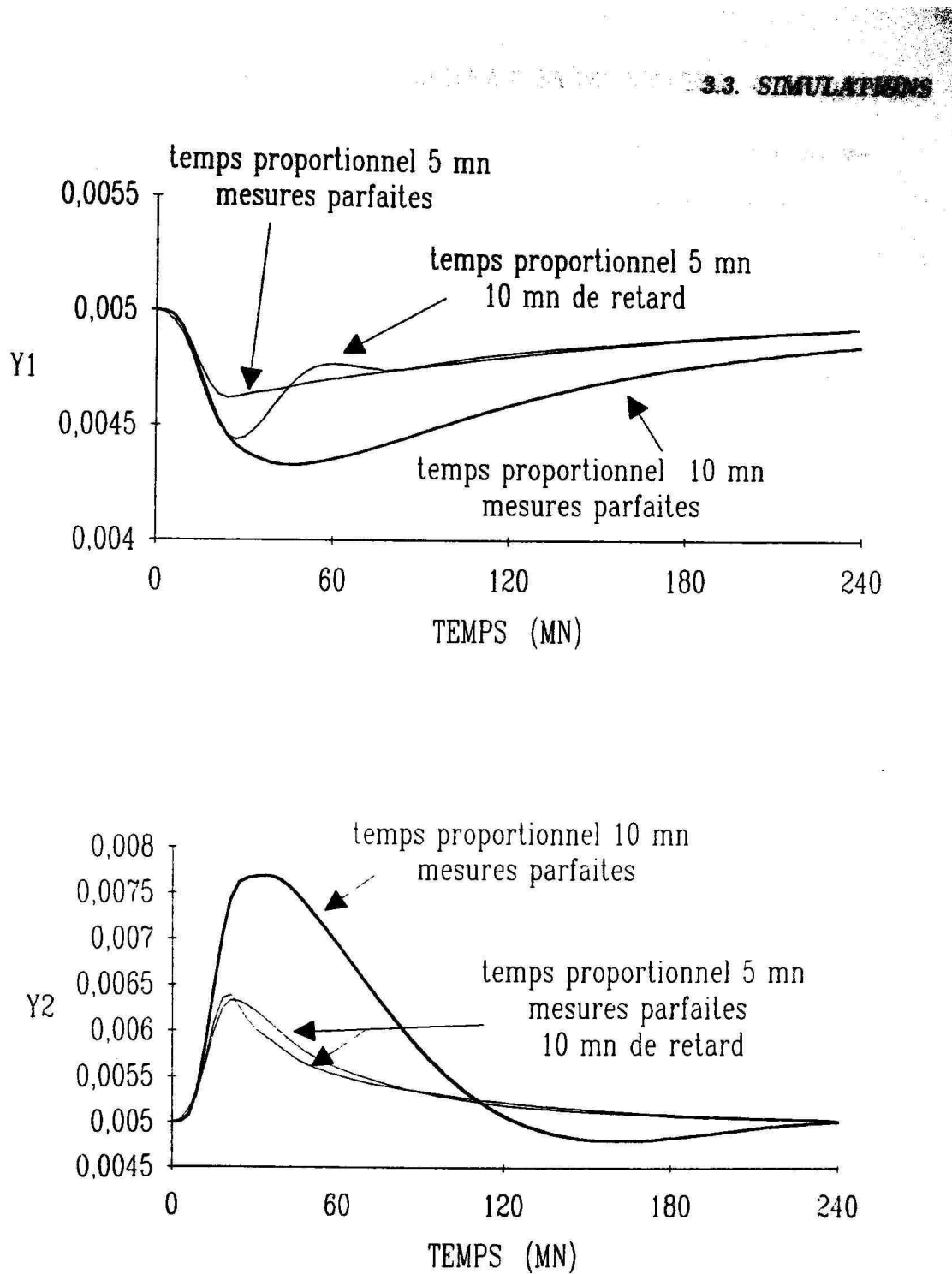


Figure 3.12: dépropaniseur ; réponse à une variation de composition d'alimentation ; influence d'une diminution des paramètres de réglages  $\tau_1^P$  et  $\tau_2^P$  sur la loi de commande sur le modèle en 5 compartiments.

## PITRE 3. LES COLONNES BINAIRES

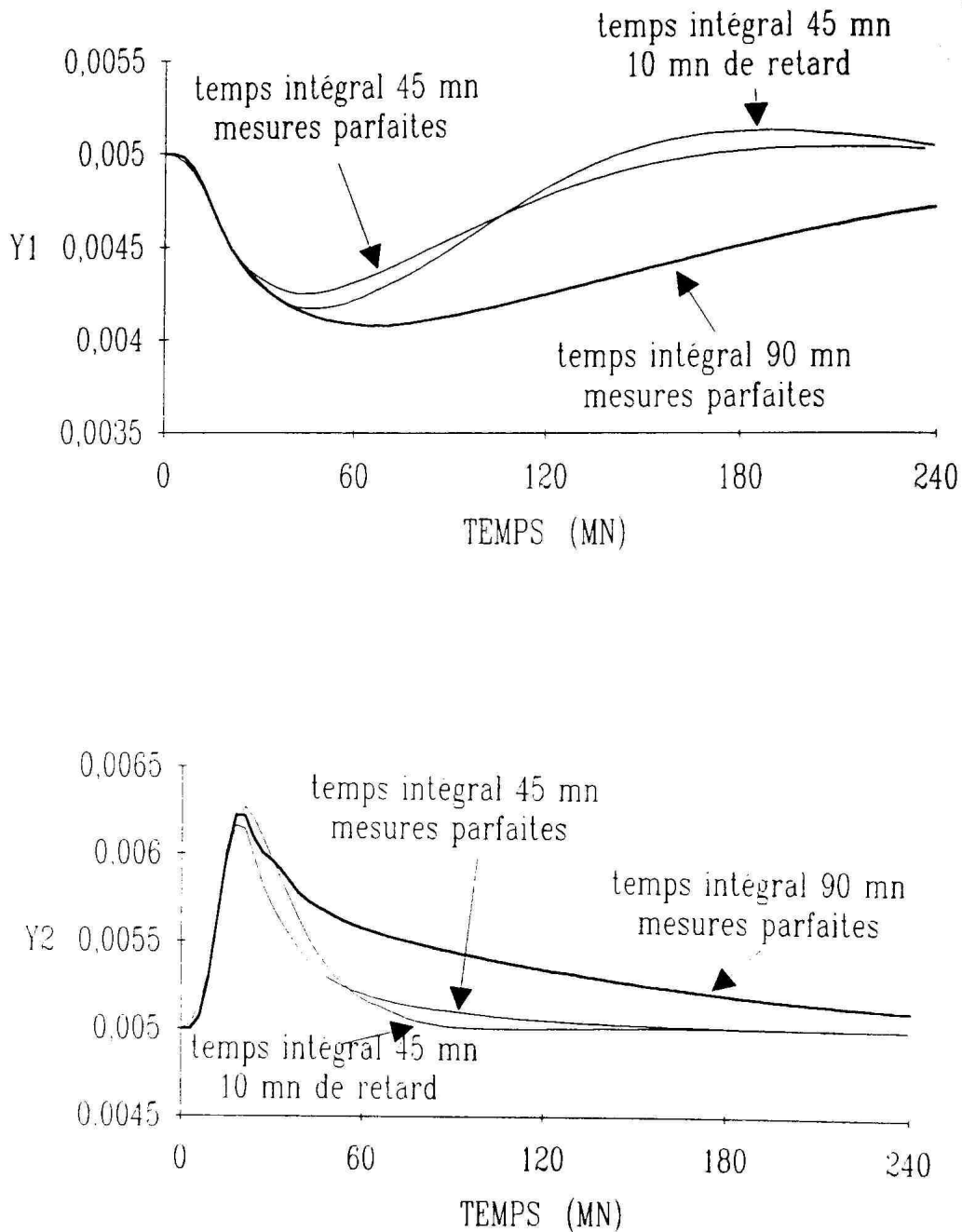


Figure 3.13: dépropaniseur ; réponse à une variation de composition d'alimentation ; influence d'une diminution des paramètres de réglages  $\tau_1^I$  et  $\tau_2^I$  sur la loi de commande sur le modèle en 3 compartiments.

### 3.3.4 Comparaison avec d'autres méthodes de commande

Pour des raisons de simplicité, de représentativité et de reproductibilité, nous avons choisi de comparer, sur le dépropaniseur, les réponses à un quasi échelon de la composition de la charge (de  $t = 0$  à  $t = 15$  mn, la teneur du propane diminue de 35% à 20%, en même temps celle du butane augmente de 60% à 75%). Dans les articles de la littérature, les amplitudes de variations sont en général plus faibles et de quelques pourcents.

Quatre lois de commande différentes sont comparées à la loi (3.34) du modèle en 3 compartiments. La robustesse lorsque les sorties sont retardées de 5 minutes est également étudiée.

#### Le rejet de perturbations sur le modèle de connaissance (L,V)

Dans l'annexe B, nous présentons d'abord les équations de la commande géométrique linéaire que proposent Takamatsu et al. [91] et qui rejettent les perturbations de composition de charge sur le modèle linéarisé tangent du modèle de connaissance (L,V). Ensuite, nous rappelons, de façon directement exploitable, la généralisation non linéaire de Gauthier et al. [25] au modèle de connaissance (L,V). Les jeux de paramètres choisis sont pour la commande linéaire géométrique (B.1)  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 5$  mn<sup>15</sup> et pour la commande non linéaire géométrique (B.6)  $\theta_1 = \theta_2 = 10$  mn.

La figure 3.14 correspond à la loi linéaire géométrique (B.1) et à la loi non linéaire (3.34) du modèle en 3 compartiments, avec et sans retard de 5 mn dans la mesure des sorties. En l'absence de retard, la commande linéaire géométrique est presque parfaite. Avec un retard de 5 mn, elle explose au bout de quelques dizaines de minutes.

Les simulations de la figure 3.15 diffèrent uniquement de celles de la figure 3.14 par le fait que la loi linéaire géométrique est remplacée par la loi non linéaire géométrique (B.6). Cette dernière fonctionne parfaitement en l'absence de retard alors qu'avec un retard de 5 mn dans les sorties, elle explose rapidement.

La conclusion est simple : le modèle de connaissance (L,V) et son linéarisé tangent ont une bonne structure pour rejeter les perturbations de composition de la charge ; ce sont cependant de mauvais modèles de commande car un bon modèle de commande doit fournir une loi de commande robuste vis à vis de retards dans les mesures des sorties. A contrario, les modèles en 5 et 3 compartiments sont de bons modèles de commande.

#### Commande par modèle externe et cascade composition/température

**La commande externe par modèle entrée/sortie** Dans les préliminaires bibliographiques, nous avons vu que de nombreux auteurs utilisent des méthodes de commande

---

<sup>15</sup>Nous avons observé en simulation que ces 3 constantes de temps doivent être choisies avec soin. En effet, si elles dépassent 10 mn, le système bouclé est instable. Autrement dit, les gains de la loi linéaire doivent être suffisamment importants pour maintenir le modèle linéaire dans sa zone de validité qui semble être étroite.

par modèles externes entrées/sorties. Etant donnée la taille des modèles dynamiques de connaissance, le premier problème consiste à construire un modèle de faible dimension. La méthode de réduction utilisée par Skogestad et Morari [85] est facilement reproductible. C'est pourquoi nous l'avons utilisée ici. Elle part du modèle linéarisé tangent utilisé par Takamatsu et al. [91] pour le réduire par les techniques d'équilibrage de Moore [58]. Pour le dépropaniseur, un bon modèle réduit peut être obtenu avec une réduction à l'ordre 5.

Sur le modèle réduit, la loi de commande est construite par la méthode linéaire classique observateur-contrôleur<sup>16</sup>. Le réglage des paramètres de la loi commande qui permettent de placer les pôles de l'observateur et du contrôleur, est délicat. Plusieurs essais ont été nécessaires pour obtenir un compromis acceptable entre la précision (grands gains) et la robustesse (gains faibles).<sup>17</sup>

**La cascade composition/température** Cette méthode est simple et proposée par de nombreux auteurs [21, 61]. Elle néglige les couplages entre la tête et le fond de la colonne. Elle consiste à régler les quatre régulateurs proportionnels-intégraux suivants :

$$\begin{array}{l} \text{cascade en tête } y_1 \xrightarrow{\text{PI}_{1,1}} T_r \xrightarrow{\text{PI}_{1,2}} L \\ \text{cascade en fond } y_2 \xrightarrow{\text{PI}_{2,1}} T_s \xrightarrow{\text{PI}_{2,2}} Q^{reb}. \end{array}$$

Les consignes de températures sont fixées par les sorties  $y$ , le reflux  $L$  et le rebouillage  $Q$  sont fixés par les températures de rectification et d'épuisement dites sensibles,  $T_r$  et  $T_s$ . Ici  $r = 7$  et  $s = 31$ . Les coefficients des deux régulateurs de températures,  $\text{PI}_{1,2}$  et  $\text{PI}_{2,2}$ , ont été ajustés pas la méthode de Cohen-Coon (voir [90], page 312). Les deux régulateurs de composition,  $\text{PI}_{1,1}$  et  $\text{PI}_{2,1}$ , sont lents. Ils modifient lentement les consignes de température en fonction des objectifs sur les compositions<sup>18</sup>.

La figure 3.16 correspond à des mesures parfaites et la figure 3.17 à des mesures des sorties retardées de 5 mn. La commande linéaire externe donne de bons résultats sans retard mais le retard de 5 mn affecte sensiblement ses performances. La régulation en température est insensible au retard sur les sorties. Elle permet de limiter leur variations. En revanche, sa précision est moins bonne que celle des autres lois.

## Conclusion

La commande non linéaire sur les modèles en 5 et 3 compartiments a, en l'absence de retard, des performances intermédiaires entre la commande géométrique sur le modèle de

<sup>16</sup> Pour calculer leur loi de commande, Skogestad et Morari [85] ne travaillent pas sur la forme d'état du modèle réduit. Ils passent en variable de Laplace et utilisent alors une approche transfert.

<sup>17</sup> Nous avons ici repris les résultats que Y. Creff du CAI, Section Automatique, de l'Ecole des Mines nous a aimablement communiqués.

<sup>18</sup> De nombreuses méthodes sont possibles pour choisir les gains de ces 4 régulateurs. Celle que nous avons choisie a le mérite d'être simple et facilement reproductible.

connaissance  $(L, V)$  et la régulation en température. Elle est un bon compromis entre la précision et la robustesse. Elle ne nécessite pas de réglage compliqué des paramètres, une fois établi le modèle de commande.

## CAPITRE 3. LES COLONNES BINAIRES

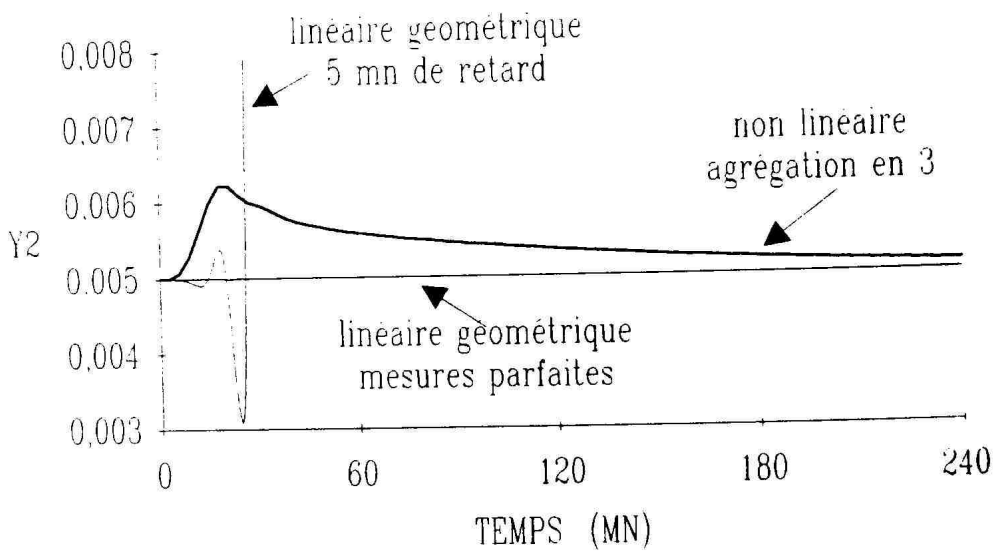
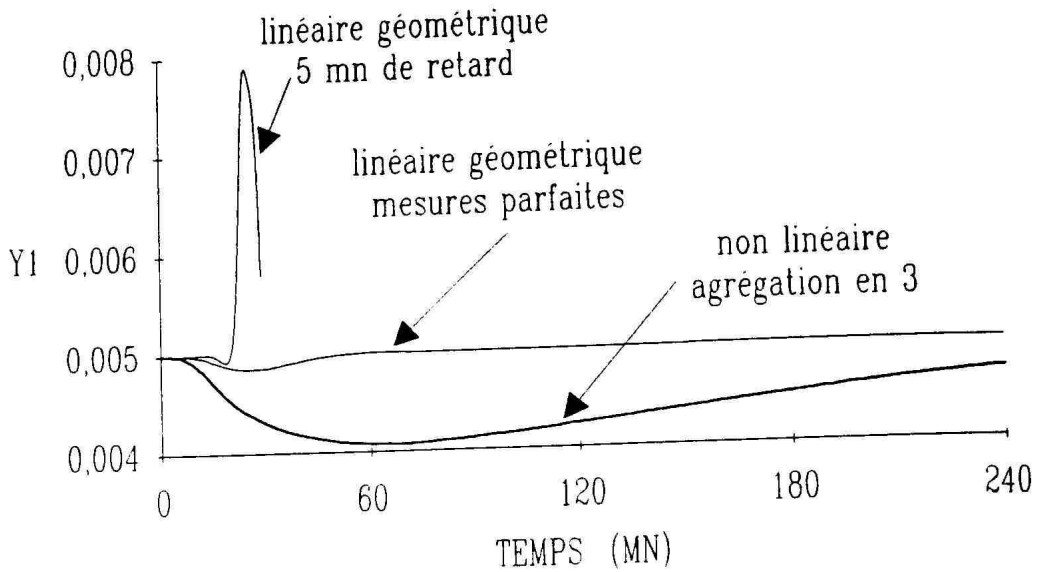


Figure 3.14: dépropaniseur ; réponse à une variation de composition d'alimentation ; comparaison de la commande linéaire géométrique avec la commande sur le modèle en 3 compartiments.

## 3.3. SIMULATIONS

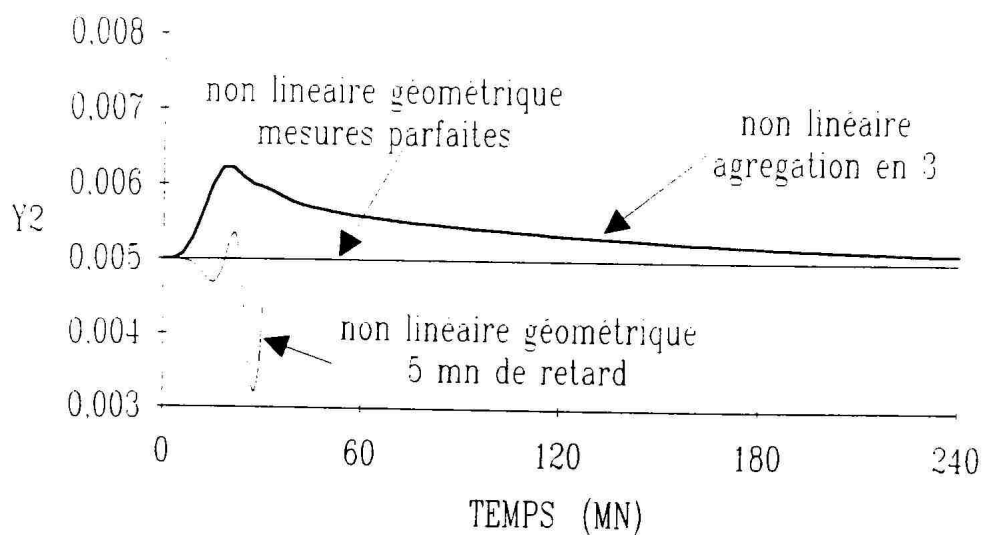
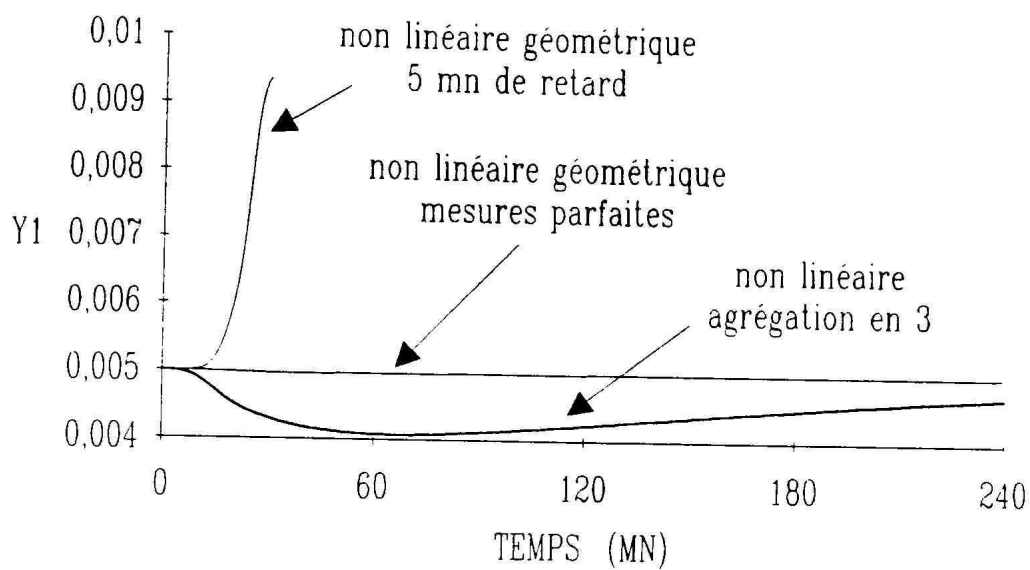


Figure 3.15: dépropaniseur ; réponse à une variation de composition d'alimentation ; comparaison de la commande sur le modèle de connaissance (L,V) avec la commande sur le modèle en 3 compartiments.

Figure 3.15: dépropaniseur ; réponse à une variation de composition d'alimentation ; comparaison de la commande sur le modèle de connaissance (L,V) avec la commande sur le modèle en 3 compartiments.

## HAPITRE 3. LES COLONNES BINAIRES

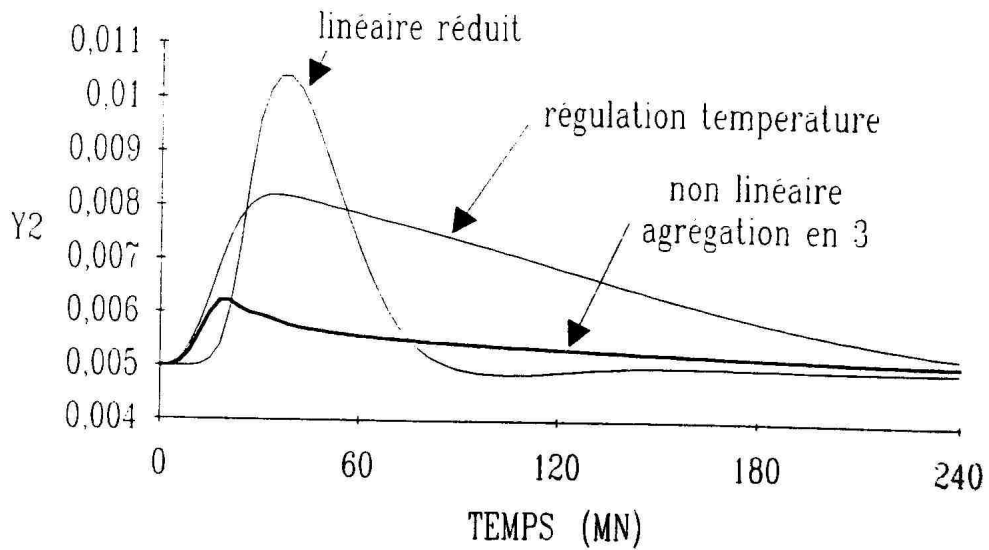
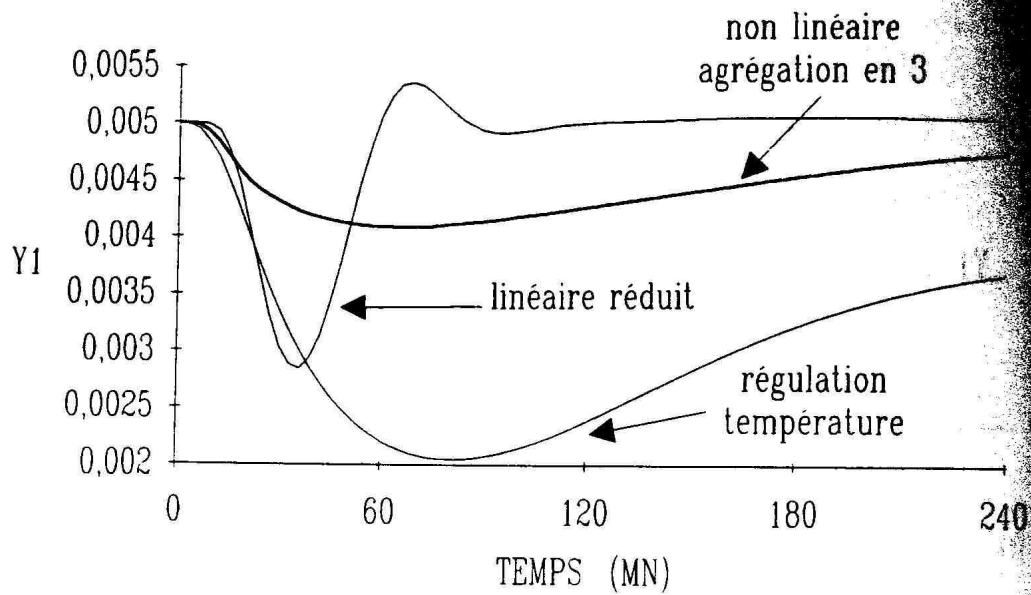


Figure 3.16: dépropaniseur ; réponse à une variation de composition d'alimentation ; comparaison d'une commande externe, d'une cascade composition/température et de la commande sur le modèle en 3 compartiments ; mesures parfaites.



## 3.3. SIMULATIONS

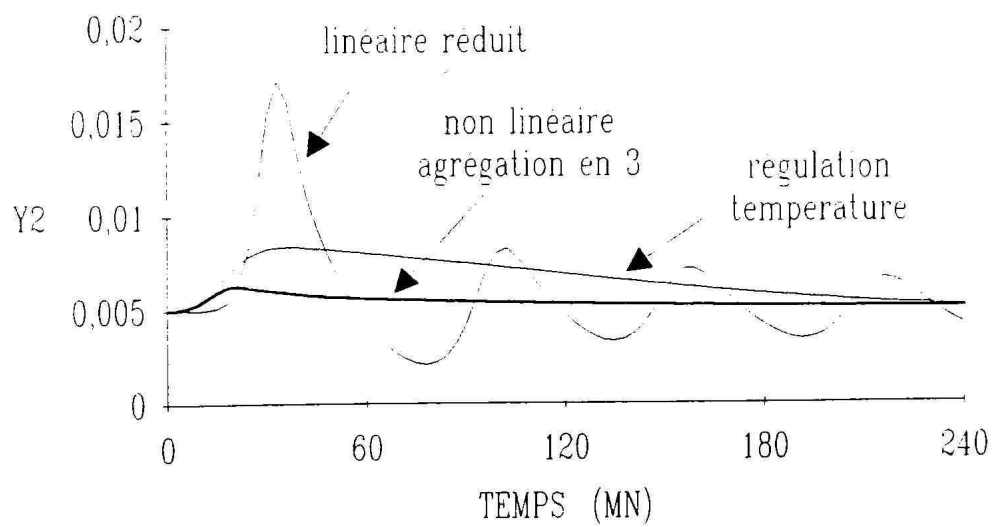
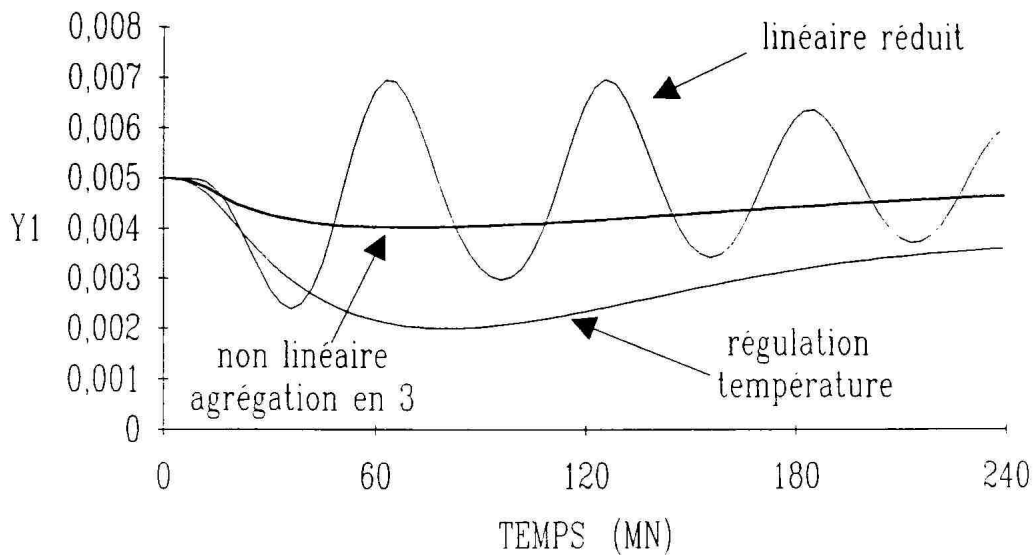


Figure 3.17: réponse à une variation de composition d'alimentation :

Figure 3.17: dépropaniseur ; réponse à une variation de composition d'alimentation ; comparaison d'une commande externe, d'une cascade composition/température et de la commande sur le modèle en 3 compartiments ; retard de 5 mn dans les mesures des sorties.



# Chapter 4

## Les colonnes pseudo-binaires

Nous appelons colonne pseudo-binaire une colonne qui sépare un mélange de  $c$  composés en deux parties : en tête sort le distillat, les composés légers de la charge avec un peu des composés lourds ; en fond sort le résidu, les composés lourds de la charge avec un peu des composés légers. Les résultats obtenus sur les colonnes binaires peuvent être généralisés, au moins de façon formelle et heuristique, aux colonnes pseudo-binaires. Dans ce chapitre, nous avons repris la démarche du chapitre 3 tout en précisant les passages où les preuves mathématiques manquent.

### 4.1 Construction de modèles non linéaires de commande

#### 4.1.1 Le modèle de connaissance $(L, V)$

##### Les équations d'état

Avec les mêmes hypothèses de modélisation que celles utilisées pour les colonnes binaires dans le chapitre 3, les équations qui décrivent le comportement dynamique de la colonne

sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 \frac{dx_1}{dt} = Vk(x_2) - Vx_1 \\ \text{pour } j = 2, \dots, j_F - 1 : \\ H_j \frac{dx_j}{dt} = Lx_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - Lx_j - Vk(x_j) \\ H_{j_F} \frac{dx_{j_F}}{dt} = Lx_{j_F-1} + Vk(x_{j_F+1}) - (L + F)x_{j_F} - Vk(x_{j_F}) + Fz_F \\ \text{pour } j = j_F + 1, \dots, n - 1 : \\ H_j \frac{dx_j}{dt} = (L + F)x_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - (L + F)x_j - Vk(x_j) \\ H_n \frac{dx_n}{dt} = (L + F)x_{n-1} - (L + F - V)x_n - Vk(x_n) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

avec

- $j$  l'indice de plateau ( $1 \leq j \leq n$ ,  $j = 1$  correspond au ballon de reflux,  $j = j_F$  au plateau d'alimentation,  $j = n$  au fond, ( $3 \leq j_F \leq n - 1$ );
- $(H_j)_{j=1, \dots, n}$  les rétentions liquides (constantes);
- $x_j = (x_j^i)_{i=1, \dots, c-1}$  les fractions molaires liquides du plateau  $j$ ;
- $(k^i(x_j))_{i=1, \dots, c-1}$  les fractions molaires vapeurs du plateau  $j$  (l'inversion formelle des équations d'équilibre thermodynamique fournit les fonctions  $k^i$  en même temps que la température sur le plateau  $j$ ,  $T_j = \Theta(x_j)$ ); nous avons omis la dépendance en pression car celle-ci est supposée constante et uniforme;
- $F$  le débit molaire de la charge,  $z_F = (z_F^i)_{i=1, \dots, c-1}$  sa composition;
- $L$  le débit de reflux,  $V$  le débit de vapeur sortant du rebouilleur.

Les deux commandes sont  $L$  et  $V$ . Les perturbations sont  $F$  et  $z_F$ . Les deux sorties sont  $y_1 = x_1^{i_1}$  et  $y_2 = x_n^{i_2}$ , respectivement la fraction molaire dans le distillat du composé clé  $i_1$  et la fraction molaire dans le résidu du composé clé  $i_2$ .

Pour des raisons physiques évidentes, nous supposons dans tout ce qui suit que :

- H1** les débits sont positifs, i.e.  $F > 0$ ,  $L > 0$ ,  $V > 0$ ,  $V - L > 0$  et  $L + F - V > 0$ . Rappelons que  $z_F \in ]0, 1[^{c-1}$  par définition.
- H2** la fonction  $k$  satisfait  $\forall x \in [0, 1]^{c-1}$ ,  $k(x) \in [0, 1]^{c-1}$ , si, pour  $i \in \{1, \dots, c-1\}$ ,  $x^i = 0$  alors  $k^i(x) = 0$ , et si  $x^i = 1$  alors  $k^i(x) = 1$ .

**Propriétés en boucle ouverte du modèle (L,V)**

L'étude de Rosenbrock [76] porte sur les colonnes binaires. Pour les colonnes pseudo-binaires, nous ne connaissons pas de résultats analogues : la stabilité asymptotique globale du système ainsi que l'unicité du point stationnaire sont hypothétiques. Quoiqu'il en soit, nous pouvons nous intéresser aux solutions de (4.1) et montrer qu'elles peuvent être prolongées jusqu'à l'infini tout en gardant une signification physique.

**Lemme 3.** *Soient une fonction  $k$  vérifiant **H2**, le système (4.1) et une condition initiale dans  $[0, 1]^{n(c-1)}$ . Nous supposons que les entrées sont des fonctions régulières du temps vérifiant à chaque instant l'hypothèse **H1**. Alors, la solution maximale en temps du système est définie sur  $[0, +\infty[$  et reste dans  $[0, 1]^{n(c-1)}$ . De plus, pour chaque jeu d'entrées  $F, z_F, L$  et  $V$  vérifiant **H1**, ce système possède au moins un point stationnaire dans  $[0, 1]^{n(c-1)}$ .*

**Preuve** Il suffit, en vertu du théorème du prolongement sur un compact (voir [3] par exemple), de montrer que le champ de vecteurs du système est rentrant dans le compact  $[0, 1]^{n(c-1)}$ . Si  $x$  est sur un bord de  $[0, 1]^{n(c-1)}$ , alors il existe  $i$  dans  $\{0, \dots, c-1\}$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tels que  $x_j^i = 0$  ou  $x_j^i = 1$ . Supposons que  $x_j^i = 0$ ; alors **H2** implique  $k^i(x_j) = 0$ . Les équations (4.1) et **H1** impliquent que  $dx_j^i/dt$  est positif ou nul. De même, si  $x_j^i = 1$ ,  $dx_j^i/dt$  est négatif ou nul. Le champ de vecteurs est donc rentrant.

Supposons maintenant que les entrées  $F, z_F, L$  et  $V$  sont constantes et vérifient **H1**. Alors le flot associé au système (4.1)  $\Phi(t, x)$  ( $\Phi(t, x)$  est la valeur de la solution à l'instant  $t$  ayant comme condition initiale  $x$  à  $t = 0$ ; une définition précise du flot se trouve dans [3] page 244 par exemple) définit pour chaque  $t > 0$  une application continue du convexe compact d'intérieur non vide  $[0, 1]^{n(c-1)}$  dans lui-même. Le théorème du point fixe de Brouwer (voir [57] par exemple) implique que pour chaque  $t > 0$ , cette application admet au moins un point fixe que nous notons  $x_t$ . Comme  $[0, 1]^{n(c-1)}$  est compact, il existe une suite  $(t_k)_{k \geq 0}$  de temps strictement positifs convergeant vers 0 et telle que  $x_{t_k}$  converge vers  $\bar{x} \in [0, 1]^{n(c-1)}$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Si  $\bar{x}$  n'est pas un point stationnaire, il existe un voisinage de  $\bar{x}$  dans  $[0, 1]^{n(c-1)}$  et  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x$  dans ce voisinage et tout  $t$  dans  $]0, \varepsilon[$   $\phi(t, x) \neq x$ .<sup>1</sup> Ce qui contredit  $\Phi(t_k, x_{t_k}) = x_{t_k}$  puisque  $(t_k, x_{t_k})$  tend vers  $(0, \bar{x})$ . Ainsi  $\bar{x}$  est nécessairement un point stationnaire.

**Le système est-il asymptotiquement stable ?** Grâce au lemme précédent, s'intéresser au comportement asymptotique en boucle ouverte du modèle (4.1) a donc un sens. Intuitivement, on s'attend à avoir, comme pour les colonnes binaires, l'unicité du point stationnaire et la stabilité asymptotique globale.

Pour le mélange binaire, le second principe de la thermodynamique implique que la fonction  $k$  est croissante [54]. Pour des mélanges quelconques, déduire du second principe

<sup>1</sup>Ceci résulte du théorème des accroissements finis qui s'applique ici puisque  $[0, 1]^{n(c-1)}$  est convexe.

de la thermodynamique des propriétés sur la fonction  $k$  n'est pas trivial. Dans [16], Doherty et Perkins montrent, en utilisant des travaux de Malesinski [54], que, à une composition  $x$  azéotropique ( $k(x) = x$ ), le jacobien  $\partial k/\partial x$  possède  $c - 1$  valeurs propres réelles strictement positives. Cette propriété doit être vraie en général, mais nous n'en connaissons aucune démonstration<sup>2</sup>.

A partir du bilan entropique tel que le décrivent Prigogine et Glansdorff [69, 31], nous montrons, dans l'annexe C, que, pour un flash isenthalpique i.e. une colonne à distiller d'un seul plateau, si un point stationnaire est stable thermodynamiquement [70, 2], alors il est nécessairement asymptotiquement stable : les notions de stabilité thermodynamique et dynamique se rejoignent dans ce cas. Nous n'avons pas pu étendre ce résultat à une colonne de plusieurs étages. Aussi nous ne savons pas s'il est généralisable ou s'il ne l'est pas.

D'après les études en simulation de Magnussen et al. [53] et Prokopakis et Seider [71], il semble que certaines colonnes azéotropiques peuvent posséder plusieurs points stationnaires dont un instable dynamiquement. Cependant, les systèmes thermodynamiques considérés par ces auteurs sont connus pour les difficultés qu'ils soulèvent lors des calculs numériques d'équilibre entre phases : le calcul numérique d'un flash à température et pression fixées peut conduire à une solution qui n'est pas stable thermodynamiquement et qui ne correspond pas à un minimum de l'énergie libre de Gibbs. La présence éventuelle de deux phases liquides compliquent l'analyse [5]. Ainsi, pour que l'existence de points stationnaires instables pour les colonnes à distiller soit indiscutable, il convient de compléter les études en simulations précédemment citées [53, 71] en montrant que, sur chaque plateau, les équilibres entre phases sont stables thermodynamiquement.

Nous voyons donc que l'étude du comportement asymptotique du système (4.1) dans le cas général est loin d'être évidente, bien que, par expérience, les ingénieurs savent qu'une colonne à distiller est un système asymptotiquement stable.

### 4.1.2 Agrégation par échelle de temps du modèle (L,V)

En s'appuyant sur la remarque 4, nous pouvons directement utiliser la méthode d'agrégation par échelle de temps du cas binaire au cas pseudo-binaire. Il suffit de reprendre la démarche, pour constater que cette méthode de réduction est ici valable, si un compartiment de  $m$  plateaux est un système asymptotiquement stable. Dans de nombreux cas pratiques, cette hypothèse est vérifiée. Ainsi, la construction de modèles lents de colonne pseudo-binaire par une telle méthode est raisonnable. Comme dans le cas binaire, deux modèles réduits sont retenus : un modèle en 5 compartiments et un modèle en 3 compartiments.

---

<sup>2</sup>Dans [15], Doherty et Perkins utilisent cette propriété spectrale sans la démontrer dans le cas général pour obtenir, sous les hypothèses de Lewis relatives aux enthalpies, la stabilité locale d'une colonne ayant un seul plateau, c'est à dire d'un flash.

### 4.1.3 Deux modèles de commande

Les équations d'état des deux modèles agrégés sont très voisines de celles du cas binaire. Leur obtention est formelle : elle ne repose pas comme c'est le cas pour les colonnes binaires sur un lemme technique comme le lemme 2, mais sur la manipulation formelle des équations du régime stationnaire d'un compartiment.

#### Le modèle agrégé en 5 compartiments

Les compartiments d'agrégations sont identiques à ceux utilisés dans la cas binaire. Ils sont rappelés sur la figure 3.6. Le modèle agrégé en 5 compartiments est décrit par le système algébro-différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_1 \frac{dx_1}{dt} = Vk(x_2) - Vx_1 \\ \text{pour } j = 2, \dots, r-1 : \\ 0 = Lx_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - Lx_j - Vk(x_j) \\ \mathcal{H}_r \frac{dx_r}{dt} = Lx_{r-1} + Vk(x_{r+1}) - Lx_r - Vk(x_r) \\ \text{pour } j = r+1, \dots, j_F-1 : \\ 0 = Lx_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - Lx_j - Vk(x_j) \\ \mathcal{H}_F \frac{dx_{j_F}}{dt} = Lx_{j_F-1} + Vk(x_{j_F+1}) - (L+F)x_{j_F} - Vk(x_{j_F}) + Fz_F \\ \text{pour } j = j_F+1, \dots, s-1 : \\ 0 = (L+F)x_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - (L+F)x_j - Vk(x_j) \\ \mathcal{H}_s \frac{dx_s}{dt} = (L+F)x_{s-1} + Vk(x_{s+1}) - (L+F)x_s - Vk(x_s) \\ \text{pour } j = s+1, \dots, n-1 : \\ 0 = (L+F)x_{j-1} + Vk(x_{j+1}) - (L+F)x_j - Vk(x_j) \\ \mathcal{H}_n \frac{dx_n}{dt} = (L+F)x_{n-1} - (L+F-V)x_n - Vk(x_n) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec

$$\mathcal{H}_1 = H_1, \quad \mathcal{H}_r = \sum_2^{j_r} H_j, \quad \mathcal{H}_F = \sum_{j_{r+1}}^{j_s-1} H_j, \quad \mathcal{H}_s = \sum_{j_s}^{n-1} H_j, \quad \mathcal{H}_n = H_n.$$

La partie algébrique est formée par les équations statiques de 4 compartiments : 2 à  $r-1$ ,  $r+1$  à  $j_F-1$ ,  $j_F+1$  à  $s-1$  et  $s+1$  à  $n-1$ . Il nous faut éliminer ces équations

algébriques pour obtenir un système d'équations différentielles ordinaires uniquement.<sup>3</sup> Cette élimination est ici formelle.

Considérons un instant le régime stationnaire d'un compartiment de  $m$  plateaux comme celui de la figure 3.2. Son état statique  $(\tilde{x}_j)_{j=1,\dots,m}$  est solution du système

$$\begin{cases} 0 = \tilde{L}\tilde{x}_0 + \tilde{V}k(\tilde{x}_2) - \tilde{L}\tilde{x}_1 - \tilde{V}k(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ 0 = \tilde{L}\tilde{x}_{m-1} + \tilde{V}k(\tilde{x}_{m+1}) - \tilde{L}\tilde{x}_m - \tilde{V}k(\tilde{x}_m), \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{V}$ ,  $(\tilde{x}_0^i)_{i=1,\dots,c-1}$ ,  $(k^i(\tilde{x}_{m+1}))_{i=1,\dots,c-1}$  sont des paramètres. Formellement, le profil de compositions  $(\tilde{x}_j)_{j=1,\dots,m}$ , et en particulier la composition du liquide et de la vapeur quittant le compartiment ( $\tilde{x}_m$  et  $k(\tilde{x}_1)$ ) sont des fonctions de  $\tilde{L}/\tilde{V}$ ,  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_{m+1}$ . C'est à dire

$$\begin{cases} \tilde{x}_m = X_m(\tilde{L}/\tilde{V}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_{m+1}) \\ k(\tilde{x}_1) = Y_m(\tilde{L}/\tilde{V}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_{m+1}). \end{cases} \quad (4.4)$$

Les fonctions  $X_m = (X_m^i)_{i=1,\dots,c-1}$  et  $Y_m = (Y_m^i)_{i=1,\dots,c-1}$  sont obtenues en résolvant (4.3).

Retournons au modèle réduit en 5 compartiments (4.2). Ses équations d'état s'écrivent de façon formelle

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_r, L, V) \\ \frac{dx_r}{dt} = f_r(x_1, x_r, x_{j_F}, L, V) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = f_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = f_s(x_{j_F}, x_s, x_n, L + F, V) \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_s, x_n, L + F, V) \end{cases} \quad (4.5)$$

où

–  $x_j = (x_j^i)_{i=1,\dots,c-1}$  est la composition liquide sur les plateaux  $j = 1, r, j_F, s, n$  ;

---

<sup>3</sup>Le système (4.2) est, génériquement, un système algébro-différentiel d'index 1 (cf. chapitre 2).



– les fonctions  $f_j = (f_j^i)^{i=1, \dots, c-1}$  sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_1 f_1(x_1, x_r, L, V) = VY_{r-2}(L/V, x_1, x_r) - Vx_1 \\ \mathcal{H}_r f_r(x_1, x_r, x_{j_F}, L, V) = LX_{r-2}(L/V, x_1, x_r) \\ \quad + VY_{j_F-r-1}(L/V, x_r, x_{j_F}) \\ \quad - Lx_r - Vk(x_r) \\ \mathcal{H}_F f_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) = Fz_F + LX_{j_F-r-1}(L/V, x_r, x_{j_F}) \\ \quad + VY_{s-j_F-1}((L+F)/V, x_{j_F}, x_s) \\ \quad - (L+F)x_{j_F} - Vk(x_{j_F}) \\ \mathcal{H}_s f_s(x_{j_F}, x_s, x_n, L+F, V) = (L+F)X_{s-j_F-1}((L+F)/V, x_{j_F}, x_s) \\ \quad + VY_{n-s-1}((L+F)/V, x_s, x_n) \\ \quad - (L+F)x_s - Vk(x_s) \\ \mathcal{H}_n f_n(x_s, x_n, L+F, V) = (L+F)X_{n-s-1}((L+F)/V, x_s, x_n) \\ \quad - (L+F-V)x_n - Vk(x_n) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

(les fonctions  $X_m$  and  $Y_m$  sont définies par (4.4) avec

$$m = r - 2, j_F - r - 1, s - j_F - 1, n - s - 1).$$

### Le modèle agrégé en 3 compartiments

Nous pouvons reprendre point par point, pour le modèle agrégé en 3 compartiments (1 à  $j_r$ ,  $j_r + 1$  à  $j_s - 1$ ,  $j_s$  à  $n$ ), la démarche formelle précédente.

Tous calculs faits, l'équation d'état du système est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_r}{dt} = g_r(x_r, x_{j_F}, L, V) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = g_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = g_s(x_{j_F}, x_s, L+F, V) \end{array} \right. \quad (4.7)$$

où

–  $x_j = (x_j^i)^{i=1, \dots, c-1}$  est la composition liquide sur les plateaux  $j = r, j_F, s$ ;

– les fonctions  $g_j = (g_j^i)^{i=1, \dots, c-1}$  sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_r g_r(x_1, x_r, x_{j_F}, L, V) = L\mathcal{X}_{r-2}(L/V, x_r) \\ \quad + VY_{j_F-r-1}(L/V, x_r, x_{j_F}) \\ \quad - Lx_r - Vk(x_r) \\ \mathcal{H}_F g_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) = Fz_F + LX_{j_F-r-1}(L/V, x_r, x_{j_F}) \\ \quad + VY_{s-j_F-1}((L+F)/V, x_{j_F}, x_s) \\ \quad - (L+F)x_{j_F} - Vk(x_{j_F}) \\ \mathcal{H}_s g_s(x_{j_F}, x_s, x_n, L+F, V) = (L+F)X_{s-j_F-1}((L+F)/V, x_{j_F}, x_s) \\ \quad + V\mathcal{Y}_{n-s-1}((L+F)/V, x_s) \\ \quad - (L+F)x_s - Vk(x_s) ; \end{array} \right. \quad (4.8)$$

les fonctions  $X_m$  and  $Y_m$  sont définies par (4.4) pour  $m = j_F - r - 1$  et  $m = s - j_F - 1$  ; la fonction  $\mathcal{X}_{r-1}$  correspond au cas où la première équation de (4.3) est remplacée par

$$\tilde{V}(k(\tilde{x}_2) - \tilde{x}_1) = 0 ;$$

la fonction  $\mathcal{Y}_{n-s-1}$  correspond au cas où la dernière équation de (4.3) est remplacée par

$$\tilde{L}\tilde{x}_{m-1} - (\tilde{L} - \tilde{V})\tilde{x}_m - Vk(\tilde{x}_m) = 0.$$

**Remarque 6.** *Contrairement au cas binaire, nous ne savons pas si les modèles en 5 et en 3 compartiments possèdent un comportement qualitatif en boucle ouverte similaire à celui du modèle de connaissance  $(L, V)$  (4.1). En revanche, nous sommes certains que les relations statiques entre les entrées et les sorties sont préservées et que ces deux modèles agrégés sont des modèles lents.*

## 4.2 Calcul des lois de commande

L'objectif est de rendre les qualités du distillat  $y_1 = x_1^{i_1}$  et du résidu  $y_2 = x_n^{i_2}$  indépendantes du débit et de la composition de l'alimentation<sup>4</sup>. Comme dans le cas binaire, nous allons calculer la loi de commande en utilisant les techniques de rejet de perturbations, présentées dans l'annexe A, sur le modèle en 5 compartiments et sur le modèle en 3 compartiments. Cependant, les résultats que nous obtenons sont purement formels : l'existence et l'unicité, autour d'un régime stationnaire, des lois de commande rejetant les perturbations ne sont pas démontrées explicitement mais génériquement. Aussi convient-il pour chaque colonne particulière de vérifier numériquement que ces lois de commande existent. Une autre différence par rapport au cas binaire est que nous ne sommes pas arrivés à montrer que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable. Il convient

---

<sup>4</sup> $i_1$  et  $i_2$  sont les exposants des deux composés clé :  $i_1$  correspond au composé lourd le plus léger ;  $i_2$  correspond au composé léger le plus lourd.

également de vérifier en simulation que le système en boucle fermée est stable sur la plage fonctionnement.

### 4.2.1 Le rejet de perturbations sur le modèle en 5 compartiments

#### La loi générique de commande

Le modèle de commande est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_r, L, V) \\ \frac{dx_r}{dt} = f_r(x_1, x_r, x_{j_F}, L, V) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = f_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = f_s(x_{j_F}, x_s, x_n, L + F, V) \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_s, x_n, L + F, V) \\ y_1 = x_1^{i_1} \\ y_2 = x_n^{i_2}, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

les fonctions  $f_j$  étant définies par (4.6). Les sorties sont  $y_1$  et  $y_2$ . Les commandes sont  $L$  et  $V$ . Les perturbations sont  $F$  et  $z_F$ . Pour calculer la commande, nous dérivons directement les sorties par rapport au temps (cf. annexe A). Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dx_1^{i_1}}{dt} = f_1^{i_1}(x_1, x_r, L, V) \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{dx_n^{i_2}}{dt} = f_n^{i_2}(x_s, x_n, L + F, V). \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Formellement, la loi de commande est alors obtenue en remplaçant dans (4.10)  $dy_1/dt$  et  $dy_2/dt$  par deux fonctions arbitraires  $\phi_1(y_1)$  et  $\phi_2(y_2)$ .

**Lemme 4.** *Soit le système dynamique (4.9) où les commandes sont  $(L, V)$ , où les perturbations non mesurées sont  $z_F = (z_F^i)^{i=1, \dots, c-1}$ , où les sorties sont  $(y_1 = x_1^{i_1}, y_2 = x_n^{i_2})$  et où  $F$  est un paramètre connu fonction du temps. Soit un point stationnaire,  $\bar{x}$  associé aux entrées  $\bar{L} > 0, \bar{V} > 0, \bar{F} > 0$  et  $\bar{z}_F$  vérifiant  $\bar{L} < \bar{V} < \bar{L} + \bar{F}$ . Si*

$$\frac{\partial Y_{r-2}^{i_1}}{\partial(L/V)}(\bar{L}/\bar{V}, \bar{x}_1, \bar{x}_r) \neq 0$$

et si

$$\bar{x}_n^{i_2} - k^{i_2}(\bar{x}_n) - \left( \frac{\bar{L} + \bar{F}}{\bar{V}} \right)^2 \frac{\partial X_{n-s-1}^{i_2}}{\partial(L/V)} ((\bar{L} + \bar{F})/\bar{V}, \bar{x}_s, \bar{x}_n) \neq 0$$

alors localement autour du point stationnaire, il existe une unique loi de commande dépendant de  $x_1, x_r, x_s, x_n$  et  $F$  tel que la dynamique en boucle fermée des sorties soit

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \phi_1(y_1) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \phi_2(y_2). \end{aligned}$$

La loi de commande est obtenue en inversant le système non linéaire

$$\begin{cases} f_1^{i_1}(x_1, x_r, L, V) = \phi_1(y_1) \\ f_n^{i_2}(x_s, x_n, L + F, V) = \phi_2(y_2). \end{cases} \quad (4.11)$$

**Preuve** Considérons le changement de variables suivant

$$\begin{pmatrix} L \\ V \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r_r = L/V \\ r_e = V/(L + F) \end{pmatrix}.$$

C'est bien un changement de variable autour du point stationnaire car  $r_r r_e < 1$  et donc

$$L = \frac{r_r r_e}{1 - r_r r_e} F \quad \text{et} \quad V = \frac{r_e}{1 - r_r r_e} F.$$

En utilisant les relations (4.6),  $r_r$  et  $r_e$  vérifient nécessairement

$$\begin{cases} \frac{r_e F}{1 - r_r r_e} (Y_{r-2}^{i_1}(r_r, x_1, x_r) - x_1^{i_1}) = \phi_1(y_1) \\ \frac{F}{1 - r_r r_e} (X_{n-s-1}^{i_2}(1/r_e, x_s, x_n) - (1 - r_e)x_n^{i_2} - r_e k^{i_2}(x_n)) = \phi_2(y_2). \end{cases}$$

Le jacobien de ce système par rapport à  $r_r$  et  $r_e$  est diagonal au point stationnaire<sup>5</sup> :

$$\begin{pmatrix} \frac{r_e F}{1 - r_r r_e} \frac{\partial Y_{r-2}^{i_1}}{\partial(L/V)} & 0 \\ 0 & \frac{F}{1 - r_r r_e} \left( x_n^{i_2} - k^{i_2}(x_n) - \frac{1}{r_e^2} \frac{\partial X_{n-s-1}^{i_2}}{\partial(L/V)} \right) \end{pmatrix}.$$

Le théorème des fonctions implicites permet alors de conclure.

<sup>5</sup>Au point stationnaire,  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  et donc  $Y_{r-1} - x_1 = 0$  et  $X_{n-s-1} - (1 - r_e)x_n - r_e k(x_n) = 0$ . Ce qui simplifie les calculs du jacobien.

### Synthèse de la loi générique de commande avec le profil de températures

La loi de commande donnée par (4.11) dépend des compositions du distillat et du résidu ( $x_1$  et  $x_n$ ), mais aussi du débit d'alimentation et des compositions sur les plateaux d'agrégation  $r$  et  $s$ . En pratique, les compositions des produits sont mesurées ainsi que le débit d'alimentation. En revanche les compositions internes ne le sont pas. Cependant elles peuvent être estimées à l'aide du profil de températures.

Supposons que  $r - 1 > c - 1$  et  $n - s - 1 > c - 1$ . Nous pouvons choisir  $c - 1$  entiers distincts dans  $\{2, \dots, r\}$ , notés  $(r_i)_{i=1, \dots, c-1}$ , et  $c - 1$  entiers distincts dans  $\{s, \dots, n - 1\}$ , notés  $(s_i)_{i=1, \dots, c-1}$ . Si les températures en rectification et épuisement,  $(T_{r_i})_{i=1, \dots, c-1}$  et  $(T_{s_i})_{i=1, \dots, c-1}$  sont mesurées, elles peuvent être considérées comme des sorties du système (4.9). En effet, l'équilibre thermodynamique entre le liquide et la vapeur implique que les températures sont fonctions des compositions liquides. Les équations statiques d'un compartiment (4.3) donnant les fonctions  $X_m$  et  $Y_m$ , donnent de la même façon le profil complet des compositions liquides. Nous voyons donc que

$$\begin{cases} T_{r_i} &= h_{r_i}(x_1, x_r, L, V) \\ T_{s_i} &= h_{s_i}(x_s, x_n, L + F, V) \end{cases} \quad (4.12)$$

où les fonctions  $h_j$  dérivent directement de l'inversion de systèmes du type (4.3). Des relations (4.12), nous pouvons remonter aux compositions  $(x_r, x_s)$  et ainsi calculer la loi de commande (4.11).

En résumé, si les compositions du distillat et du résidu,  $(x_1 = (x_1^i)_{i=1, \dots, c-1})$  et  $(x_n = (x_n^i)_{i=1, \dots, c-1})$ , le débit d'alimentation  $F$ , les températures de rectification  $(T_{r_i})_{i=1, \dots, c-1}$  et les températures d'épuisement  $(T_{s_i})_{i=1, \dots, c-1}$  sont mesurées, la loi de commande peut être calculée en résolvant le système algébrique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{i_1}(x_1, x_r, L, V) = \phi_1(y_1) \\ f_n^{i_2}(x_s, x_n, L + F, V) = \phi_2(y_2) \\ h_{r_1}(x_1, x_r, L, V) = T_{r_1} \\ \vdots \\ h_{r_{c-1}}(x_1, x_r, L, V) = T_{r_{c-1}} \\ h_{s_1}(x_s, x_n, L + F, V) = T_{s_1} \\ \vdots \\ h_{s_{c-1}}(x_s, x_n, L + F, V) = T_{s_{c-1}}. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Les  $2c$  inconnues sont  $x_r = (x_r^i)_{i=1, \dots, c-1}$ ,  $x_s = (x_s^i)_{i=1, \dots, c-1}$ ,  $L$  et  $V$ .

Cette synthèse en température de la loi de commande suppose que les compositions du distillat et du résidu sont mesurées. Si toutes les composantes du vecteur  $x_1$  ou du vecteur  $x_n$  ne sont pas mesurées, la démarche précédente peut être modifiée afin de remplacer les parties non mesurées de  $x_1$  et  $x_n$  par des températures additionnelles en rectification et en épuisement. Ces fractions molaires non mesurées sont alors ajoutées aux inconnues du

système (4.13). Complété par les équations relatives aux températures supplémentaires, le système algébrique (4.13) donne alors la commande. Comme dans le cas binaire, nous pouvons remplacer des capteurs de compositions, en général coûteux et introduisant des retards, par des capteurs de températures peu chers et instantanés.

Les positions des températures,  $(r_i)_{i=1,\dots,c-1}$  et  $(s_i)_{i=1,\dots,c-1}$ , doivent être choisies, pour des questions de robustesse, de façon à ce que le système (4.13) soit le mieux conditionné possible. Ceci constitue à la fois une limitation et un critère simple qui ne fait intervenir que des équations statiques, pour choisir une bonne instrumentation en température.

### 4.2.2 Le rejet de perturbations sur le modèle en 3 compartiments

#### La loi générique de commande

Le modèle de commande est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_r}{dt} = g_r(x_r, x_{j_F}, L, V) \\ \frac{dx_{j_F}}{dt} = g_{j_F}(x_r, x_{j_F}, x_s, L, V, F, z_F) \\ \frac{dx_s}{dt} = g_s(x_{j_F}, x_s, L + F, V) \\ y_1 = S_1(L/V, x_r) \\ y_2 = S_2((L + F)/V, x_s) \end{array} \right. \quad (4.14)$$

(les fonctions  $g_j$  sont définies par (4.8)). Les sorties sont  $y_1$  et  $y_2$ . Elles dépendent directement des commandes  $L$  et  $V$ . En effet, si nous reprenons les calculs du chapitre 4 qui conduisent au modèle réduit en 3 compartiments, nous nous apercevons rapidement que les compositions du distillat et du résidu sont respectivement fonctions de  $(x_r, L/V)$  et  $(x_s, (L + F)/V)$ . Ceci explique la présence des fonctions  $S_1$  et  $S_2$ . Ces fonctions sont obtenues en résolvant les équations statiques des plateaux 1 à  $r - 1$  et  $s + 1$  à  $n$ , c'est à dire en résolvant par rapport à  $(x_1, \dots, x_r)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = Vk(x_2) - Vk(x_1) \\ 0 = Lx_1 + Vk(x_3) - Lx_2 - Vk(x_2) \\ \vdots \\ 0 = Lx_{r-2} + Vk(x_r) - Lx_{r-1} - Vk(x_{r-1}) \end{array} \right. \quad (4.15)$$

avec  $S_1 = x_1^{i_1}$ , et en résolvant par rapport à  $(x_{s+1}, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} 0 = (L + F)x_s + Vk(x_{s+2}) - (L + F)x_{s+1} - Vk(x_{s+1}) \\ \vdots \\ 0 = (L + F)x_{n-2} + Vk(x_n) - (L + F)x_{n-1} - Vk(x_{n-1}) \\ 0 = (L + F)x_n - (L + F - V)x_n - Vk(x_n) \end{cases} \quad (4.16)$$

avec  $S_2 = x_n^{i_2}$ .

Pour calculer la commande, il n'est pas nécessaire de dériver les sorties par rapport au temps puisqu'elles font directement intervenir  $L$  et  $V$ . Formellement, la loi de commande est alors obtenue en remplaçant  $y_1$  et  $y_2$  par deux fonctions du temps  $y_1^c$  et  $y_2^c$ .

**Lemme 5.** *Soit le système dynamique (4.14) où les commandes sont  $(L, V)$ , où les perturbations non mesurées sont  $z_F = (z_F^i)^{i=1, \dots, c-1}$ , où les sorties sont  $(y_1, y_2)$  et où  $F$  est un paramètre connu fonction du temps. Soit un point stationnaire,  $\bar{x}$  associé aux entrées  $\bar{L} > 0, \bar{V} > 0, \bar{F} > 0$  et  $\bar{z}_F$  vérifiant  $\bar{L} < \bar{V} < \bar{L} + \bar{F}$ . Si*

$$\frac{\partial S_1}{\partial(L/V)}(\bar{L}/\bar{V}, \bar{x}_r) \neq 0$$

et si

$$\frac{\partial S_2}{\partial((L + F)/V)}((\bar{L} + \bar{F})/\bar{V}, \bar{x}_s) \neq 0$$

alors localement autour du point stationnaire, il existe une unique loi de commande dépendant de  $x_r, x_s$  et  $F$  telle que les sorties du système bouclé soient

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{y}_1 \\ y_2 &= \bar{y}_2 \end{aligned}$$

avec  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$  les valeurs des sorties au régime stationnaire. La loi de commande est obtenue en inversant le système non linéaire

$$\begin{cases} S_1(L/V, x_r) = \bar{y}_1 \\ S_2((L + F)/V, x_s) = \bar{y}_2. \end{cases} \quad (4.17)$$

**Preuve** Il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites.

### Synthèse de la loi générique de commande avec le profil de températures

Comme pour le modèle en 5 compartiments, les compositions internes  $x_r$  et  $x_s$  peuvent être reconstituées à l'aide du profil de températures.

Comme précédemment, considérons  $c-1$  températures sur les plateaux 2 à  $r$ ,  $(T_{r_i})_{i=1,\dots,c-1}$ , et  $c-1$  températures sur les plateaux  $s$  à  $n$ ,  $(T_{s_i})_{i=1,\dots,c-1}$  (pour tout  $i \in \{1, \dots, c-1\}$ ,  $2 \leq r_i \leq r$  et  $s \leq s_i \leq n$ ). Les relations (4.15) et (4.16) impliquent pour  $i = 1, \dots, c-1$

$$\begin{cases} T_{r_i} &= \Theta_{r_i}(L/V, x_r) \\ T_{s_i} &= \Theta_{s_i}((L+F)/V, x_s). \end{cases} \quad (4.18)$$

Ainsi, si le débit d'alimentation  $F$ , les températures de rectification  $(T_{r_i})_{i=1,\dots,c-1}$  et les températures d'épuisement  $(T_{s_i})_{i=1,\dots,c-1}$  sont mesurés, la loi de commande est donnée par

$$\begin{cases} S_1(L/V, x_r) &= y_1^c \\ S_2((L+F)/V, x_s) &= y_2^c \\ \Theta_{r_1}(L/V, x_r) &= T_{r_1} \\ &\vdots \\ \Theta_{r_{c-1}}(L/V, x_r) &= T_{r_{c-1}} \\ \Theta_{s_1}((L+F)/V, x_s) &= T_{s_1} \\ &\vdots \\ \Theta_{s_{c-1}}((L+F)/V, x_s) &= T_{s_{c-1}} \end{cases} \quad (4.19)$$

avec  $y_1^c$  et  $y_2^c$  les consignes des sorties.

En conclusion, la loi de commande élaborée sur le modèle réduit en 3 compartiments permet de commander les compositions du distillat et du résidu *sans* les mesurer, uniquement en connaissant le débit d'alimentation et les profils de températures en rectification et en épuisement.

### 4.3 Simulations

Cette extension formelle et heuristique aux colonnes pseudo-binaires des lois de commande obtenues rigoureusement pour les colonnes binaires, n'a de valeur que si elle est complétée par une étude en simulation qui montre numériquement l'applicabilité et l'intérêt sur une colonne pseudo-binaire particulière. Nous avons effectué une telle étude pour le débutaniseur de raffinerie décrit dans le chapitre 1. Comme pour le dépropaniseur, le modèle de simulation est le modèle complet décrit dans la chapitre 1. Il se présente sous la forme d'un système algèbro-différentiel de plusieurs centaines d'équations.

Toutes les simulations dynamiques de cette section démarrent du même régime stationnaire. Ce régime stationnaire correspond au fonctionnement nominal du débutaniseur et est décrit à la fin du chapitre 1. Toutes les perturbations qui sont appliquées au système correspondent à des perturbations dont les domaines d'amplitude et de fréquence sont représentatifs des perturbations que l'on peut rencontrer en pratique.



### 4.3.1 Les paramètres de réglage

Les lois de commande des lemmes 4 et 5 comportent des degrés de liberté (les fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  et les paramètres  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$ ). Comme dans le cas binaire, nous allons utiliser ces degrés de liberté pour introduire des paramètres de réglage dans les lois de commande afin de prendre en compte, entre autres, les décalages statiques qui existent entre les modèles agrégés et le modèle de simulation.

Nous avons :

- $j_r = 11$ ,  $j_s = 33$ ;
- étant donnée la présence négligeable d'essence dans le distillat, nous avons utilisé dans les équations relatives à la sortie  $y_1$  (premières équations de (4.17) et (4.11)) un modèle avec  $c = 3$  composés (propane, butane, pentane) en négligeant l'éthane ; de même, étant donnée l'infime présence d'éthane et de propane dans le résidu, nous avons utilisé dans les équations relatives à la sortie  $y_2$  (secondes équations de (4.17) et (4.11)) un modèle avec  $c = 3$  composés (butane, essence légère, essence lourde) en négligeant le pentane ; le modèle thermodynamique est dans les deux cas celui de Soave ;
- le débit de vapeur  $V$  du modèle de commande est supposé proportionnel à la puissance de rebouillage  $Q^{reb}$  du modèle de simulation ;
- pour la loi de commande (4.11) du lemme 4 :

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \frac{y_1^c(t) - y_1(t)}{\tau_1^P} + \frac{\int_0^t (y_1^c(\mu) - y_1(\mu)) d\mu}{\tau_1^I \tau_1^P} \\ \phi_2(t) &= \frac{y_2^c(t) - y_2(t)}{\tau_2^P} + \frac{\int_0^t (y_2^c(\mu) - y_2(\mu)) d\mu}{\tau_2^I \tau_2^P}\end{aligned}\tag{4.20}$$

avec  $y_1^c$  et  $y_2^c$  les deux consignes,  $\tau_1^P = 3$  et  $\tau_2^P = 3$  mn,  $\tau_1^I = \tau_2^I = 90$  mn ;

- pour la loi de commande (4.17) du lemme 5:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1(t) &= y_1^c(t) + \frac{\int_0^t (y_1^c(\mu) - y_1(\mu)) d\mu}{\tau_1^I} \\ \bar{y}_2(t) &= y_2^c(t) + \frac{\int_0^t (y_2^c(\mu) - y_2(\mu)) d\mu}{\tau_2^I}\end{aligned}$$

avec  $y_1^c$  et  $y_2^c$  les deux consignes,  $\tau_1^I = \tau_2^I = 100$  mn.

### 4.3.2 Rejet asymptotique et robustesse

Déjà, le fait de pouvoir simuler le système en boucle fermée, montre que, numériquement, les lois de commande, définies de façon formelle par les lemmes 4 et 5, existent pour le débutaniseur et ne sont pas singulières autour du régime stationnaire. Les simulations présentées ci-dessous, montrent que les comportements en boucle fermée sont très voisins du ceux du dépropaniseur.

#### Le rejet de perturbation est asymptotique

La figure 4.1 montre que le rejet des perturbations de composition de la charge est asymptotique. Pour cette simulation, la colonne est soumise à des variations entretenues de la composition de l'alimentation : les teneurs en essence légère et essence lourde oscillent respectivement entre 43% et 63% et entre 11% et 31% avec une période commune de 60 mn (leurs valeurs moyennes sont celles du régime stationnaire, 53% et 21%). Pour mieux voir l'effet de la commande, nous avons tracé les trajectoires des sorties non commandées. Les consignes ne sont respectées qu'en moyenne.

#### La robustesse vis à vis des retards dans les mesures des sorties

Les figures 4.2 et 4.3 portent sur un quasi-échelon de la composition de la charge : de  $t = 0$  à  $t = 15$  mn, la teneur d'essence légère diminue de 53% à 43%, celle d'essence lourde augmente de 21% à 31%; cela correspond à une variation de température en fond de plus de 12 °C pour une même teneur en butane. Pour la figure 4.2, l'état est parfaitement mesuré. Pour la figure 4.3, seules les mesures des sorties sont retardées de 10 mn. Nous voyons que, avec un retard inférieur à 10 mn, les performances de la loi correspondant au modèle agrégé en 5 compartiments sont nettement supérieures. Cela s'explique car nous avons choisi des dynamiques de sorties contraignantes ( $\tau_1^P = \tau_2^P = 3$  mn dans (4.20)). En contrepartie, cette loi s'avère moins robuste : avec un retard de 10 mn, les commandes qu'elle fournit ont tendance à osciller ; si le retard devient plus important (30 mn par exemple), les simulations de la figure 4.4 montrent une dégradation notable des performances de la commande en 5 compartiments alors que, avec la loi de commande en 3 compartiments, les sorties convergent encore asymptotiquement vers leur consignes.

Les figures 4.5 et 4.6 portent sur un changement de consigne : de  $t = 0$  à  $t = 120$  mn, la consigne  $y_2^c$  passe de 0,005 à 0,02. Pour la figure 4.5, l'état est parfaitement mesuré. Pour la figure 4.6, seules les mesures des sorties sont retardées de 10 mn. Nous voyons que la loi correspondant au modèle agrégé en 5 compartiments permet un meilleur suivi de la trajectoire de référence.

## 4.3. SIMULATIONS

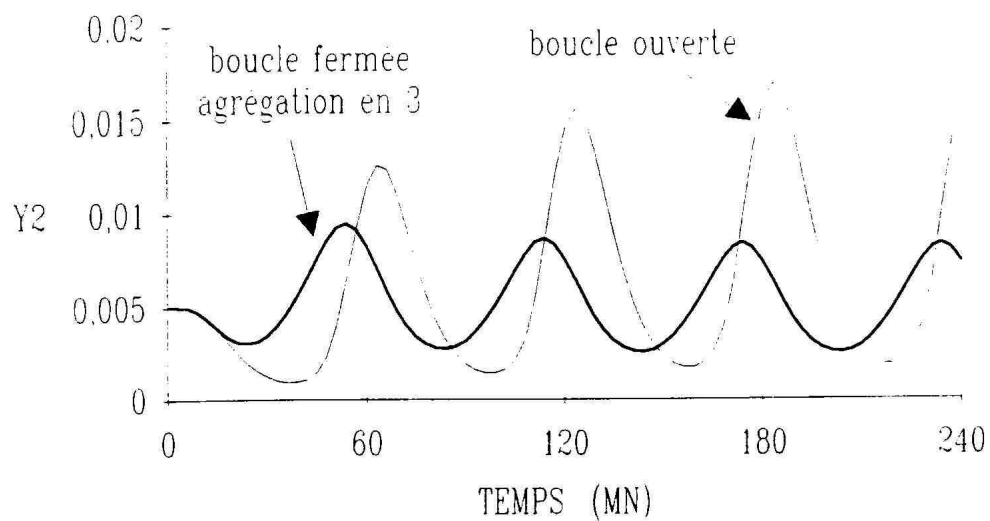
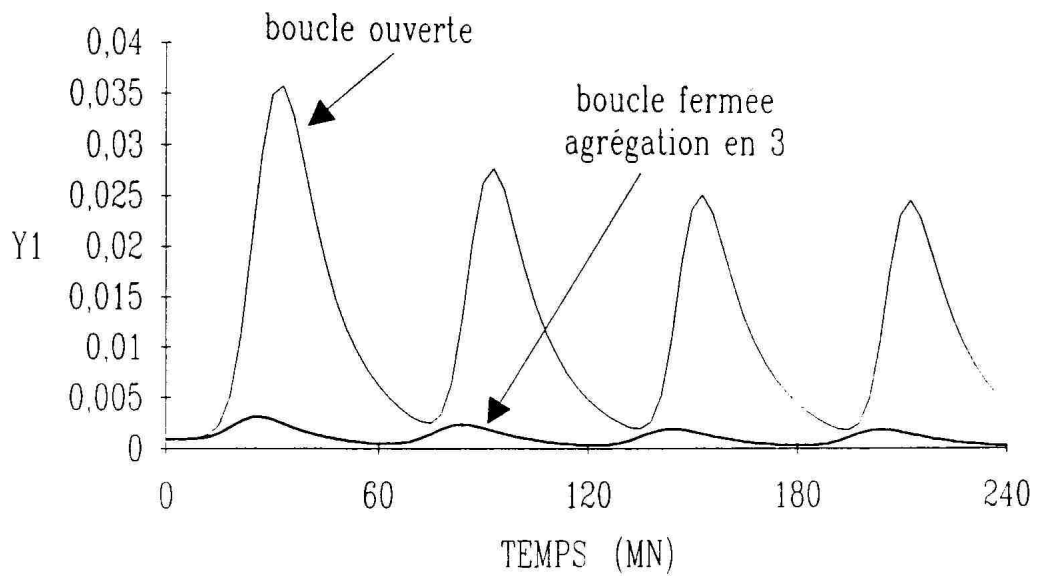


Figure 4.1: débutaniseur ; oscillation de la composition de l'alimentation ; commandes calculées sur le modèle en 3 compartiments ; pas de retard dans les mesures des sorties.

## HAPITRE 4. LES COLONNES PSEUDO-BINAIRES

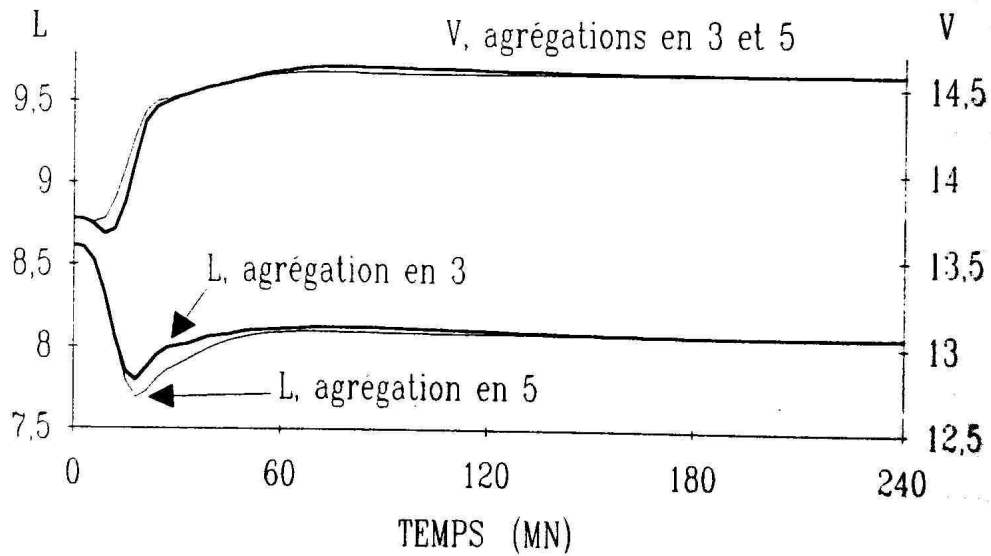
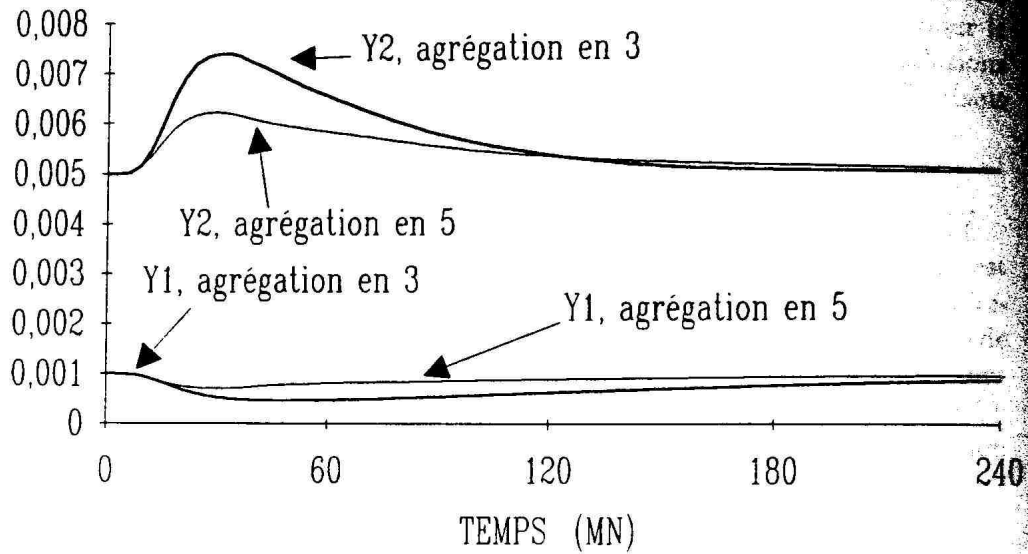


Figure 4.2: débutaniseur ; réponse à une perturbation de composition de l'alimentation ; commandes calculées sur les modèles agrégés en 3 et 5 compartiments ; pas de retard dans les mesures des sorties.

## 4.3. SIMULATION:

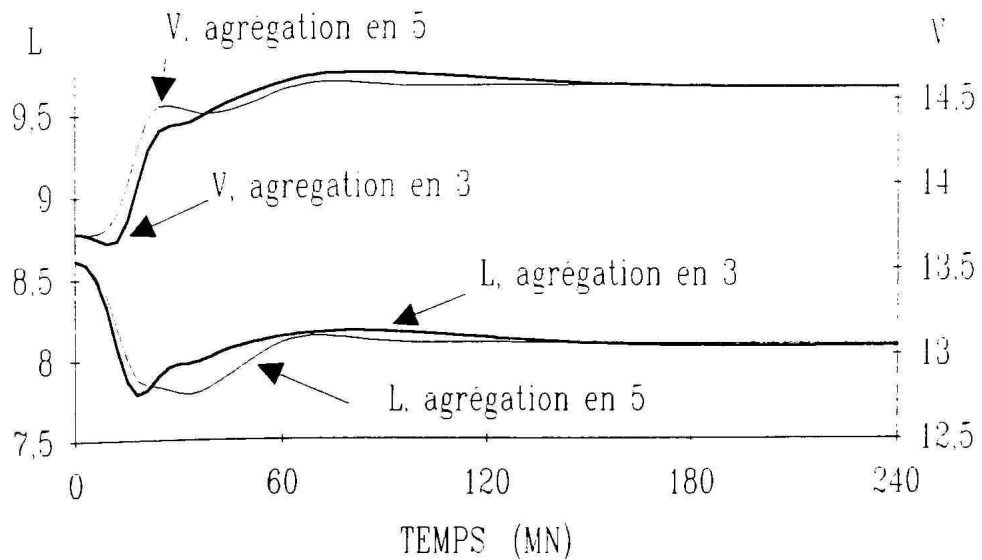
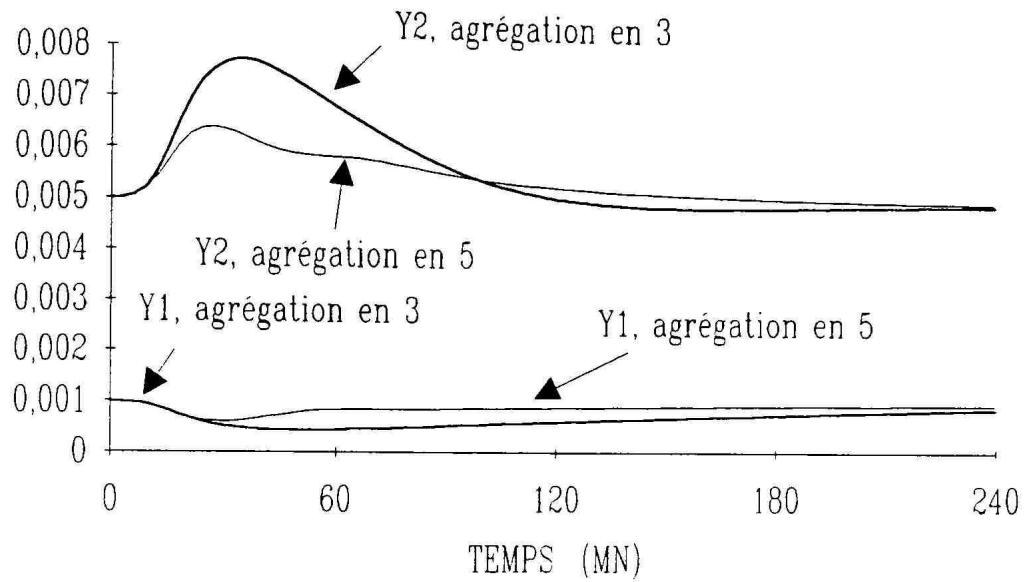


Figure 4.3: débutaniseur ; réponse à une perturbation de composition de l'alimentation ; commandes calculées sur les modèles agrégés en 3 et 5 compartiments ; retard de 10 mn dans les mesures des sorties.

APITRE 4. LES COLONNES PSEUDO-BINAIRES

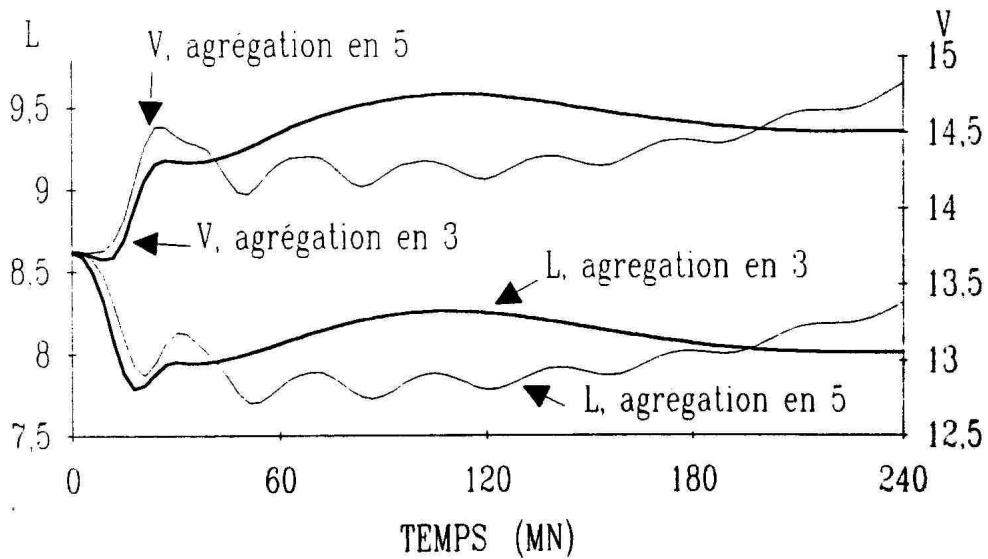
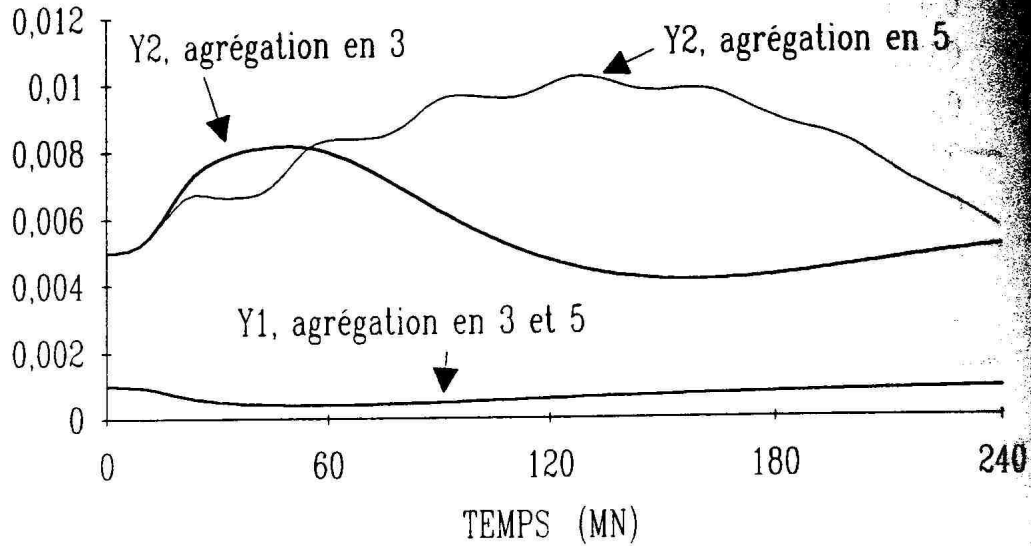


Figure 4.4: débutaniseur ; réponse à une perturbation de composition de l'alimentation ; commandes calculées sur les modèles agrégés en 3 et 5 compartiments ; retard de 30 mn dans les mesures des sorties.

## 4.3. SIMULATIONS

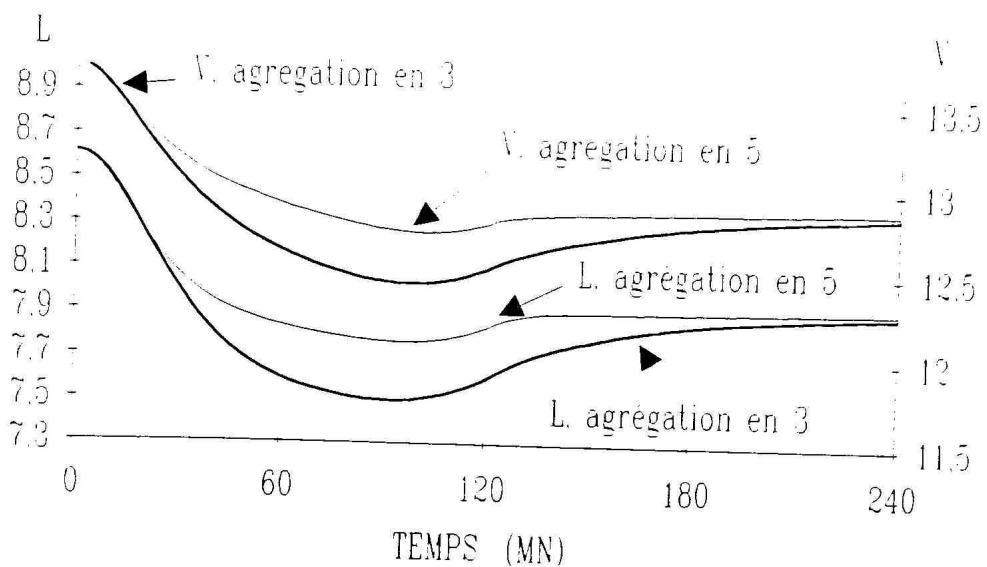
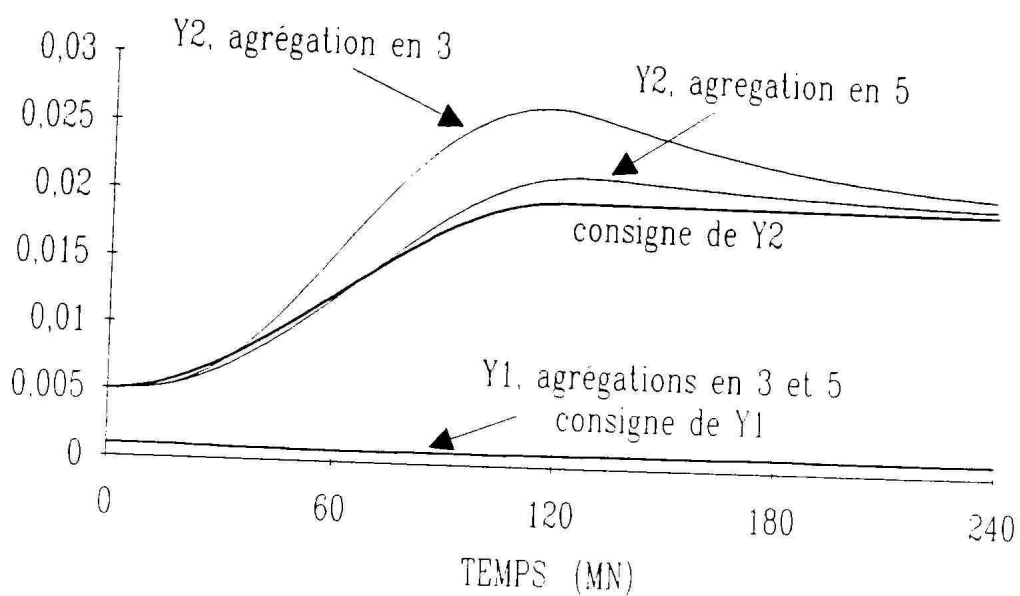


Figure 4.5: débutaniseur ; changement de la consigne en fond ; commandes calculées sur les modèles agrégés en 3 et 5 compartiments ; pas de retard dans les mesures des sorties.

## CAPITRE 4. LES COLONNES PSEUDO-BINAIRES

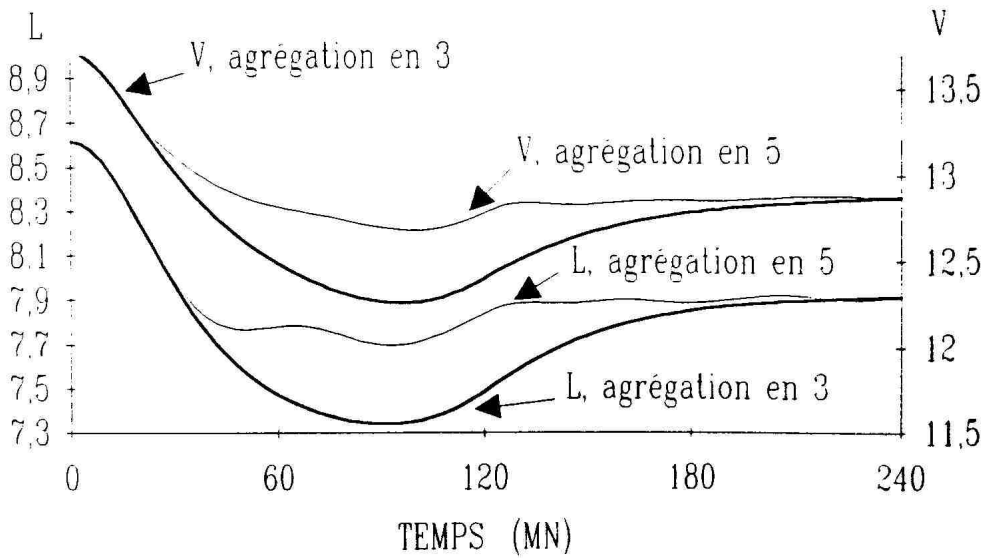
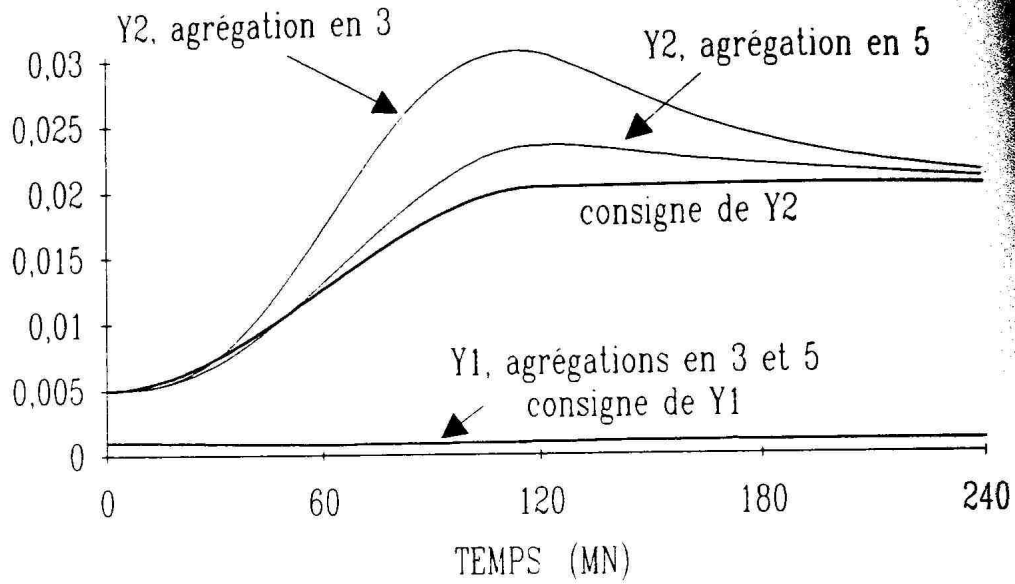


Figure 4.6: débutaniseur ; changement de la consigne en fond ; commandes calculées sur les modèles agrégés en 3 et 5 compartiments ; retard de 10 mn dans les mesures des sorties.



# Chapter 5

## Mise en œuvre industrielle

Dans les chapitres précédents, nous avons surtout traité les aspects théoriques de la commande et présenté des simulations numériques en boucle fermée. L'objet du présent chapitre est de montrer que ces lois de commande peuvent être utilisées en vraie grandeur.

Les lois de commandes non linéaires des chapitres précédents ont été implantées sur un dépropaniseur et un débutaniseur de raffinerie. Ces deux colonnes, modélisées dans le chapitre 1, correspondent à celles des simulations des chapitres 3 et 4. Le présent chapitre se décompose en deux parties. La première partie présente, sous la forme d'enregistrement sur le site, les résultats obtenus sur le dépropaniseur et le débutaniseur en boucle fermée. La seconde partie est relative au logiciel de commande non linéaire en qualité, COLBIN, et indique une démarche systématique d'installation de ce logiciel sur une nouvelle colonne.

### 5.1 Les résultats sur site.

#### 5.1.1 Le dépropaniseur en boucle fermée

Les mesures disponibles sur le site sont

- le débit et la température de l'alimentation,
- la température de tête (plateau 2),
- une température en rectification,
- une température en épuisement,
- la température en fond,
- la composition du distillat,
- la composition du résidu.

Comme pour les calculs de simulation (section 3.3.1 page 116), nous considérons que le dépropaniseur est une colonne binaire. Nous avons vu dans le chapitre 3 que ces mesures suffisent pour calculer directement la commande.

La figure 5.1 montre la réponse en boucle fermée du dépropaniseur face à des perturbations importantes de débit et de composition de la charge. En effet, la perturbation qui arrive à  $t = 2$  h correspond à un changement de brut et donc vraisemblablement à un changement dans la qualité des GPL<sup>1</sup>. Comme pour les simulations, nous constatons que le rejet est asymptotique.

### 5.1.2 Le débutaniseur en boucle fermée

Les mesures disponibles sur le site sont

- le débit et la température de l'alimentation,
- la température de tête (plateau 2),
- une température en rectification,
- deux températures en épuisement,
- la composition du distillat,
- la composition du résidu<sup>2</sup>.

Comme pour les simulations de la section 4.3.1, page 149, nous utilisons des pseudo-composés pour décrire les mélanges en rectification et en épuisement comme des mélanges ternaires. Dans ces conditions, nous avons vu au chapitre 4 que ces mesures suffisent pour calculer directement la commande.

Les enregistrements des figures 5.2 et 5.3 correspondent à des perturbations importantes de débit et de composition de la charge (la température du fond, figure 5.3). Ces perturbations sont dues à un changement de la qualité du pétrole brut traité par la raffinerie. Les consignes ne sont quasiment pas modifiées. Nous voyons qu'avant les perturbations, le régime est stable et les sorties sont aux consignes, que, pendant le changement de brut, les sorties varient de façon significative, qu'après le changement de brut, le débit de charge est nettement plus oscillant (l'amplitude des oscillations est d'au moins 10%) et que, malgré cela, les sorties reviennent bien aux consignes et ne s'en éloignent plus beaucoup. Notons enfin que les commandes calculées sont régulières et douces sauf lors du changement brutal de débit de charge où il faut réagir rapidement.

---

<sup>1</sup>Gaz de Pétrole Liquéfié.

<sup>2</sup>En considérant le mélange en fond ternaire et en mesurant la température en fond, nous pouvons, par un simple calcul de température de bulle, connaître la composition complète du résidu si l'on connaît sa teneur en butane.

## 5.1. LES RÉSULTATS SUR SITE.

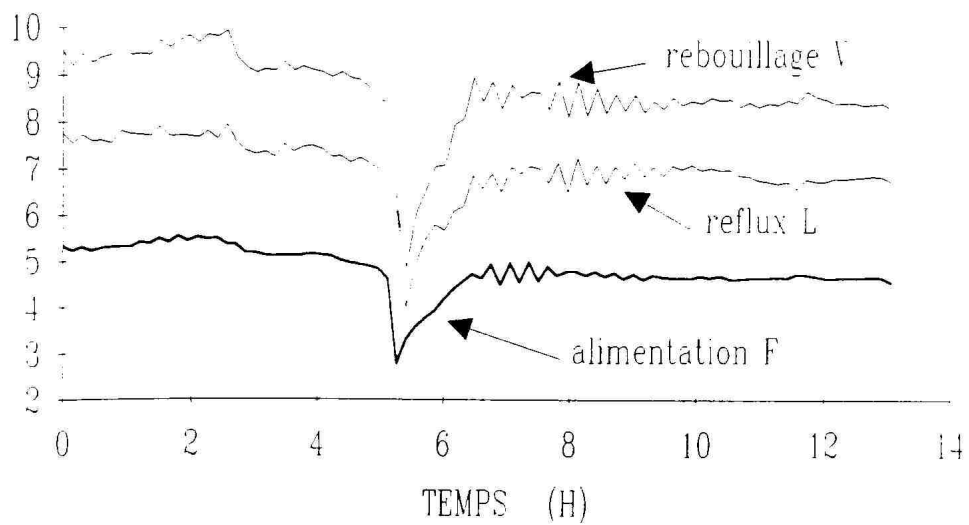
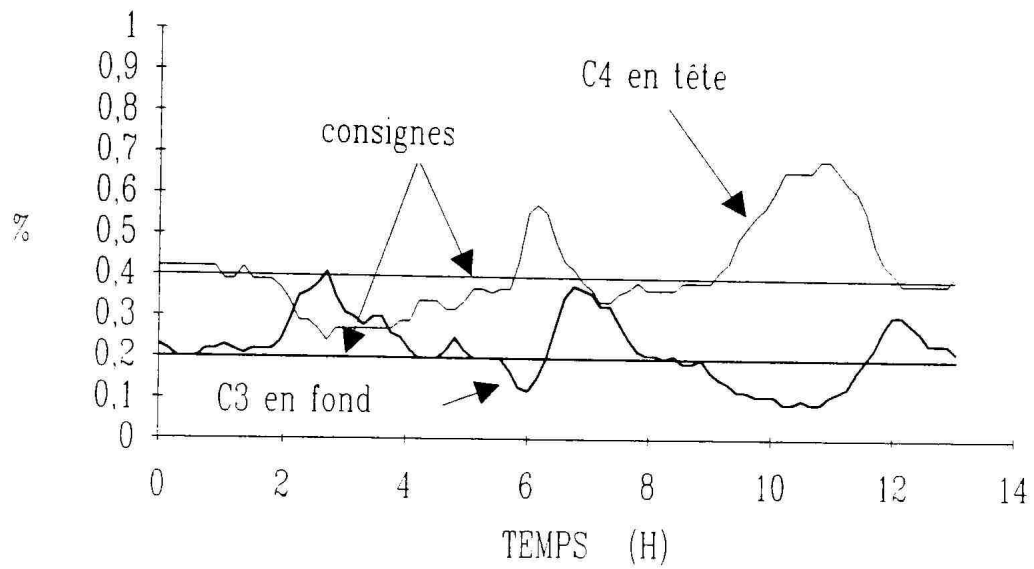


Figure 5.1: dépropaniseur; enregistrement sur site; commande non linéaire agrégée; nombreuses perturbations sans changement de consigne.

## PITRE 5. MISE EN ŒUVRE INDUSTRIELLE

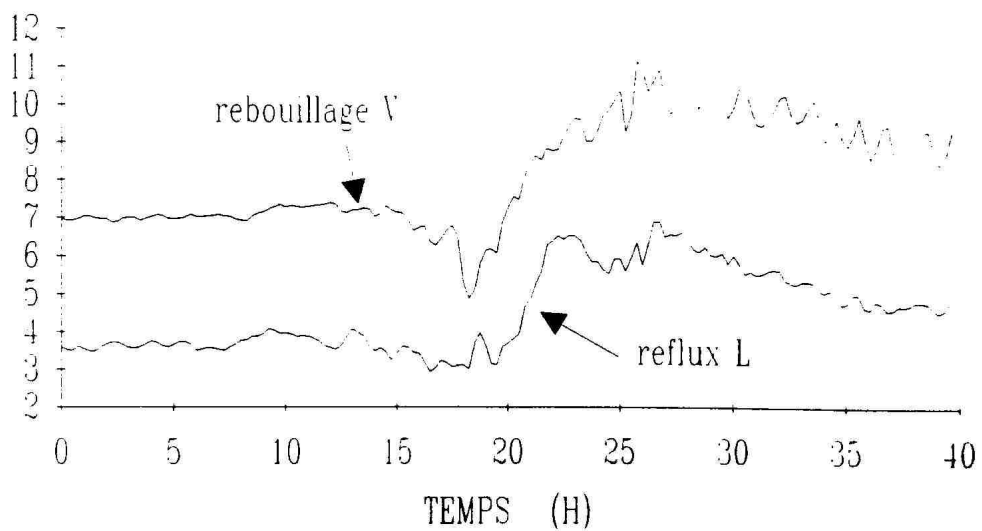
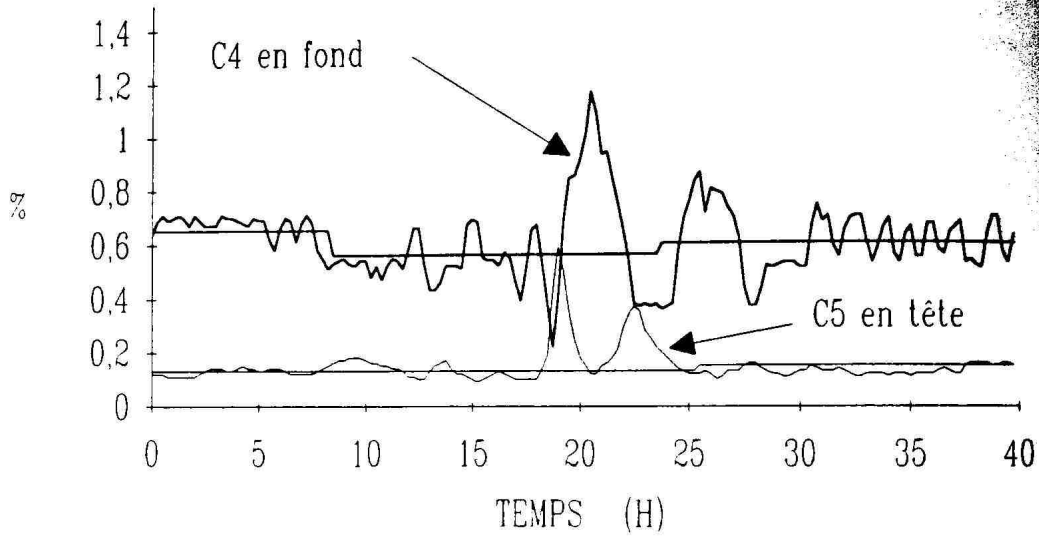


Figure 5.2: débutaniseur ; enregistrement sur site ; commande non linéaire agrégée ; nombreuses perturbations dues à un changement de brut.

## 5.1. LES RÉSULTATS SUR SITE.

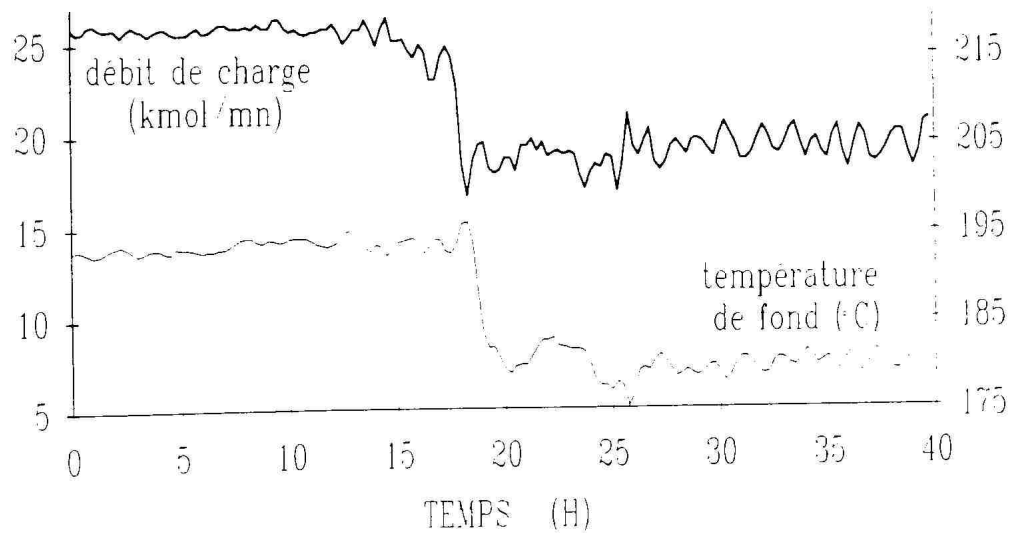


Figure 5.3: débutaniseur ; enregistrement sur site ; commande non linéaire agrégée ; nombreuses perturbations dues à un changement de brut.

Figure 5.3: débutaniseur ; enregistrement sur site ; commande non linéaire agrégée ; nombreuses perturbations dues à un changement de brut.

La figure 5.4 correspond à un changement de consigne en fond : cette dernière baisse de 0,5% à 0,2% en 3 heures. Nous constatons que le suivi est correct et que les commandes qui sont appliquées sont douces et régulières. Remarquons aussi que la charge n'est jamais constante (variation de l'ordre de 10%). Elle entraîne donc des variations de faible amplitude sur les sorties.

## 5.1. LES RÉSULTATS SUR SITE.

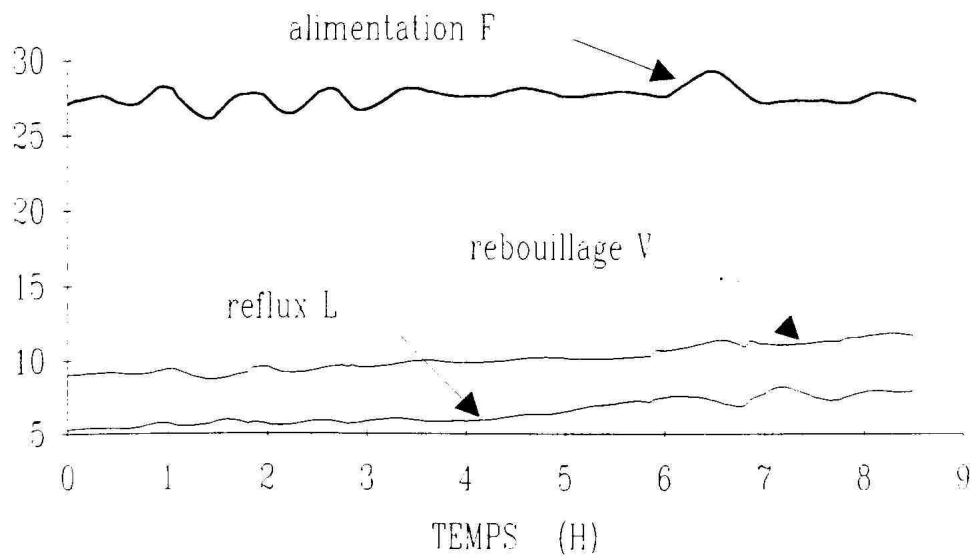
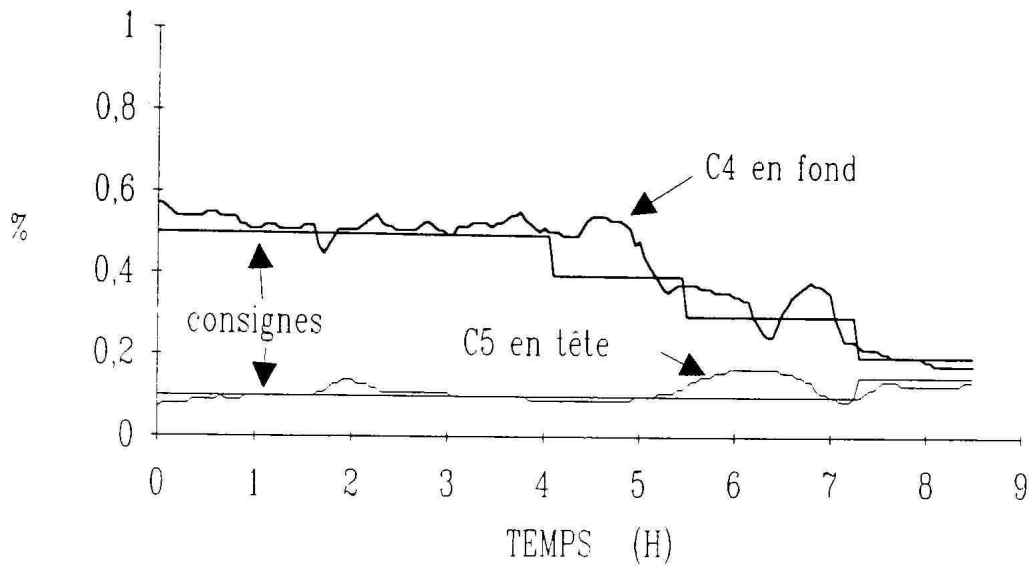


Figure 5.4: débutaniseur ; enregistrement sur site ; commande non linéaire agrégée ; peu de perturbations avec un changement de consigne.

### 5.1.3 Remarque autour de la précision

On pourrait s'attendre à une meilleure précision dans le suivi des consignes. En fait, cette précision est largement tributaire des incertitudes sur les débits, incertitudes relatives que nous estimons en pratique à 1% au minimum et qui correspondent à la précision d'une bonne régulation de débit. Par exemple, pour le débutaniseur, des calculs statiques de sensibilité autour du régime stationnaire de référence montrent qu'une erreur relative sur le reflux de  $-1\%$  entraîne, toutes choses égales par ailleurs, les écarts suivants sur les sorties :

$$\begin{aligned}y_1 &= 0,10 + 0,27 = 0,37 \quad \% \\y_2 &= 0,50 - 0,08 = 0,42 \quad \%\end{aligned}$$

De même, une erreur relative de  $+1\%$  sur la puissance de rebouillage engendre les écarts suivants :

$$\begin{aligned}y_1 &= 0,10 + 0,38 = 0,48 \quad \% \\y_2 &= 0,50 - 0,36 = 0,14 \quad \%\end{aligned}$$

Sans une meilleure instrumentation, il est donc très difficile de commander les sorties avec plus de précision.

### 5.1.4 Conclusion

#### Fiabilisation de la qualité

Nous devons nous attendre à une qualité plus constante des produits. La comparaison entre le fonctionnement "manuel"<sup>3</sup> et le fonctionnement automatique<sup>4</sup> doit nous éclairer. Pour le débutaniseur, les figures 5.5 et 5.6 correspondent à un fonctionnement manuel. Un peu après  $t = 20$  h, un changement de brut apparaît. En raison des observations sur le débit de la charge et sur la température de fond, les seules perturbations significatives liées à ce changement de brut ne peuvent porter que sur les GPL. Or, la température de tête et de débit de distillat ne varient pas beaucoup. Les perturbations liées à ce changement de brut sont donc peu importantes. Les figures 5.5 et 5.6 sont à comparer aux figures 5.2 et 5.3 qui correspondent à un fonctionnement automatique avec un changement de brut engendrant de fortes perturbations.

L'apport de la commande est clair : en présence de perturbations d'amplitude moyenne, les qualités sont nettement plus constantes ; en présence de fortes perturbations, les écarts entre les mesures de qualités et leurs consignes restent inférieurs à ceux observés en fonctionnement manuel avec des perturbations moyennes.

---

<sup>3</sup>Par manuel, nous entendons le fonctionnement en boucle ouverte. Le reflux est fixé manuellement par l'opérateur. La puissance de rebouillage est fixé par un régulateur proportionnel et intégral de température en épuisement. La consigne de ce régulateur est donnée par l'opérateur.

<sup>4</sup>Par automatique, nous entendons, ici, le fonctionnement en boucle fermée avec la commande non linéaire.



## 5.1. LES RÉSULTATS SUR SITE.

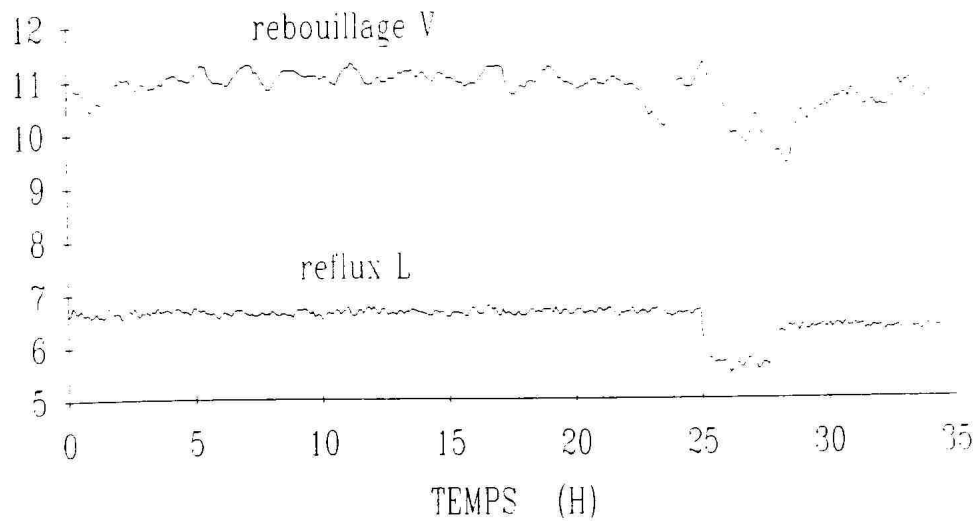
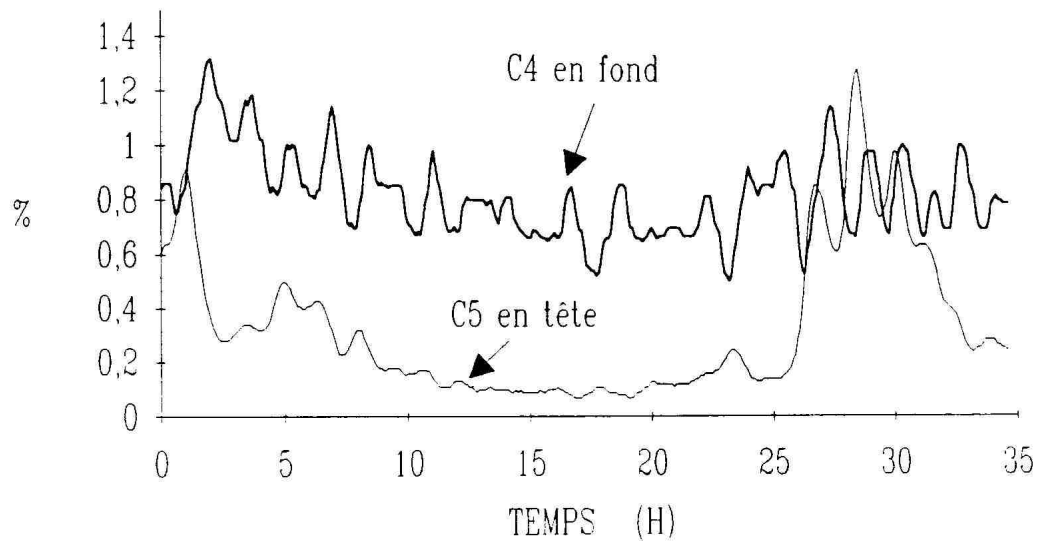


Figure 5.5: débutaniseur; enregistrement sur site; fonctionnement "manuel"; peu de

Figure 5.5: débutaniseur; enregistrement sur site; fonctionnement "manuel"; peu de perturbations.

## CHAPITRE 5. MISE EN ŒUVRE INDUSTRIELLE

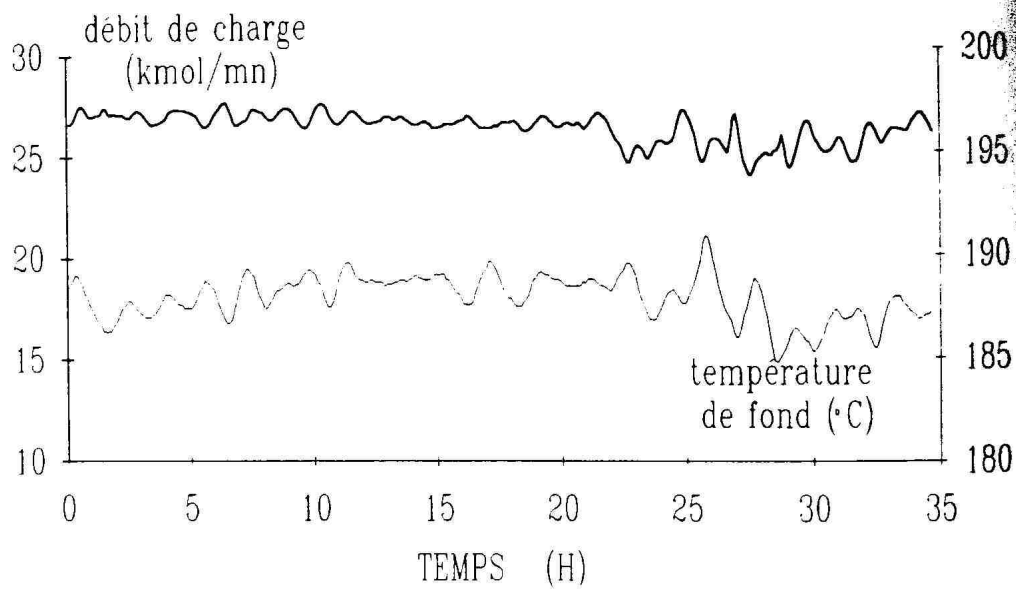


Figure 5.6: débutaniseur; enregistrement sur site; fonctionnement "manuel"; peu de perturbations.

Figure 5.6: débutaniseur; enregistrement sur site; fonctionnement "manuel"; peu de perturbations.

### Engorgement et capacité de traitement

Les opérateurs ont tendance à prendre des marges de sécurité dans la conduite des colonnes<sup>5</sup>. Ces marges se traduisent en fin de compte par des produits trop purifiés et les amènent obligatoirement à augmenter les circulations internes à l'intérieur de la colonne. En diminuant cette marge de sécurité, une commande en qualité permet d'augmenter la capacité de traitement de la colonne en repoussant les limitations par l'engorgement dues à cette surpurification.

Sur le dépropaniseur, nous avons pu observer, lors d'une surcharge temporaire de la colonne, l'intérêt de la commande. Sur la figure 5.7, plusieurs événements sont combinés. Après un changement important de consigne en tête de 10% à 0,5%, apparaît une augmentation très importante du débit de la charge et un dépassement des capacités de la colonne de plus de 30%. Comme les seuils haut et bas des commandes sont gérés automatiquement, au lieu de déboucler la commande, on bascule automatiquement sur une régulation mono-variable du produit prioritaire. Ici, le reflux a été limité à son seuil haut pour éviter d'engorger la colonne. La puissance de rebouillage a servi à commander la composition prioritaire du résidu. Il est donc logique que, pendant la durée de cette importante surcharge, la composition du distillat s'éloigne nettement de sa consigne alors que la composition du résidu reste correcte. Une fois la surcharge passée, tout redevient normal et la composition du distillat retourne à sa consigne. Il est presque inévitable qu'en fonctionnement manuel les qualités à la fois du distillat et celle du résidu auraient été très dégradées à cause d'un début d'engorgement de la colonne.

---

<sup>5</sup>Ce qui est tout à fait normal, compte tenu du fait qu'ils doivent surveiller en même temps de nombreuses autres installations.

## CHAPITRE 5. MISE EN ŒUVRE INDUSTRIELLE

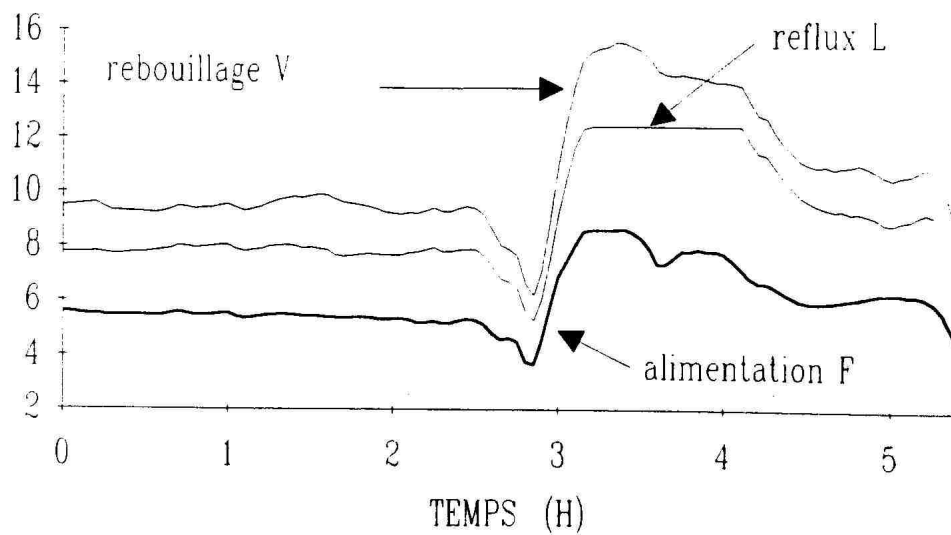
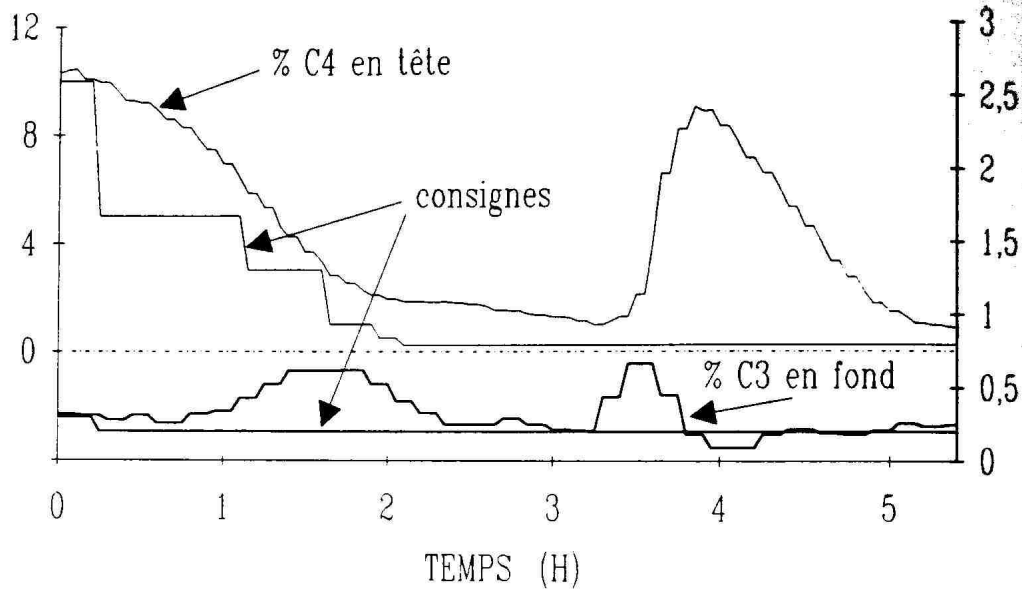


Figure 5.7: dépropaniseur; enregistrement sur site; commande non linéaire agrégée; nombreuses perturbations avec un changement de consignes; le seuil maximum sur la commande de reflux est atteint.

$y_2 \setminus y_1$	0,1%	0,5%	1,0%	1,5%	2,0%
0,1%	0,0	-2,1	-2,7	-3,1	-3,5
0,5%	-15,3	-17,6	-18,2	-18,6	-18,9
1,0%	-19,2	-21,7	-22,3	-22,7	-23,1
1,5%	-21,3	-23,8	-24,3	-24,8	-25,1
2,0%	-22,0	-25,3	-25,9	-26,3	-26,6

Table 5.1: dépropaniseur : variation relative en % de la puissance de rebouillage en fonction des qualités du distillat ( $y_1$ ) et du résidu ( $y_2$ ).

$y_2 \setminus y_1$	0,1%	0,2%	0,5%	1,0%
0,1%	0,0	-1,4	-2,6	-3,3
0,2%	-5,1	-6,5	-7,4	-8,0
0,5%	-9,5	-10,7	-11,6	-12,2
1,0%	-12,5	-13,6	-14,5	-15,0

Table 5.2: débutaniseur : variation relative en % de la puissance de rebouillage en fonction des qualités du distillat ( $y_1$ ) et du résidu ( $y_2$ ).

### Economie d'énergie

Nous n'avons pas de données réelles et significatives sur les économies d'énergie. Néanmoins une estimation réaliste de ces dernières peut être obtenue par des simulations statiques. Dans l'introduction, nous avons mentionné les conclusions d'études portant sur les économies d'énergie susceptibles d'être apportées par la commande en qualité des colonnes à distiller. Remarquant que les perturbations de composition et de débit d'alimentation peuvent entraîner des qualités inacceptables pour le distillat et le résidu, Stanley et McAvoy [89] soulignent qu'une colonne à distiller est généralement conduite de façon que, quelles que soient les perturbations, les qualités restent compatibles avec les objectifs de production. Ceci ne peut être fait qu'en augmentant le débit de reflux et la puissance de rebouillage. Dans ce cas, les produits obtenus sont purifiés plus que nécessaire.

Nous avons repris la démarche de ces auteurs et calculé, pour le dépropaniseur et le débutaniseur, les variations relatives de puissance de rebouillage (tableaux 5.1 et 5.2) correspondant, pour une même alimentation et au régime stationnaire, à diverses qualités du distillat et du résidu. Pour ces deux colonnes, nous constatons une forte dépendance de la puissance de rebouillage en fonction de la qualité du fond : la différence entre une teneur en impurété en fond de 0,1% et 0,5% se traduit par une baisse de la puissance de rebouillage d'au moins 10%, alors que une telle différence de qualité n'est pas très significative.

## Les opérateurs et la commande

Depuis que le programme de commande est en service sur le débutaniseur, nous avons constaté des changements dans la perception qu'ont les opérateurs de cette colonne. D'une part, ils se sont rendus compte que la température en rectification est nettement plus représentative de la qualité du distillat que la température de tête<sup>6</sup>. D'autre part, les opérateurs commencent à raisonner en fonction des consignes de qualité en tête et en fond au lieu de raisonner en fonction des consignes de débit de reflux et de température sensible en épuisement. Par exemple, les opérateurs jouent, en été, sur ces consignes de qualité de façon à éviter les problèmes de condensation en tête, problèmes liés au sous-dimensionnement des aéroréfrigérants.

En fait, nous ne remplaçons pas les opérateurs par le programme de commande. Nous leur fournissons uniquement de nouvelles commandes, les consignes de qualités, qui sont plus proches d'une valorisation économique de l'installation. Ce changement qualitatif s'accompagne aussi d'un changement quantitatif : les opérateurs n'ont plus besoin de surveiller très régulièrement le fonctionnement de la colonne. Cependant, ils doivent être capables de fixer les deux consignes de qualité. Une analyse des contraintes techniques et un calcul économique s'imposent alors pour déterminer les meilleures consignes. Mais tout ceci dépasse largement le cadre de notre étude.

## Quatre facteurs déterminants

A posteriori, cette automatisation repose sur la conjonction de quatre facteurs. Les deux premiers facteurs sont d'ordre scientifique : nous disposons de modèles dynamiques fiables de colonne à distiller et aussi de techniques de commande adaptées (perturbations singulières et rejet de perturbations par retour d'état). Les troisième et quatrième facteurs sont d'ordre technologique : d'une part, les calculateurs de procédés sont aujourd'hui suffisamment puissants et rapides pour permettre le calcul en temps réel de lois complexes de commande ; d'autre part, les colonnes que nous avons étudiées sont suffisamment instrumentées pour calculer directement la loi de retour d'état.

## 5.2 Le logiciel de commande COLBIN

La propriété essentielle qui rend la commande par retour d'état attrayante en pratique, est que, si l'on dispose de suffisamment d'information sur l'état, il n'est pas utile d'intégrer en ligne des équations différentielles, i.e. de simuler en ligne le système. C'est effectivement le cas pour les colonnes à distiller : les calculs en ligne consistent uniquement à calculer par la **résolution d'un système algébrique non linéaire** les commandes en fonctions des mesures prises sur la colonne. Nous avons, avec Y. Creff<sup>7</sup>, développé des algorithmes

---

<sup>6</sup>Avant l'installation de la commande, cette mesure de température de rectification n'existait pas.

<sup>7</sup>CAI, Section Automatique, Ecole des Mines de Paris.

numériques de résolution efficaces et rapides pour le calcul de la commande. L'ensemble de ces algorithmes sont rassemblés dans un logiciel, baptisé COLBIN<sup>8</sup>, de commande non linéaire en qualité de colonne à distiller.

### 5.2.1 Organisation du programme COLBIN

Le programme COLBIN a pour entrées principales les valeurs instantanées suivantes :

- le débit de charge et sa fraction vaporisée,
- la température de tête  $T_2$ ,
- la température en rectification  $T_r$ ,
- la température en épuisement  $T_s$ ,
- la température de fond  $T_n$ ,
- la pression de tête,
- la qualité du distillat,
- la qualité du résidu.

A partir de ces valeurs instantanées, COLBIN fournit en sortie les consignes de débit de reflux et de puissance de rebouillage.

Les commandes sont calculées régulièrement avec une période de quelques minutes. La durée du calcul ne dépasse pas quelques dizaines de secondes sur un PC-AT (8 MHz) muni d'un coprocesseur arithmétique. Le logiciel est écrit en FORTRAN. Tous les calculs numériques un peu "pointus" sont faits en double précision. La taille du programme est d'environ 30 k-octets.

### 5.2.2 Une procédure d'installation

Sans procédure systématique d'installation sur une nouvelle colonne, le programme de commande COLBIN perd grandement de son intérêt. De l'ensemble des essais, nous avons tenté de dégager une démarche cohérente de mise en place. Supposons que se pose la question de l'installation du programme COLBIN sur une nouvelle colonne. La démarche que nous préconisons est la suivante.

---

<sup>8</sup>COLBIN pour COLonne pseudo-BINaire.

### Intérêt

Tout d'abord, il convient de s'assurer qu'une commande en qualité de cette colonne présente un intérêt clairement analysé et défini. A priori, la commande en qualité d'une colonne comporte trois sortes d'avantages :

- les économies en énergie de séparation, que ce soit la puissance de rebouillage ou la puissance de condensation ;
- une diminution, pour une charge donnée, de la circulation interne de vapeur et de liquide et donc la possibilité d'augmenter le débit de charge jusqu'à la limite d'engorgement ; en résumé, une augmentation de la capacité de traitement ;
- une qualité plus constante ainsi qu'une plus grande flexibilité dans la conduite de l'unité (changement automatique des consignes, moins de charge de travail pour l'opérateur).

### Instrumentation

Il faut s'assurer de l'existence et de la fiabilité de l'instrumentation. Le calcul de la commande nécessite la connaissance des grandeurs suivantes :

- le débit de charge et sa fraction vaporisée ; sur les colonnes que nous avons rencontrées, cette fraction vaporisée est en bonne approximation constante ; si, pour une colonne, elle ne l'est manifestement pas, il convient de trouver en externe un moyen assez simple pour la calculer à partir d'autres mesures comme la température et la pression de la charge ; si la charge est préchauffée par le résidu et si la fraction vaporisée dépend fortement de cette préchauffe, cette dépendance doit être prise en compte au niveau de la commande elle-même ; en principe, ceci ne doit pas poser de difficultés insurmontables ;
- les 4 températures de tête  $T_2$ , de rectification  $T_r$ , d'épuisement  $T_s$  et de fond  $T_n$  ; les deux températures  $T_r$  et  $T_s$  doivent être bien situées ;
- le débit de reflux et sa température ;
- la puissance de rebouillage ; cette grandeur n'est pas mesurée directement ; elle est le résultat de calculs spécifiques à la colonne et résulte d'une analyse du schéma de rebouillage ;
- le pression de tête ;
- le débit de distillat et de résidu ;
- la qualité du distillat ;



- la qualité du résidu.

Il faut vérifier que les mesures de ces grandeurs ne sont pas trop bruitées et, le cas échéant, utiliser des filtres. Nous avons observé en simulation et en pratique qu'un filtrage sur quelques minutes de ces mesures n'est pas du tout gênant pour la commande. Ce qui est tout à fait normal, puisque celle-ci est lente et n'a que faire de dynamiques rapides de l'ordre de la minute.

### La régulation de base

Nous avons vu dans l'introduction de la seconde partie qu'une colonne à distiller est en fait un système ayant 5 commandes (à savoir : le débit de distillat, le débit de résidu, la puissance de condensation, le débit de reflux, la puissance de rebouillage) et 5 sorties (à savoir : le niveau dans le ballon de reflux, le niveau du fond de la colonne, la pression de tête, la qualité du distillat, la qualité du résidu). Sur les colonnes que nous avons rencontrées, les deux niveaux et la pression sont régulés séparément par les deux débits de distillat et de résidu et la puissance de condensation. Un autre schéma de régulation de base n'est pas du tout contraignant pour la commande par COLBIN (par exemple, le niveau de tête peut très bien être régulé par le débit de reflux).

Il est absolument indispensable de vérifier que les 2 régulateurs de niveau et le régulateur de pression fonctionnent correctement, c'est à dire sont suffisamment stables et rapides.

En sortie, le programme COLBIN donne un objectif de débit de reflux et un objectif de puissance de rebouillage. Ces objectifs doivent être atteints dans un délai raisonnable. Il faut donc vérifier que la régulation de débit de reflux est correcte. Il faut soit vérifier que la régulation de la puissance de rebouillage est correcte, soit, et c'est généralement le cas, concevoir, pour la puissance de rebouillage, une boucle de régulation élémentaire adaptée au schéma de rebouillage.

En résumé : les deux niveaux, la pression de tête, le débit de reflux et la puissance de rebouillage doivent être correctement régulés.

### Modélisation du régime stationnaire

C'est la dernière et ultime étape avant les essais. Chaque algorithme de commande possède des paramètres qu'il convient d'ajuster en fonction de mesures en boucle ouverte ou en fonction du comportement en boucle fermée. Souvent, cela consiste par exemple à identifier un modèle simplifié sur une réponse du procédé à des excitations sur les commandes. De nombreux obstacles pratiques peuvent alors apparaître car de tels ajustements reposent sur des mesures de régimes transitoires toujours difficiles à analyser.

Ce qui fait l'originalité et surtout la simplicité de cette étape pour COLBIN réside dans le fait que les données nécessaires sont relatives à des régimes stationnaires faciles à obtenir et fiables. Cette étape de modélisation consiste, principalement, à choisir correctement le nombre de composés ou pseudo-composés, et les paramètres thermodynamiques

intervenant dans la modélisation de façon à représenter au mieux les mesures stationnaires observées sur le site.

# Conclusion

Des difficultés numériques de résolution apparaissent lors de la simulation des transitoires d'un procédé décrit par un système algébro-différentiel d'index supérieur ou égal à 2. Le fait d'avoir étendu de façon précise les notions d'index et de formes canoniques, du linéaire au non linéaire, permet de simplifier notablement l'analyse de la convergence de la méthode de Gear lorsque le système est implicite et d'index 1, et lorsque le système est semi-explicite et d'index 2. Nous pensons qu'une utilisation plus systématique des résultats sur l'inversion des systèmes dynamiques doit permettre d'améliorer et de construire de nouveaux schémas de résolution numérique dans les cas où l'index est plus élevé.

La théorie de la commande des systèmes non linéaires fournit des outils efficaces pour aborder la commande en qualité des colonnes à distiller, une fois que l'on dispose d'un modèle de commande adapté. La méthode du rejet des perturbations permet de prendre en compte simultanément les non linéarités et les couplages, de s'affranchir des perturbations non mesurées de composition d'alimentation. La loi de commande obtenue est simplement une fonction algébrique non linéaire dépendant de températures internes, du débit et de la fraction vaporisée de la charge, des compositions des produits, et d'au plus 4 paramètres de réglage influençant directement le comportement dynamique des sorties. Cette loi définit aussi l'instrumentation minimale nécessaire. Dans le cas binaire, les démonstrations mathématiques rigoureuses d'existence et de stabilité asymptotique constituent des garanties quant à la reproductibilité et à l'utilisation de ces loi de commande sur des colonnes différentes de celles considérées dans cette thèse. L'implantation sur deux colonnes de raffinerie montre que les calculs sont suffisamment simples pour être effectués en ligne, que la robustesse de la commande absorbe les erreurs de modélisation et de mesure.

Il convient d'être très attentif lors de la phase d'élaboration du modèle de commande. Bien que trop souvent négligée, la construction de ce modèle nous apparaît fondamental. Un bon modèle pour la commande ne veut pas dire un bon modèle pour la simulation. La précision du modèle de commande et la précision des mesures disponibles doivent être du même ordre. Si le modèle de commande ne possède pas certaines propriétés caractéristiques de la dynamique du système, comme, par exemple, des fractions molaires entre 0 et 1, il est difficile de couvrir une large plage de fonctionnement. Si le modèle de commande cherche à décrire trop de phénomènes ayant des caractéristiques opposées

et que ces derniers sont mal mesurés, la commande que l'on obtient risque de manquer de robustesse. En particulier, la prise en compte simultanée de phénomènes rapides et lents conduit à des lois de commande qui privilégient la dynamique rapide (par essence quantitativement prépondérante) et négligent les phénomènes lents qui sont souvent les plus importants qualitativement. Des mesures imprécises de l'état peuvent alors, pour ces commandes, créer des réponses où les incertitudes sont amplifiées, et où le système est éventuellement déstabilisé. A l'heure actuelle, il n'existe pas de méthode générale qui permette de définir et de construire ce que nous appelons ici un modèle de commande adapté. L'une des contributions de ce travail est de proposer une méthodologie dans le cas des systèmes à plusieurs échelles de temps.

Cette étude se poursuit encore à l'heure actuelle pour mener à bien l'implantation des algorithmes de commande en temps-réel sur des colonnes de plus en plus complexes. Les expériences décrites au chapitre 5 font état de résultats très encourageants et nous suggèrent les réflexions suivantes, d'un ordre plus général, sur les opportunités d'industrialisation de systèmes de commande. Dans notre cas, les quatre facteurs fondamentaux suivants sont rassemblés :

- existence de capteurs, d'actionneurs et de régulations de bas niveau de bonne qualité ;
- disponibilité à faibles coûts de moyens de calculs (hors ligne et en ligne) rapides ayant des capacités de mémoire suffisantes ;
- phénomènes correctement modélisés qualitativement et quantitativement ;
- théorie de la commande suffisamment développée pour éviter de recourir à des simplifications trop brutales.

Parmi ces quatre facteurs, Rosenbrock [75] mentionnait deux grands absents en 1962, les calculateurs et la théorie de la commande, et concluait que la commande non linéaire ne pouvait aboutir. Ce n'est donc pas la maturité des modèles de génie chimique dont les principes de construction n'ont pratiquement pas évolué depuis 1962, qui est concluante ici, mais en fait tous les "à cotés" (informatique temps-réel, capteurs et régulations de bas niveau, méthode numérique de simulation, modèles thermodynamiques, théorie de la commande non linéaire, ...). Dans ce travail, nous avons cherché à valoriser l'ensemble de ces facteurs en les réunissant de façon cohérente.

# Bibliography

- [1] M. Agarwal and D.E. Seborg. A multivariable nonlinear self-tuning controller. *AIChE J.*, 33:1376–1386, 1987.
- [2] M.N. Ammar. *Modélisation d'opérations unitaires et méthodes de calcul d'équilibre liquide-vapeur*. Thèse. Ecole des Mines de Paris, Centre Réacteurs et Processus, 1986.
- [3] V. Arnold. *Equations Différentielles Ordinaires*. Mir Moscou, 1974.
- [4] K.J. Astrom and T. Hagglund. . In IFAC, editor, *Proceedings of the 1983 IFAC Conference, San Francisco*, 1983.
- [5] L.E. Baker, A.C. Pierce, and K.D. Luks. Gibbs energy analysis of phase equilibria. *Soc. Pet. Eng. J.*, 22:731–, 1982.
- [6] A. Benallou, D.E. Seborg, and D.A. Mellichamp. Dynamic compartmental models for separation processes. *AIChE J.*, 32:1067–1078, 1986.
- [7] E.H. Bristol. On a new measure of interaction for multivariable process control. *IEEE Trans. Automat. Control*, 11:133–134, 1966.
- [8] G.D. Byrne and A.C. Hindmarsh. A polyalgorithm for the numerical solution of ordinary differential equations. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1(1):71–96, 1975.
- [9] C.I. Byrnes and A. Isidori. Local stabilization of minimum-phase nonlinear systems. *Systems Control Lett.*, 11:9–17, 1988.
- [10] I.L. Chien, D.C. Mellichamp, and D.E. Seborg. Multivariable self-tuning control strategy for distillation columns. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 25:595–600, 1986.
- [11] B. D'Andréa and J. Lévine. C.A.D. for nonlinear systems decoupling, perturbation rejection and feedback linearization with application to the dynamic control of a robot arm. In M. Fliess and M. Hazewinkel, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*. Reidel Pub. Co., 1986.

- [12] S.R. Dartt. A survey of process control application needs. *Chem. Eng. Progress*, 11, December 1985.
- [13] J. Descusse and C.H. Moog. Dynamic decoupling for right invertible nonlinear systems. *Systems Control Letters*, 8:345–349, 1988.
- [14] M.D. Di Benedetto, J.W. Grizzle, and C.H. Moog. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optimization*, 27:658–672, 1989.
- [15] M.F. Doherty and J.D. Perkins. On the dynamics of distillation processes—iv uniqueness and stability of the steady state in homogeneous continuous distillations. *Chem. Eng. Science*, 37:381–392, 1977.
- [16] M.F. Doherty and J.D. Perkins. Properties of liquid-vapour composition surfaces at azeotropic points. *Chem. Eng. Science*, 32:1114–1115, 1977.
- [17] M. España and I.D. Landau. Reduced order bilinear models for distillation columns. *Automatica*, 14:345–355, 1978.
- [18] A. Feng, C.D. Holland, and S.E. Gallun. Development and comparison of a generalized semi-implicit runge-kutta method with gear's method for systems of coupled differential and algebraic equations. *Computers and Chemical Engineering*, 8:51–59, 1984.
- [19] M. Fliess. A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems. *Systems Control Letters*, 8:147–151, 1987.
- [20] M. Fliess. Automatique et corps différentiels. *Forum Math.*, 1:227–238, 1989.
- [21] C. Fuentes and W.L. Luyben. Control of high-purity distillation columns. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 22:361–366, 1983.
- [22] S.E. Gallun and C.D. Holland. Gear's procedure for the simultaneous solution of differential and algebraic equations with application to unsteady state distillation problems. *Computers and Chemical Engineering*, 6:231–244, 1982.
- [23] R. Gani, C.A. Ruiz, and I.T. Cameron. A generalized dynamic model for distillation columns i : Model description and applications. *Comp. Chem. Eng.*, 10(3), 1986.
- [24] F.R. Gantmacher. *Théorie des Matrices: tome 2*. Dunod, Paris, 1966.
- [25] J.P. Gauthier, G. Bornard, S. Bacha, and M. Idir. Rejet de perturbations pour un modèle non linéaire de colonne à distiller. In *Développement et utilisation d'outils et modèles mathématiques en automatique, analyse des systèmes et traitement du signal*. CNRS Paris, 1983.

- [26] C.W. Gear. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [27] C.W. Gear. Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations. *IEEE Trans. Circ. Theory*, CT-18:89–95, 1971.
- [28] C.W. Gear, B. Leimkuhler, and G.K. Gupta. Automatic integration of euler-lagrange equations with constraints. *J. of Computational and Applied Mathematics*, 12&13:77–90, 1985.
- [29] C.W. Gear and L.R. Petzold. Ode methods for the solution of differential-algebraic systems. *SIAM J. Num. Anal.*, 21:716–728, 1984.
- [30] A. Georgiou, C. Georgakis, and W.L. Luyben. Nonlinear dynamic matrix control for high-purity distillation columns. *AIChE J.*, 34:1287–1298, 1988.
- [31] P. Glansdorff and I. Prigogine. *Structure, stabilité et fluctuations*. Masson, Paris, 1971.
- [32] D. Gritsis, C.C. Pantelides, and R.W.H. Sargent. The dynamic simulation of transient systems described by index two differential-algebraic equations. In *PSE 88 Conference*. Sydney, Australia, August 1988.
- [33] L.G. Hammarström, K.W. Waller, and K.C. Fagervik. On modeling accuracy for multivariable distillation control. *Chem. Eng. Comm.*, 19:77–90, 1982.
- [34] A.C. Hindmarsh. Lsode and lsodi, two new initial value ordinary differential equations solvers. *ACM SIGNUM Newsletters*, 15:10–11, 1980.
- [35] K. M. Hirschorn. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 24:855–865, 1979.
- [36] K. M. Hirschorn. Invertibility of nonlinear control systems. *SIAM J. Control Optimization*, 17:289–297, 1979.
- [37] C.D. Holland. History of the development of distillation computer models. *AIChE Symp. Ser.*, 80:15–38, 1983.
- [38] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, New York, 2nd edition, 1989.
- [39] A. Isidori, A. Krener, C. Gori-Giorgi, and S. Monaco. Nonlinear decoupling via feedback. *IEEE Trans. Automat. Control*, 26(2):331–345, 1981.
- [40] A. Jafarey and T.J. McAvoy. Degeneracy of decoupling in distillation columns. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 17:485–490, 1978.

- [41] A. Kasinski and J. Lévine. A fast graph-theoretic algorithm for the feedback decoupling problem of nonlinear systems. In P.A. Fuhrmann, editor, *Lect. Notes in Cont. and Inf. Sciences*, pages 550–562. Springer, 1984.
- [42] P.V. Kokotovic. Application of singular perturbation techniques to control problems. *SIAM Review*, 26(4):501–550, 1984.
- [43] C. Kravaris and C.B. Chung. Nonlinear state feedback synthesis by global input/output linearization. *AIChE J.*, 33:592–603, 1987.
- [44] A.C. Kridiotis and C. Georgakis. Independant single-input-single-output control schemes for dual composition control of binary distillation columns. In *Preprints of the IFAC Symp. on Dynamics and Control of Chemical Reactors and Distillation Columns, Bournemouth, U.K.* Institute of Measurement and Control, December 1986.
- [45] M. Kummel and H. W. Andersen. Controler adjustment for improved nominal performance and robustness – II: Robust geometric control of distillation column. *Chem. Eng. Science*, 42(8), 1987.
- [46] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapounov's Direct Method With Applications*. Academic Press, New York, 1961.
- [47] J. Lévine and P. Rouchon. Disturbances rejection and integral control of aggregated nonlinear distillation models. In *Proc. of the 7th Conf. on Analysis and Optimisation of Systems*. Springer, Lecture Notes in Control and Information Sciences, June 1986.
- [48] J. Lévine and P. Rouchon. Quality control of binary distillation columns based on nonlinear aggregated models. *Automatica*, 27:463–480, 1991.
- [49] C.-W. Li and Y.-K. Feng. Functional reproducibility of general multivariable analytic nonlinear systems. *Int. J. Control*, 45:255–268, 1987.
- [50] P. Lötstedt and L.R. Petzold. Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints i: Convergence results for backward differentiation formulas. *Mathematics of Computation*, 46:491–516, 1986.
- [51] W.L. Luyben. Distillation decoupling. *AIChE J.*, 16:198–203, 1970.
- [52] W.L. Luyben. Derivation of transfert functions for highly nonlinear distillation columns. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 26:2490–2495, 1987.
- [53] T. Magnussen, M.L. Michelsen, and A. Fredenslund. Azeotropic distillation using unifac. In *Inst. Chem. Eng. Symp. Ser., No. 56, third Int. Symp. on distillation*. ICE, Rugby, Warwickshire, England, 1979.



- [54] W. Malesinski. *Azeotropy and Other Theoretical Problems of Vapour-Liquid Equilibrium*. Interscience, New York, 1965.
- [55] R. Marino and P.V. Kokotovic. A geometric approach to nonlinear singularly perturbed control systems. *Automatica*, 24(1):31–41, 1988.
- [56] M.L. Michelsen. Application of the semi-implicit runge-kutta methods for the integration to ordinary and partial differential equations. *Chem. Eng. J.*, 14:197–, 1977.
- [57] J. Milnor. *Topology from the Differential Viewpoint*. University Press of Virginia, Charlottesville, 1978.
- [58] B.C. Moore. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. *IEEE Trans. Automat. Control*, 26(1):17–31, 1981.
- [59] M. Morari. Advances in process control theory. *Chem. Eng. Progress*, 84(10), 1988.
- [60] K.M. Moudgalya, W.L. Luyben, and C. Georgakis. A dual-pulse method for modeling processes with large time constants. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 26:2498–2501, 1987.
- [61] T. J. Mountziaris and A. Georgiou. Design of robust noninteracting controllers for high-purity binary distillation columns. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 27:1450–1460, 1988.
- [62] H. Nijmeijer and W. Respondek. Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 33:1065–1070, 1988.
- [63] C.C. Pantelides. The consistent initialization of differential-algebraic systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 9: , 1988.
- [64] C.C. Pantelides. Speedup - recent advances in process simulation. *Comput. Chem. Engng*, 12:745–755, 1988.
- [65] C.C. Pantelides, D. Gritsis, K.R. Morison, and R.W.K. Sargent. The mathematical modeling of transient systems using differential-algebraic equations. *Computers and Chemical Engineering*, 12:449–454, 1988.
- [66] L.R. Petzold. Differential-algebraic equations are not odes. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 3:367–384, 1982.
- [67] L.R. Petzold. A description of dassl: a differential-algebraic systems solver. In *IMACS Trans. on Scientific Computation, Vol. 1*. R.S. Stepleman, 1987.
- [68] L.R. Petzold. Recent developments in the numerical solution of differential/algebraic systems. In *Eighth International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*. INRIA, Le Chesnay, France, December 1987.

- [69] I. Prigogine. *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes (2nd edition)*. Wiley-Interscience, New York, 1961.
- [70] I. Prigogine and R. Defay. *Chemical Thermodynamics*. Longmans, London, 1967.
- [71] G.J. Prokopakis and W.D. Seider. Dynamic simulation of azeotropic distillation towers. *AIChE J.*, 29:1017–1028, 1983.
- [72] Prosys Technology Ltd, Sheraton House, Castle Park, Cambridge CB3 0AX, U.K. *Speedup User Manual: Release 5.0*, March 1988.
- [73] W. Respondek and H. Nijmeijer. On local right-invertibility of nonlinear control system. *Control Theory and Advanced Tech.*, 4:325–348, 1988.
- [74] W.C. Rheinboldt. Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds. *Mathematics of Computation*, 43:473–482, 1984.
- [75] H. H. Rosenbrock. The control of distillation columns. *Trans. Instn Chem. Engrs*, 40:35–53, 1962.
- [76] H. H. Rosenbrock. A liapounov function with applications to some nonlinear physical systems. *Automatica*, 1:31–53, 1962.
- [77] H.H. Rosenbrock. *Computer-Aided Control System Design*. Academic Press, 1974.
- [78] C.J. Ryskamp. New strategy improves dual composition column control. *Hydrocarbon Processing*, 59:51–59, 1980.
- [79] F.G. Shinskey. *Distillation Control*. McGraw-Hill, 1984.
- [80] L. Silverman. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 14:270–276, 1969.
- [81] R.F. Sincovec, A.M. Erisman, E.L. Yip, and M.A. Epton. Analysis of descriptor systems using numerical algorithms. *IEEE Trans. Automat. Control*, 26:139–147, 1981.
- [82] S.N. Singh. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 26:595–598, 1981.
- [83] S. Skogestad and M. Morari. Control configuration selection for distillation columns. *AIChE J.*, 33:1620–1635, 1987.
- [84] S. Skogestad and M. Morari. Implications of large rga elements on control performance. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 26:2323–2330, 1987.

- [85] S. Skogestad and M. Morari. Lv-control of a high-purity distillation column. *Chem. Eng. Science*, 43(1):33–48, 1988.
- [86] S. Skogestad and M. Morari. Robust control of ill-conditioned plants: High-purity distillation. *IEEE Trans. Automat. Control*, 33:1092–1105, 1988.
- [87] S. Skogestad and M. Morari. Some new properties of the structured singular value. *IEEE Trans. Automat. Control*, 33(12):1151–1154, 1988.
- [88] G. Soave. Equilibrium constants from a modified Redlich-Kwong equation of state. *Chem. Eng. Science*, 27:1197–1203, 1972.
- [89] G.T. Stanley and T.J. McAvoy. Dynamic energy conservation aspects of distillation control. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 24:439–443, 1985.
- [90] G. Stephanopoulos. *Chemical Process Control: an Introduction to Theory and Practice*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984.
- [91] T. Takamatsu, I. Hashimoto, and Y. Nakai. A geometric approach to multivariable system design of a distillation column. *Automatica*, 15:387–402, 1979.
- [92] A. Tikhonov, A. Vasil'eva, and A. Sveshnikov. *Differential Equations*. Springer, New York, 1980.
- [93] M. Van Winkle. *Distillation*. McGraw-Hill, 1967.
- [94] K.V. Waller. Decoupling in distillation. *AIChE J.*, 20:592–594, 1974.
- [95] K.V. Waller, D.H. Finnerman, P.M. Sandelin, K.E. Häggblom, and S.E. Gustafsson. An experimental comparison of four control structures for two-point control of distillation. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 27:624–630, 1988.
- [96] K.V. Waller, K.E. Wikman, and S.E. Gustafsson. Decoupler design and control system tuning by ina for distillation composition control. *Chem. Eng. Comm.*, 23:149–174, 1985.
- [97] W.M. Wonham. *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*. Springer, 1974.
- [98] C.C. Yu and W.L. Luyben. Use of multiple temperatures for the control of multicomponent distillation columns. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 23:590–597, 1984.



# Annexes



# Appendix A

## Inversion et commande

Nous présentons tout d'abord un algorithme d'inversion pour un système carré avec des perturbations. Cet algorithme repose sur un principe d'élimination utilisé pour la première fois par Silverman [80] sur les systèmes linéaires et repris par Hirschorn [36, 35], Singh [82] et Descusse et Moog [13], entre autres, sur les systèmes non linéaires en état et affines en commande. À notre connaissance, Li et Feng [49] sont les seuls, à ce jour, à avoir repris cet algorithme pour traiter le cas général où la dépendance par rapport aux commandes n'est plus supposée affine. C'est pourquoi nous nous sommes directement inspirés de leur travaux pour élaborer cette annexe.

La prise en compte, au niveau de l'algorithme d'inversion, des perturbations permet de définir aisément une condition suffisante d'existence de la loi de commande par retour d'état qui rejette les perturbations. Ces conditions suffisantes sont constructives et constituent une extension des résultats issus des travaux d'Isidori et al. [39, 38] sur le rejet des perturbations et le découplage. Notre présentation est sensiblement différente et utilise peu d'outils mathématiques. Elle permet d'aborder directement les problèmes de stabilité en boucle fermée et la dynamique des zéros introduite par Byrnes et Isidori [9].

### A.1 L'algorithme d'inversion

#### A.1.1 L'inversion de systèmes dynamiques

Considérons le système carré suivant

$$(S) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u, w) \\ y = h(x, u, w) \end{cases}$$

(l'état  $x \in \mathbb{R}^n$ , les commandes  $u \in \mathbb{R}^m$ , les perturbations  $w \in \mathbb{R}^M$ , les sorties  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $f$  est analytique à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $h$  analytique à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ ). (S) correspond au

système étudié par Li et Feng [49] avec en plus les perturbations  $w$ . L'inversion du système dynamique ( $S$ ) se pose alors en ces termes : comment peut-on déterminer la loi horaire des commandes  $u(t)$  si l'on connaît les lois horaires des sorties  $y(t)$  et des perturbations  $w(t)$  ?

Pour les systèmes linéaires, les travaux de Silverman [80] établissent une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de la loi de commande  $u(t)$ . Cette condition repose, en fait, sur un algorithme d'inversion : elle est ainsi constructive. Le principe d'élimination qui sous-tend cet algorithme a été repris par Hirschorn [36, 35], Singh [82] et Descusse et Moog [13] dans le cas où  $f$  et  $h$  sont des fonctions non linéaires de  $x$  et affines de  $u$ . Li et Feng [49] ont poussé la généralisation au cas où la dépendance en  $u$  de  $f$  et  $g$  est quelconque.

Dans la présentation de l'algorithme, nous avons volontairement éliminé les restrictions liées au fait que les rangs des différentes fonctions analytiques ne sont pas nécessairement constants sur tout leur domaine de définition mais uniquement sur un ouvert dense. De plus nous supposons implicitement à chaque étape que le théorème du rang constant s'applique, c'est à dire que les équations algébriques considérées sont satisfaites au moins en un point. Enfin, nous nous intéressons au cas générique. Les problèmes de singularité sont des problèmes difficiles qui relèvent de considérations topologiques et que nous ne voulons pas aborder. Nous supposerons donc à chaque étape de l'algorithme que les fonctions manipulées sont de rang constant et qu'elles s'annulent au moins en un point.

Pour des raisons de simplicité, nous présentons tout d'abord l'algorithme d'inversion dans le cas particulier où les sorties et les perturbations sont nulles. Ensuite, nous abordons le cas général qui ne diffère du cas particulier précédent que par la lourdeur des formules.

### A.1.2 Le cas où $y = 0$ et $w = 0$

Dans le chapitre 2, nous rappelons sur des exemples le principe d'élimination sur lequel repose l'algorithme d'inversion. Pour un système général, cela conduit aux manipulations formelles suivantes.

#### L'algorithme

On note  $h_0(x, u)$  la fonction analytique  $h(x, u, 0)$  du système ( $S$ ). On définit par récurrence les fonctions analytiques  $h_1(x, u)$ ,  $h_2(x, u)$ ,  $\dots$ ,  $h_k(x, u)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  comme suit.

Soit  $k \geq 0$ . Supposons définie  $h_k$ , fonction analytique de  $x$  et  $u$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $\mu_k$  le rang de  $h_k$  par rapport à  $u$ , i.e. le rang de la matrice

$$\frac{\partial h_k}{\partial u}.$$

Quitte à permuter les lignes de  $h_k$ , on peut supposer que ses  $\mu_k$  premières lignes  $\bar{h}_k =$



$(h_k^1, \dots, h_k^{\mu_k})$  sont telles que le rang de

$$\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial u}$$

est maximum et égal à  $\mu_k$ . Ainsi les  $m - \mu_k$  dernières lignes de  $h_k$ ,  $\tilde{h}_k = (h_k^{\mu_k+1}, \dots, h_k^m)$  ne dépendent de  $u$  que par l'intermédiaire de  $\bar{h}_k$  : il existe donc une fonction analytique  $\Phi_k(x, \cdot)$  telle que

$$\tilde{h}_k(x, u) = \Phi_k(x, \bar{h}_k(x, u)).$$

On définit  $h_{k+1}$  fonction analytique de  $x$  et  $u$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  par<sup>1</sup>

$$h_{k+1}(x, u) = \begin{pmatrix} \bar{h}_k(x, u) \\ \frac{d}{dt}[\Phi_k(x, 0)] = \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right)_{(x,0)} f(x, u, 0) \end{pmatrix}.$$

A l'étape  $k + 1$ , les  $\mu_k$  premières composantes de  $\bar{h}_{k+1}$  sont choisies de façon à former exactement les  $\mu_k$  composantes du vecteur  $\bar{h}_k$ .

### Résultats issus de l'algorithme

La suite  $\mu_k$  est une suite croissante d'entiers inférieurs à  $m$ . Donc, elle stationne à partir d'un certain rang. Li et Feng introduisent alors la définition suivante<sup>2</sup>.

**Définition 3.** *Si la suite  $\mu_k$  stationne à  $m$  alors, l'ordre relatif  $\alpha$  du système  $(S)$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $\mu_k = m$ . Si la suite  $\mu_k$  stationne à une valeur strictement inférieure à  $m$  alors  $\alpha = +\infty$ .*

Li et Feng démontrent alors le résultat suivant<sup>3</sup> :

**Lemme 6.** *Si l'ordre relatif  $\alpha$  du système  $(S)$  est fini, alors  $\alpha \leq n$  et le rang du jacobien*

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Phi_0(x, 0) \\ \vdots \\ \Phi_{\alpha-1}(x, 0) \end{pmatrix}$$

*est égal au nombre de ses lignes :  $\sum_{k=0}^{\alpha} (m - \mu_k)$ .*

<sup>1</sup> En fait,  $\left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right)_{(x,0)} f(x, u, 0)$  est égal à  $\frac{d}{dt} \tilde{h}_k(x, u, 0)$ , si  $\bar{h}_k$  est nul à chaque instant. Ce qui est vérifié car  $\bar{h}_k$  est une partie du vecteur identiquement nul  $(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$ .

<sup>2</sup>[49], définition 2. Cette définition étend celle introduite par Hirschorn en 1979 [36] pour les systèmes mono-sortie et affine en commande.

<sup>3</sup>[49], théorème 1 et lemme 4.

**Remarque 7.** *La valeur à laquelle la suite croissante  $\mu_k$  stationne n'est autre que le rang de sortie du système (S) [19, 14]. Si ce rang est égal à  $m$ , le système est inversible : l'ordre relatif de (S) est alors fini et le système carré  $h_\alpha(x, u) = 0$  définit localement une seule loi de commande  $u$ , fonction de  $x$ , qui annule les sorties. Si ce rang est strictement inférieur à  $m$ , le système n'est pas inversible : l'ordre relatif de (S) est alors infini et le problème d'inversion n'a pas de solution en général.*

Il est intuitif, mais pas évident à démontrer sans faire appel à des outils mathématiques plus généraux, que la suite des entiers  $\mu_k$  est en fait indépendante du choix des coordonnées sur  $x$  et du choix des commandes  $u$  : si  $x = \Xi(\xi)$  et  $u = V(\xi, v)$  sont des changements de variables sur  $x$  ( $\Xi$  est un difféomorphisme) et sur  $u$  ( $V(\xi, \cdot)$  est un difféomorphisme), alors l'algorithme précédent donne la même suite  $\mu_k$  pour le système (S) écrit avec ces nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \left[ \frac{\partial \Xi}{\partial x}(\xi) \right]^{-1} f(\Xi(\xi), V(\xi, v), 0) \\ 0 = h(\Xi(\xi), V(\xi, v), 0). \end{cases}$$

Dans le cas où la dépendance par rapport aux commandes est affine, l'algorithme d'inversion de Li et Feng n'est autre que l'algorithme d'inversion de Singh [82]. Dans ce cas, di Benedetto et al. [14] ont montré que la suite des rangs  $\mu_k$  est une suite d'invariants structurels, i.e. indépendante du choix des coordonnées et qu'il est possible d'obtenir ces invariants avec d'autres algorithmes. Lorsque la dépendance par rapport aux commandes n'est plus affine, le résultat reste vrai : il suffit de rajouter une extension dynamique sous la forme  $\dot{u} = v$ , de considérer un état étendu  $(x, u)$  et les nouvelles commandes  $v$  pour lesquelles le système devient affine en  $v$ .

### A.1.3 L'algorithme dans le cas général

Les résultats qui précèdent sont directement valables dans le cas général où  $y$  et  $w$  dépendent du temps, bien que les calculs soient nettement plus lourds. Considérons le système précédent (S) et supposons que les lois horaires de  $y$  et  $w$  sont connues et suffisamment dérivables par rapport au temps. Les commandes  $u$  sont déterminées comme suit.

#### Etape $k = 0$

Notons  $h_0(x, u, w)$  la fonction analytique  $h(x, u, w)$  du système (S). Par définition,  $y = h_0(x, u, w)$ . Soit  $\mu_0$  le rang de

$$\frac{\partial h_0}{\partial u}.$$

Quitte à permuter les lignes de  $h_0$  et donc les composantes de  $y$ , on peut supposer que les  $\mu_0$  premières lignes  $\bar{h}_0 = \kappa_0 = (h_0^1, \dots, h_0^{\mu_0})$  sont telles que le rang de

$$\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial u}$$

est maximum et égal à  $\mu_0$ . Notons  $\tilde{h}_0 = (h_0^{\mu_0+1}, \dots, h_0^m)$  les  $m - \mu_0$  dernières lignes de  $h_0$ . Ainsi  $\tilde{h}_0$  ne dépend de  $u$  que par l'intermédiaire de  $\bar{h}_0$ . Il existe donc une fonction analytique  $\Phi_0(x, w, \cdot)$  telle que

$$\tilde{h}_0(x, u, w) = \Phi_0(x, w, \bar{h}_0(x, u, w)).$$

Il est clair que  $y = h_0(x, u, w)$  est algébriquement équivalent à

$$\begin{cases} y_0 = \bar{h}_0(x, u, w) = \kappa_0(x, u, w) \\ \tilde{y}_1 = \Phi_0(x, w, y_0) \end{cases}$$

où  $y = (y_0, \tilde{y}_1)$  avec  $y_0 = \bar{y}_0$ , les  $\mu_0$  premières composantes de  $y$ , et  $\tilde{y}_1$ , les  $m - \mu_0$  dernières composantes de  $y$ .

### Etape $k \geq 0$

Supposons définies

- la suite croissante d'entiers  $\mu_0, \dots, \mu_k$  ;
- une partition des composantes de  $y$  en deux groupes,  $y = (\bar{y}_k, \tilde{y}_{k+1})$  ;  $\bar{y}_k = (y_0, \dots, y_k)$  est de dimension  $\mu_k$ , chaque  $y_i$  étant de dimension  $\mu_i - \mu_{i-1}$ <sup>4</sup> ;  $\tilde{y}_k$  est de dimension  $m - \mu_k$  ;
- la fonction analytique  $h_k$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , dépendant de

$$(x, u, w, \dots, w^{(k)}, y, \dots, y^{(k)}),$$

de rang  $\mu_k$  par rapport à  $u$  et dont les composantes se divisent en deux :  $h_k = (\bar{h}_k, \tilde{h}_k)$  ;  $\bar{h}_k = (\kappa_0, \dots, \kappa_k)$  est de dimension  $\mu_k$ , chaque  $\kappa_i$  étant de dimension  $\mu_i - \mu_{i-1}$  ; le rang de  $\bar{h}_k$  par rapport à  $u$  est égal à  $\mu_k$  ;  $\tilde{h}_k$  est de dimension  $m - \mu_k$  ;  $h_k$  vérifie

$$\begin{cases} y_0 = \kappa_0(x, u, w) \\ y_1^{(1)} = \kappa_1(x, u, w, w^{(1)}, y_0, y_0^{(1)}) \\ \vdots \\ y_k^{(k)} = \kappa_k \left( x, u, w, \dots, w^{(k)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k)} \right)_{i=0, \dots, k-1} \right) \\ \tilde{y}_{k+1}^{(k)} = \Phi_k \left( x, w, \dots, w^{(k)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k)} \right)_{i=0, \dots, k-1}, (y_0, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(k)}) \right). \end{cases}$$

<sup>4</sup>Avec la convention  $\mu_{-1} = 0$ .

On définit alors  $h_{k+1}$  en remplaçant la dernière équation du système précédent par sa dérivée rapport au temps :

$$\tilde{y}_{k+1}^{(k+1)} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} f(x, u, w) + \Upsilon_k \left( x, w, \dots, w^{(k+1)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k+1)} \right)_{i=0, \dots, k} \right)$$

avec

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} f + \Upsilon_k = \frac{d}{dt} \left[ \Phi_k \left( x, w, \dots, w^{(k)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k)} \right)_{i=0, \dots, k-1}, (y_0, y_1^{(1)}, \dots, y_k^{(k)}) \right) \right].$$

On définit alors  $h_{k+1}$  par

$$h_{k+1} = (\kappa_0, \dots, \kappa_k, \frac{d\Phi_k}{dt} f + \Upsilon_k).$$

$h_{k+1}$  est une fonction analytique de  $(x, u, w, \dots, w^{(k+1)}, y, \dots, y^{(k+1)})$ . Son rang par rapport à  $u$  est par définition  $\mu_{k+1}$ .

Par construction de  $h_{k+1}$

- $\mu_{k+1} \geq \mu_k$  ;
- on peut poser, quitte à permuter des lignes, que

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} f + \Upsilon_k = (\kappa_{k+1}, \tilde{h}_{k+1})$$

où  $\kappa_{k+1}$  est une fonction analytique de

$$(x, u, w, \dots, w^{(k+1)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k+1)} \right)_{i=0, \dots, k})$$

à valeurs dans  $\mathbb{R}^{\mu_{k+1} - \mu_k}$ , où  $\tilde{h}_{k+1}$  est aussi une fonction analytique des mêmes variables mais à valeurs dans  $\mathbb{R}^{m - \mu_{k+1}}$ , et où le rang de  $\bar{h}_{k+1} = (\bar{h}_k, \kappa_{k+1})$  par rapport à  $u$  est égal à  $\mu_{k+1}$  ;

- $\tilde{y}_{k+1}$  se décompose comme  $\tilde{h}_{k+1}$  en deux parties,  $\tilde{y}_{k+1} = (y_{k+1}, \tilde{y}_{k+2})$  avec  $y_{k+1}$  de dimension  $\mu_{k+1} - \mu_k$ ,  $\tilde{y}_{k+2}$  de dimension  $m - \mu_{k+1}$  ; on pose  $y = (\bar{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2})$  avec  $\bar{y}_{k+1} = (\bar{y}_k, y_{k+1})$  de dimension  $\mu_{k+1}$ .

Comme  $\mu_{k+1}$  est le rang de  $h_k = (\bar{h}_{k+1}, \tilde{h}_{k+1})$  et de  $\bar{h}_{k+1}$  par rapport à  $u$ , il est clair que  $\tilde{h}_{k+1}$  ne dépend de  $u$  que par l'intermédiaire de  $\bar{h}_{k+1}$  ; autrement dit, il existe une fonction

$$\Phi_{k+1} \left[ x, w, \dots, w^{(k+1)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k+1)} \right)_{i=0, \dots, k}, \cdot \right]$$

telle que

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{k+1} \left( x, u, w, \dots, w^{(k+1)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k+1)} \right)_{i=0, \dots, k} \right) = \\ \Phi_{k+1} \left[ x, w, \dots, w^{(k+1)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k+1)} \right)_{i=0, \dots, k}, \right. \\ \left. \bar{h}_{k+1} \left( x, u, w, \dots, w^{(k+1)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k+1)} \right)_{i=0, \dots, k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \kappa_0(x, u, w) \\ y_1^{(1)} = \kappa_1(x, u, w, w^{(1)}, y_0, y_0^{(1)}) \\ \vdots \\ y_{k+1}^{(k+1)} = \kappa_{k+1} \left( x, u, w, \dots, w^{(k+1)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k+1)} \right)_{i=0, \dots, k} \right) \\ \tilde{y}_{k+2}^{(k+1)} = \Phi_{k+1} \left( x, w, \dots, w^{(k+1)}, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(k+1)} \right)_{i=0, \dots, k}, (y_0, y_1^{(1)}, \dots, y_{k+1}^{(k+1)}) \right). \end{array} \right.$$

Ce qui permet de passer à l'étape suivante  $k + 1$ .

## A.2 Le rejet de perturbations

### A.2.1 Rappels préliminaires

Soit le système  $(S)$ . Le problème du rejet, sur les sorties  $y$ , des perturbations inconnues  $w$  consiste à trouver une commande par retour d'état,  $u = K(x)$ , telle que, sur le système bouclé

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, K(x), w) \\ y = h(x, K(x), w), \end{cases}$$

$y$  devienne indépendant de  $w$ . Il est clair qu'en général ce problème n'a pas de solution. En effet, si, par exemple,  $h$  dépend effectivement de  $w$ , un tel retour d'état  $u = K(x)$  n'existe pas.

Ainsi, ce problème n'admet de solution que si le système vérifie certaines hypothèses restrictives portant sur sa structure. Plusieurs travaux traitent explicitement de cette question [39, 38, 11]. Nous présentons ici une extension des conditions suffisantes décrites par Isidori [38].

### A.2.2 Une condition suffisante d'existence

**Théorème 9.** *Soit le système (S). Supposons que son ordre relatif  $\alpha$  soit fini. L'algorithme d'inversion fournit alors la suite croissante d'entier  $\mu_0, \dots, \mu_\alpha$ , une partition des sorties en  $\alpha + 1$  groupes de composantes  $y = (y_0, \dots, y_\alpha)$  et  $\alpha + 1$  fonctions analytiques  $(\kappa_0, \dots, \kappa_\alpha)$ .*

*Si les fonctions  $\kappa_0, \dots, \kappa_\alpha$  ne dépendent pas de  $w$  ni de ses dérivées successives par rapport au temps, alors, le rejet des perturbations est possible. Génériquement, il est possible de choisir  $u = K(x, v, \dot{v}, \dots, v^{(\alpha)})$ , avec  $K(x, \dots, \dot{v}, \dots, v^{(\alpha)})$  inversible et  $v \in \mathbb{R}^m$  les nouvelles commandes, telles que la dynamique en boucle fermée des sorties vérifie*

$$\begin{cases} y_0 &= v_0 \\ y_1^{(1)} &= A_1(y_1) + v_1 \\ &\vdots \\ y_\alpha^{(\alpha)} &= A_\alpha(y_\alpha, \dots, y_\alpha^{(\alpha-1)}) + v_\alpha \end{cases}$$

où

- les fonctions  $(A_i)_{i=0, \dots, \alpha}$  sont des fonctions analytiques arbitraires ;
- les nouvelles commandes  $v \in \mathbb{R}^m$  se décomposent en  $\alpha + 1$  blocs de composantes  $(v_0, \dots, v_\alpha)$  de tailles respectives  $(\mu_0, \mu_1 - \mu_0, \dots, \mu_\alpha - \mu_{\alpha-1})$ .

La loi de commande est a priori une fonction de

$$x, (v_0, \dots, v_0^{(\alpha)}), (v_1, \dots, v_1^{(\alpha-1)}), \dots, (v_{\alpha-1}, v_{\alpha-1}^{(1)}), \text{ et } v_\alpha.$$

**Preuve** Ce résultat est une conséquence directe de l'algorithme d'inversion exposé ci-dessus. La difficulté réside uniquement dans la lourdeur des calculs.  $u$  est obtenu à partir du système résultant de la dernière étape  $k = \alpha - 1$  de l'algorithme d'inversion et où l'on a remplacé les  $y_i^j$  par  $A_i + v_i$  ( $i = 0, \dots, \alpha$ ) :

$$\begin{cases} v_0 &= \kappa_0(x, u) \\ A_1(y_1) + v_1 &= \kappa_1(x, u, y_0, y_0^{(1)}) \\ &\vdots \\ A_\alpha(y_\alpha, \dots, y_\alpha^{(\alpha-1)}) + v_\alpha &= \kappa_\alpha \left( x, u, \left( y_i^{(i)}, \dots, y_i^{(\alpha)} \right)_{i=0, \dots, \alpha-1} \right) \end{cases}$$

Cependant, il convient d'exprimer les dérivées jusqu'à l'ordre  $\alpha$  de  $y_0, \dots, y_\alpha$  en fonction de  $x$  et des dérivées jusqu'à l'ordre  $\alpha$  des nouvelles commandes  $v$ .

Il est évident que  $y_0^{(k)} = v_0^k$  pour  $k = 0, \dots, \alpha$ . Pour  $y_1^k$ , nous distinguons deux cas :

- si  $0 = k < 1$ , alors par construction  $y_1^{(0)}$  est donné par la fonction  $\Phi_0(x, y_0)$  égale à  $\tilde{y}_1^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_\alpha^{(0)})$  et obtenue à l'étape 0 de l'inversion ;

- si  $k \geq 1$  il convient de dériver  $k - 1$  fois  $y_1^{(1)} = A_1(y_1^{(0)}) + v_1$  pour obtenir  $y_1^{(k)}$  explicitement en fonction de  $y_1^{(0)}$  et  $(v_1, \dots, v_1^{(k-1)})$ ; comme  $y_1^{(0)}$  est une fonction de  $x$  et  $y_0$ , on obtient en fin de compte  $y_1^{(k)}$  en fonction de  $x$ ,  $v_0$ , et  $(v_1, \dots, v_1^{(k-1)})$ .

De proche en proche, on procède de même pour  $y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, \dots, y_\alpha^k$  ( $k = 0, \dots, \alpha$ ).

Il apparaît alors que  $v_0$  doit être dérivé au plus  $\alpha$  fois,  $v_1$  au plus  $\alpha - 1$  fois,  $\dots$ ,  $v_{\alpha-1}$  au plus 1 fois et  $v_\alpha$  au plus 0 fois. Ce qui explique pourquoi  $u$  dépend de  $x$ , et a priori uniquement de  $(v_i, \dots, v_i^{(\alpha-i)})_{i=0, \dots, \alpha}$ .

**Remarque 8.** *En l'absence de perturbations  $w$ , le théorème précédent s'applique. Il permet donc, si les fonctions  $A_i$  sont choisies linéaires, de linéariser et de découpler les relations entre les nouvelles commandes  $v = (v_0, \dots, v_\alpha)$  et les sorties  $y = (y_0, \dots, y_\alpha)$ . D'autre part, nous obtenons un découplage par retour statique de l'état, qui correspond à des intégrales premières, secondes, ... des lois de découplage par retour dynamique de l'état [62, 13], sous certaines conditions restrictives relatives aux dynamiques en boucle fermée que l'on impose aux sorties par ce type de bouclage dynamique.*

**Remarque 9.** *En dehors du fait que les commandes  $u$  interviennent non linéairement dans (S), les conditions du théorème précédent constituent une extension réelle de celles énoncées par Isidori [38] et reformulées par d'Andréa et Lévine [11]. En effet, ce résultat permet de traiter les cas où la matrice de découplage est structurellement singulière bien que le système soit inversible. Prenons l'exemple suivant ( $n = 4$ ,  $m = 2$ ,  $M = 1$ ) :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_1x_2 + u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1x_2 + x_3 + u_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3 + x_4 + u_2 \\ \frac{dx_4}{dt} = x_3x_4 + u_2 + w \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2. \end{array} \right.$$

Il est clair, en dérivant une fois les sorties, que la matrice de découplage,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

est structurellement singulière et donc la condition suffisante de rejet de perturbations énoncée dans [11] n'est pas satisfaite. Par contre, ce système est inversible et une loi de commande qui stabilise les sorties en 0 et les rend indépendantes de  $w$  est donnée en

appliquant directement l'algorithme d'inversion. Comme  $\mu_0 = 0$ , il faut dériver au moins une fois les sorties :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= x_1x_2 + u_1 \\ \dot{y}_2 &= x_1x_2 + x_3 + u_1 \\ &= \dot{y}_1 + x_3. \end{cases}$$

Ainsi  $\mu_1 = 1$ . Comme  $\mu_1 < 2$ , on continue en dérivant  $\dot{y}_2$  :

$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + x_3x_4 + u_2.$$

$\mu_2 = 2$  : le système est inversible. Comme  $w$  n'intervient pas, le rejet des perturbations  $w$  est possible. Nous pouvons, par exemple, choisir des dynamiques linéaires et stables d'ordre 1 pour  $y_1$  et d'ordre 2 pour  $y_2$  :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_2 - y_2. \end{cases}$$

La loi de retour d'état est alors donnée par

$$\begin{cases} u_1 &= \dot{y}_1 - x_1x_2 \\ &= -x_1 - x_1x_2 \\ u_2 &= \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 - x_3x_4 \\ &= -2x_1 - x_2 + x_3 - x_3x_4. \end{cases}$$

### A.2.3 Stabilité en boucle fermée et dynamique des zéros

Dans la section précédente, nous avons vu que la loi de commande qui rejette les perturbations est obtenue par des manipulations algébriques sur le système  $(S)$ . Ces manipulations jouent sur la structure du système pour la modifier. Elles ne permettent pas de jouer que partiellement sur le comportement asymptotique du système bouclé. Pour la robustesse, il est important de s'assurer que toutes les parties du système en boucle fermée sont stables et même asymptotiquement stables. Il n'est pas du tout exclu qu'un système stable en boucle ouverte devienne instable s'il est commandé ainsi.

Récemment Byrnes et Isidori [9, 38] ont montré que de telles méthodes de commande ne permettent d'assurer la stabilité que d'une partie du système. Cette partie correspond à la dynamique des sorties dont la stabilité ne dépend que des fonctions arbitraires  $A_i$  du théorème précédent. L'autre partie, dont la stabilité est indépendante des  $A_i$ , est appelée dynamique des zéros. Elle est obtenue à partir du système  $(S)$  en fixant les sorties  $y$  et les perturbations  $w$  constantes et égales à zéro :

$$(S_0) \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(x, u, 0) \\ 0 &= h(x, u, 0) \end{cases}$$



En partant de l'algorithme d'inversion, ce système mixte d'équations différentielles ordinaires et d'équations algébriques peut être interprété (cf. chapitre 2) comme un système différentiel ordinaire sur une sous-variété de l'espace d'état, système appelé dynamique des zéros.

Byrnes et Isidori [9, 38] ont montré que, si cette dynamique des zéros est exponentiellement stable<sup>5</sup>, alors, en choisissant les  $A_i$  de façon à ce que les dynamiques des sorties en boucle fermée soient également exponentiellement stables en 0, le système bouclé complet est exponentiellement stable. Inversement, si la dynamique des zéros n'est pas asymptotiquement stable, le système bouclé ne l'est pas en général, quelles que soient les fonctions  $A_i$ .

### A.3 Exemple d'un réacteur chimique

L'objectif est de montrer, sur un exemple traité dans la littérature par des techniques de commande rigoureusement identiques mais présentées de façon nettement plus formalisée avec des dérivées de Lie, que le calcul de la loi de commande peut être élémentaire.

Kravaris et Chung [43] ont appliqué des techniques de linéarisation entrée-sortie sur un réacteur chimique pour résoudre un problème de suivi de trajectoire. Trois espèces chimiques  $A$ ,  $B$  et  $C$  interviennent dans deux réactions chimiques successives :



Le but de la commande est de suivre une loi horaire de température,  $T^c(t)$ , déterminée à l'avance. Le modèle dynamique du réacteur est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_A}{dt} = -k_1(T)C_A^2 \\ \frac{dC_B}{dt} = k_1(T)C_A^2 - k_2(T)C_B \\ \frac{dT}{dt} = \gamma_1 k_1(T)C_A^2 + \gamma_2 k_2(T)C_B + (a_1 + a_2 T) + (b_1 + b_2 T)u \\ y = T \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

avec  $C_A$  et  $C_B$  les concentrations de  $A$  et  $B$ ,  $T$  la température,  $u$  la variable de commande (apport ou extraction de chaleur),  $k_1(T)$  et  $k_2(T)$  des fonctions positives et analytiques de  $T$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  des paramètres constants.

---

<sup>5</sup>Par exponentiellement stable, nous voulons dire que le linéarisé tangent au point stationnaire est asymptotiquement stable.

### A.3.1 Calcul de la loi de commande

Puisque la commande  $u$  n'intervient pas directement dans la sortie, il faut dériver cette dernière par rapport au temps. Nous obtenons

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dT}{dt} = \gamma_1 k_1(T) C_A^2 + \gamma_2 k_2(T) C_B + (a_1 + a_2 T) + (b_1 + b_2 T) u. \quad (\text{A.2})$$

Génériquement  $b_1 + b_2 T \neq 0$ . Nous pouvons donc choisir la commande  $u$  pour que la température vérifie l'équation du premier ordre

$$\beta_1 \frac{dT}{dt} = -\beta_0 T + v \quad (\text{A.3})$$

( $\beta_1$  et  $\beta_0$  sont des constantes et  $v$  est la nouvelle commande). La loi de commande qui linéarise partiellement le système est alors donnée par

$$\beta_1 [\gamma_1 k_1(T) C_A^2 + \gamma_2 k_2(T) C_B + (a_1 + a_2 T) + (b_1 + b_2 T) u] = -\beta_0 T + v. \quad (\text{A.4})$$

Elle dépend de l'état du système  $(C_A, C_B, T)$  et de la nouvelle commande  $v$ . Le choix de  $v$  est alors conditionné par l'objectif de la commande, ici le suivi d'une loi horaire déterminée  $T^c(t)$ . Nous voyons donc que le retour d'état défini par (A.4) permet de transformer le problème non linéaire de départ en un problème linéaire beaucoup plus simple à résoudre : par exemple, il suffit de prendre  $v(t) = \beta_0 T^c(t)$  avec  $\beta_0/\beta_1 > 0$  pour avoir un suivi asymptotique de la trajectoire.

### A.3.2 Stabilité en boucle fermée

Les équations en boucle fermée

$$\begin{cases} \frac{dC_A}{dt} = -k_1(T) C_A^2 \\ \frac{dC_B}{dt} = k_1(T) C_A^2 - k_2(T) C_B \\ \beta_1 \frac{dT}{dt} = -\beta_0 T + v, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

se divisent en deux parties,

$$\begin{cases} \frac{dC_A}{dt} = -k_1(T) C_A^2 \\ \frac{dC_B}{dt} = k_1(T) C_A^2 - k_2(T) C_B \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

et

$$\beta_1 \frac{dT}{dt} = -\beta_0 T + v. \quad (\text{A.7})$$

La stabilité de (A.7) est assurée si  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont de même signe. Comme les fonctions  $k_1$  et  $k_2$  sont positives, (A.6) est asymptotiquement stable si  $T$  converge. La dynamique des zéros est (A.6); elle est indépendante de  $\beta_0$  et  $\beta_1$ . (A.7) est la dynamique imposée par la loi de commande sur la sortie; elle ne dépend que de  $\beta_0$  et  $\beta_1$ . Notons enfin que si l'une des deux fonctions  $k_1$  ou  $k_2$  est strictement négative, la dynamique des zéros est instable et le système bouclé (A.5) également, quels que soient les paramètres de la commande  $\beta_0$  et  $\beta_1$ .



# Appendix B

## La commande géométrique de colonnes

### B.1 La commande linéaire géométrique

En 1979, Takamatsu et al [91] ont appliqué sur le modèle linéarisé tangent du modèle de connaissance (L,V) (système (3.1) du chapitre 3) les méthodes géométriques développées par Wonham [97]. Nous rappelons ici, la loi de commande qu'ils ont obtenue ainsi que ses paramètres de réglage.

Supposons que, autour d'un régime stationnaire, le système linéarisé tangent au système (3.1) s'écrive

$$\begin{cases} \frac{d\delta x}{dt} = A \delta x + B \delta U + C \delta W \\ \delta y_1 = \delta x_1 \\ \delta y_2 = \delta x_n \end{cases}$$

avec

- $(\delta x_j)_{1 \leq j \leq n}$  les déviations de l'état  $x$  par rapport à l'état stationnaire,
- $\delta U = (\delta L, \delta V)$  les déviations des commandes,
- $\delta W = (\delta F, \delta z_F)$  les déviations des perturbations,
- $\delta y_1$  et  $\delta y_2$  les déviations des sorties,
- $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ,
- $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, j=1,2}$ ,
- $C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, j=1,2}$ .

Alors la loi de commande qui rejette les perturbations de composition de la charge  $\delta z_F$  est donnée en inversant le système linéaire<sup>1</sup>.

$$\begin{aligned} a_{1,2}b_{2,1}\delta L + a_{1,2}b_{2,2}\delta V &= \ddot{\delta y}_1 - (a_{1,1}^2 + a_{1,2}a_{2,1})\delta x_1 - a_{1,2}(a_{1,1} + a_{2,2})\delta x_2 - a_{1,2}a_{2,3}\delta x_3 \\ b_{n,1}\delta L + b_{n,2}\delta V &= \dot{\delta y}_2 - a_{n,n-1}\delta x_{n-1} - a_{n,n}\delta x_n - b_{n,1}\delta F \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

où  $\ddot{\delta y}_1$  et  $\dot{\delta y}_2$  sont les dynamiques des sorties en boucle fermée. Pour les simulations du chapitre 3, nous les avons choisies linéaires et asymptotiquement stables :

$$\begin{cases} \ddot{\delta y}_1 &= -\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right)\dot{\delta y}_1 - \frac{1}{\theta_1\theta_2}\delta y_1 \\ \dot{\delta y}_2 &= -\frac{\delta y_2}{\theta_3}, \end{cases}$$

( $\dot{\delta y}_1 = a_{1,1}\delta x_1 + a_{1,2}\delta x_2$ ) avec les 3 constantes de temps  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  positives égales à 5 mn.

## B.2 La commande non linéaire géométrique

En 1983, Gauthier et al [25] ont appliqué sur le modèle de connaissance (L,V) (3.1) les méthodes non linéaires géométriques de commande développées par Isidori et al [39, 38]. Ils ont montré que le système possède la bonne structure et que les perturbations de composition de la charge peuvent être rejetées par feedback. Dans cette section, nous reprenons leur travaux en utilisant les résultats de l'annexe A.

Comme la structure du système est tridiagonale, il suffit de dériver une seule fois les sorties par rapport au temps pour faire apparaître les commandes. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} = V(k(x_2) - x_1) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{dx_n}{dt} = (L + F)x_{n-1} - Vk(x_n) - (L + F - V)x_n. \end{aligned}$$

Ainsi, les commandes (L, V) apparaissent dès la première dérivation. La matrice dit de découplage  $\Delta$  est la suivante :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & k(x_2) - x_1 \\ x_{n-1} - x_n & x_n - k(x_n) \end{pmatrix}.$$

$\Delta$  est inversible si et seulement si  $k(x_2) - x_1 \neq 0$  et  $x_{n-1} - x_n \neq 0$ .

Nous venons de prouver le résultat suivant.

---

<sup>1</sup>Cette loi de commande s'obtient directement en dérivant les sorties par rapport au temps comme le montre l'annexe A.

**Lemme 7.** *Soit le système dynamique (3.1) où les commandes sont  $L$  et  $V$ , où la perturbation non mesurée est  $z_F$ , où les sorties sont  $y_1 = x_1$  et  $y_2 = x_n$  et où  $F$  est une variable connue et dépendant du temps. Au voisinage de n'importe quel vecteur d'état  $x = (x_j)$  tel que*

$$k(x_2) - x_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad x_{n-1} - x_n \neq 0, \quad (\text{B.2})$$

*il existe une loi non linéaire de retour d'état qui rejette la perturbation  $z_F$  sur les sorties. Pour avoir des sorties vérifiant*

$$\frac{dy_1}{dt} = \phi_1(y_1) \quad \text{et} \quad \frac{dy_2}{dt} = \phi_2(y_2)$$

*(les fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont arbitraires), la loi de commande est obtenue en inversant le système linéaire*

$$\begin{pmatrix} 0 & k(x_2) - x_1 \\ x_{n-1} - x_n & x_n - k(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(y_1) \\ \phi_2(y_2) + F(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Ce résultat est générique et structurel. Il affirme qu'en dehors de deux sous-variétés de codimension 1 dans l'espace d'état  $[0, 1]^n$ , les perturbations de composition de la charge peuvent être rejetées par retour statique de l'état. Il convient donc de voir si en pratique l'état de la colonne est loin ou près de ces deux sous-variétés pathologiques où des singularités apparaissent.

A l'état stationnaire on a  $dx_1/dt = 0$  et donc  $k(x_2) = x_1$ . Tout état stationnaire ne vérifie pas la condition (B.2). Ainsi la loi de commande donnée par (B.3) est singulière en n'importe quel point stationnaire. Néanmoins, le lemme 7 signifie que les colonnes à distiller sont des systèmes dynamiques pour lesquels le rejet de perturbations est possible presque partout. La structure de ces systèmes est bien adaptée aux méthodes de rejet de perturbations. Il reste les problèmes de singularités.

Physiquement, la singularité de la commande à l'état stationnaire est due au fait que la condensation en tête est totale et que le ballon de reflux n'opère aucune séparation. Pour passer cette singularité plusieurs solutions sont envisageables. La plus simple consiste à changer la sortie  $y_1$ . Intuitivement, comme la condensation des vapeurs de tête est complète, si leur composition  $k(x_2)$  est maintenue indépendante de la perturbation  $z_F$  alors la composition du distillat  $x_1$  le sera aussi. Autrement dit : puisque  $dx_1/dt = V(k(x_2) - x_1)$ , on peut prendre  $y_1 = k(x_2)$  au lieu de  $y_1 = x_1$ . Des calculs analogues montrent que le rejet des perturbations  $z_F$  est possible génériquement et que seule la première ligne de la matrice de découplage  $\Delta$  change :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{dk}{dx}(x_2) (x_1 - x_2) & \frac{dk}{dx}(x_2) (k(x_3) - k(x_2)) \\ x_{n-1} - x_n & x_n - k(x_n) \end{pmatrix}.$$

Avec ces nouvelles sorties, nous obtenons un résultat très similaire au précédent.

**Lemme 8.** Soit le système dynamique (3.1) où les commandes sont  $L$  et  $V$ , où la perturbation non mesurée est  $z_F$ , où les sorties sont ( $y_1 = k(x_2)$  et  $y_2 = x_n$ ) et où  $F$  est une variable connue et dépendant du temps. Au voisinage de n'importe quel état  $x = (x_j)$  tel que la matrice  $\Delta$  définie par

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{dk}{dx}(x_2) (x_1 - x_2) & \frac{dk}{dx}(x_2) (k(x_3) - k(x_2)) \\ x_{n-1} - x_n & x_n - k(x_n) \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

est inversible, il existe une loi non linéaire de retour d'état qui rejette la perturbation  $z_F$  sur les sorties. Pour avoir des sorties vérifiant

$$\frac{dy_1}{dt} = \phi_1(y_1) \quad \text{et} \quad \frac{dy_2}{dt} = \phi_2(y_2)$$

(les fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont arbitraires), la loi de commande est obtenue en inversant le système linéaire

$$\Delta \begin{pmatrix} L \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(y_1) \\ \phi_2(y_2) + F(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Nous allons démontrer qu'en n'importe quel point stationnaire la matrice  $\Delta$  du lemme 8 est inversible.

**Lemme 9.** Soit la colonne décrite par le système (3.1), où les commandes sont  $(L, V)$ , où la perturbation non mesurée est  $z_F$ , où les sorties sont  $y_1 = k(x_2)$  et  $y_2 = x_n$  et où  $F$  est un paramètre connu et fonction du temps. Nous supposons que pour, tout  $x$  dans  $]0, 1[$ ,  $dk/dx > 0$  et  $k(x) < x$  (le composé choisi pour les équations de bilan est le composé lourd). Alors, au voisinage de n'importe quel état stationnaire  $x = (x_j)$  caractérisé par les entrées  $(L, V, F, z_F)$  telles que  $z_F \in ]0, 1[$ ,  $L < V < L + F$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{dk}{dx}(x_2) (x_1 - x_2) & \frac{dk}{dx}(x_2) (k(x_3) - k(x_2)) \\ x_{n-1} - x_n & x_n - k(x_n) \end{pmatrix}$$

est inversible.

**Preuve** Comme  $k(x) < x$  pour  $x \in ]0, 1[$ , un point stationnaire  $x = (x_1, \dots, x_n)$  vérifie nécessairement  $x_1 < x_2 < x_3 < x_{n-1} < x_n$  (voir le point (ii) du théorème 4, page 82). Ainsi  $x_1 - x_2 \neq 0$  et  $x_{n-1} - x_n \neq 0$ . Comme  $dx_2/dt = 0$  et  $dx_n/dt = 0$  on a

$$k(x_3) - k(x_2) = \frac{L}{V}(x_2 - x_1) \quad x_{n-1} - x_n = \frac{V}{L + F}(x_n - k(x_n)).$$

Comme  $L < V < L + F$  et  $dk/dx > 0$ , la matrice est à diagonale dominante. Elle est donc inversible.



Les lemmes 8 et 9 impliquent que pour une colonne binaire décrite par le modèle (3.1), le rejet des perturbations  $z_F$  est toujours possible autour de n'importe quel point stationnaire pour les sorties  $k(x_2)$  et  $x_n$ . La commande est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{dk}{dx}(x_2) (x_1 - x_2) & \frac{dk}{dx}(x_2) (k(x_3) - k(x_2)) \\ x_{n-1} - x_n & x_n - k(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 + F(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

avec  $\dot{y}_1$  et  $\dot{y}_2$  les dynamiques des sorties en boucle fermée choisies linéaires et stables :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{y_1^c - y_1}{\theta_1} \\ \dot{y}_2 &= \frac{y_2^c - y_2}{\theta_2} \end{aligned}$$

où  $y_1^c$  et  $y_2^c$  sont les consignes et  $\theta_1$  et  $\theta_2$  des constantes de temps positives. Pour les simulations du chapitre 3,  $\theta_1 = \theta_2 = 10$  mn.



# Appendix C

## Stabilité dynamique d'un flash

Dans cette annexe, nous nous intéressons au comportement dynamique d'un ballon de flash isenthalpique à pression fixée (figure C.1). Dans [15], Doherty et Perkins montrent, sous des hypothèses simplificatrices sur les enthalpies (hypothèses de Lewis), qu'un flash est un système dynamique localement asymptotiquement stable<sup>1</sup>. Nous allons étendre ce résultat en montrant, sans hypothèse simplificatrice sur les enthalpies, qu'un flash isenthalpique à pression constante est un système asymptotiquement stable. Pour cela, nous montrons, en reprenant les idées de Prigogine [69] que ce système irréversible ouvert tend naturellement au cours du temps vers un état de production minimale d'entropie.

Plus précisément, nous montrerons que la stabilité asymptotique résulte directement du critère universelle d'évolution de Glansdorff et Prigogine [31] pour les systèmes physiques macroscopiques. A notre connaissance, cette application du critère universelle d'évolution ainsi que la stabilité asymptotique du flash qui en résulte, est un résultat nouveau.

Pour éviter de surcharger les formules, nous ne considérons que deux phases : une phase liquide et une phase vapeur. La généralisation au cas où le nombre des phases est quelconque ne pose pas de difficulté.

### Hypothèses et notations

Les hypothèses de modélisation de ce ballon de flash sont :

- à chaque instant, les deux phases sont homogènes et à l'équilibre thermodynamique ; l'équilibre thermodynamique est stable [70] ;
- la pression est constante (la régulation de pression est parfaite) ;

---

<sup>1</sup>Nous émettons cependant une restriction quant à la validité complète de leur preuve. En effet, ils utilisent, sans le démontrer, que le spectre du jacobien de la fonction  $k(x)$ , définissant la composition de bulle d'un liquide à pression et composition  $x$  fixées, est réel et positif. Nous avons par ailleurs constaté que la preuve de la stabilité globale qu'ils fournissent est fautive.

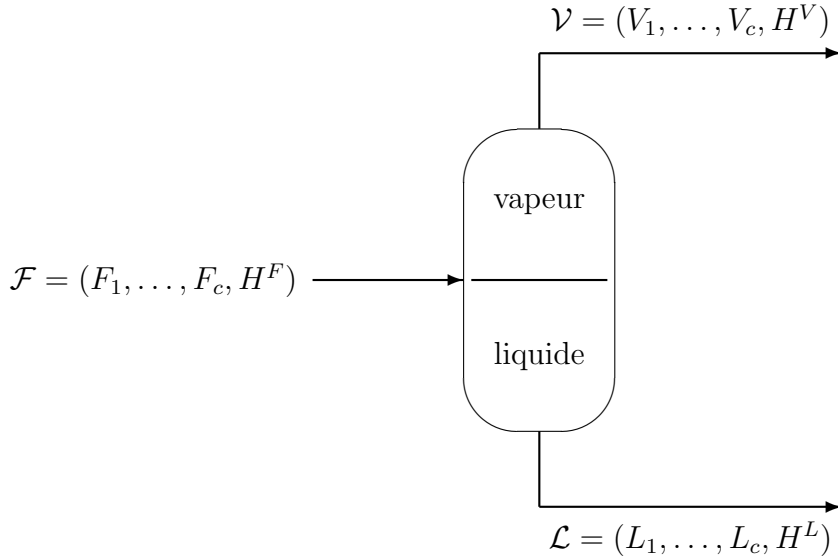


Figure C.1: un flash isenthalpique à pression et volumes constants.

- le volume de liquide est rigoureusement constant (la régulation du niveau de liquide est parfaite) ; le volume de la vapeur est également constant.
- le flash est isenthalpique ; les parois du ballon sont adiabatiques.

Les symboles sont les suivants :

- $c$  est le nombre de composés ;  $i$  est l'indice de composé ;  $i = 1, \dots, c$  ;
- $n = (n_i)_{i=1, \dots, c}$  et  $h$  les quantités accumulées de matière et d'enthalpie dans le ballon ;  $s$  est la quantité d'entropie accumulée ;
- $F = (F_i)_{i=1, \dots, c}$ ,  $H_F$  les flux de matière et d'enthalpie de l'alimentation ;  $F^L = (F_i^L)_{i=1, \dots, c}$  et  $H_F^L$  sont les flux de liquide associés au régime stationnaire pour une alimentation  $(F, H_F)$  ;  $F^V = (F_i^V)_{i=1, \dots, c}$  et  $H_F^V$  sont les flux de vapeur associés au régime stationnaire pour une alimentation  $(F, H_F)$  ;  $S^F$  est le flux entropique de la charge ;
- $L = (L_i)_{i=1, \dots, c}$ ,  $V = (V_i)_{i=1, \dots, c}$ ,  $H^L$  et  $H^V$  les flux de liquide et de vapeur et les flux enthalpiques de liquide et de vapeur sortant du ballon ;
- $n^L$  et  $n^V$  les nombres de moles globales de liquide et de vapeur accumulées dans le ballon ;

- $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_c, H^L)$ ;
- $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_c, H^V)$ ;
- $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_c, H_F)$ ;
- $\mathcal{F}^L = (F_1^L, \dots, F_c^L, H_F^L)$ ;
- $\mathcal{F}^V = (F_1^V, \dots, F_c^V, H_F^V)$ ;
- $\mathcal{R} = (n_1, \dots, n_c, h)$ ;
- $S^L$  est le flux d'entropie liquide ;  $S^L$  est une fonction homogène de degré 1 des flux molaires et enthalpiques  $\mathcal{L}$  ; nous omettons, dans tout ce qui suit, la dépendance en pression car cette dernière est supposée constante<sup>2</sup> ;
- $S^V$  est le flux d'entropie vapeur ;  $S^V$  est une fonction homogène de degré 1 des flux molaires et enthalpiques  $\mathcal{V}$ .

## Les régimes stationnaires

Nous supposons que les équilibres liquide-vapeur sont stables thermodynamiquement [70], c'est à dire que les fonctions  $S^L$  et  $S^V$  sont concaves dès que le liquide et la vapeur sont à l'équilibre. Ainsi, pour une alimentation  $\mathcal{F}$  donnée, les flux de liquide  $\mathcal{F}^L$  et de vapeur  $\mathcal{F}^V$  au régime stationnaire sont solution du problème d'optimisation concave

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{L}, \mathcal{V}} \quad & (S^L(\mathcal{L}) + S^V(\mathcal{V})) . \\ \mathcal{L} + \mathcal{V} = \mathcal{F} \end{aligned}$$

Ainsi on a  $S^F \leq S^L(\mathcal{L}) + S^V(\mathcal{V})$ . Dans cette formulation, nous ne faisons pas de distinction entre les bilans de matière et d'enthalpie. Pour cette étude, tout se passe comme si l'enthalpie était un composé supplémentaire. Nous voyons donc que  $\mathcal{F}^L$  et  $\mathcal{F}^V$  sont caractérisés par le système d'équations algébriques

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{L} + \mathcal{V} \\ \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{F}^L} &= \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{F}^V} , \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> Classiquement, l'entropie  $S$  est reliée aux nombres de moles  $(N_i)_{i=1, \dots, c}$ , à l'enthalpie  $H$  et à la pression  $P$  par la relation différentielle  $T dS = dH - \sum_{i=1}^c \mu_i dN_i - V dP$  où  $T$  est la température,  $\mu_i$  le potentiel chimique du composé  $i$  et  $V$  le volume.

où l'égalité des dérivées partielles des entropies liquide et vapeur, n'est autre que l'égalité des températures et des potentiels chimiques dans les deux phases. L'hypothèse de stabilité thermodynamique des équilibres entre phase implique que les matrices hessiennes,

$$\left(\frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2}\right)_{\mathcal{F}^L} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 S^V}{\partial \mathcal{V}^2}\right)_{\mathcal{F}^V},$$

sont nécessairement semi-définies négatives. Ces matrices ne peuvent pas être définies négatives car  $S^L$  et  $S^V$  sont des fonctions homogènes de degré 1. Elles vérifient donc séparément les  $c + 1$  relations de Gibbs-Duhem qui s'écrivent sous la forme vectorielle suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2}\right)_{\mathcal{L}} \mathcal{L} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 S^V}{\partial \mathcal{V}^2}\right)_{\mathcal{V}} \mathcal{V} = 0.$$

Nous supposons par la suite que ces matrices hessiennes sont de rang  $c$ , c'est à dire qu'en dehors des deux directions  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{V}$ , les concavités de  $S^L(\mathcal{L})$  et de  $S^V(\mathcal{V})$  sont strictes.

## Le modèle dynamique

Sous les hypothèses de modélisation énoncées ci-dessus, le comportement du système est décrit par le système algébro-différentiel<sup>3</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{R}}{dt} = \mathcal{F} - \mathcal{L} - \mathcal{V} \\ \mathcal{R} = \tau^L(\mathcal{L})\mathcal{L} + \tau^V(\mathcal{V})\mathcal{V} \\ \left(\frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}}\right)_{\mathcal{L}} = \left(\frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}}\right)_{\mathcal{V}} \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

où

- $\tau^L(\mathcal{L}) = n^L(\mathcal{L}) / \sum_{k=1}^c L_k$  avec  $n^L(\mathcal{L})$  le nombre de moles de liquide accumulées ; avec l'hypothèse des volumes constants,  $n^L$  est une fonction positive homogène de degré 0 de  $\mathcal{L}$  ;
- $\tau^V(\mathcal{V}) = n^V(\mathcal{V}) / \sum_{k=1}^c V_k$  avec  $n^V(\mathcal{V})$  le nombre de moles de vapeur accumulées ;  $n^V$  est une fonction positive homogène de degré 0 de  $\mathcal{V}$ .

$\tau^L$  et  $\tau^V$  s'interprètent comme des temps de séjour dans le liquide et dans la vapeur. Les inconnues sont  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{V}$ , les paramètres  $\mathcal{F}$ .

<sup>3</sup>Ce système algébro-différentiel est d'index 2.

## Stabilité dynamique et thermodynamique

Intuitivement, la stabilité thermodynamique des équilibres entre phases doit impliquer la stabilité asymptotique du flash isenthalpique décrit par le système algébro-différentiel ci-dessus. Le résultat qui suit le montre effectivement.

**Théorème 10.** *Considérons le flash isenthalpique décrit par le système algébro-différentiel (C.1). Supposons*

- *que les équilibres entre phases soient thermodynamiquement stables, et que les entropies  $S^L(\mathcal{L})$  et  $S^V(\mathcal{V})$  soient strictement concaves en dehors des directions  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{V}$  respectivement ;*
- *que l'alimentation  $\mathcal{F}$  soit constante ;*
- *qu'au régime stationnaire associé à  $\mathcal{F}$ , les flux de liquide  $\mathcal{F}^L$  et de vapeur  $\mathcal{F}^V$  soient non nuls (on est effectivement dans la zone biphasique).*

*Alors le système dynamique décrit par (C.1) est asymptotiquement stable autour de ce régime stationnaire.*

Ce résultat signifie que, si l'alimentation  $\mathcal{F}$  se stabilise et devient constante à partir d'un certain temps, le flash se stabilise également et approche asymptotiquement lorsque le temps tend vers l'infini le régime stationnaire correspondant à la valeur stabilisée de l'alimentation.

Nous verrons après la preuve ci-dessous que ce théorème est un conséquence non triviale du critère universelle d'évolution de Glansdorff et Prigogine [31] pour les systèmes physiques macroscopiques.

**Preuve** Elle consiste à construire une fonction de Lyapounov. Physiquement, cette fonction de Lyapounov doit être liée au fait que le flash est une opération irréversible et donc créant de l'entropie. Nous allons montrer que la fonction de Lyapounov n'est autre que la production d'entropie et que le système évolue de façon à diminuer au cours du temps cette production d'entropie.

Puisque les deux phases sont homogènes, la quantité d'entropie accumulée dans le ballon  $s$  est donnée par

$$s = \tau^L(\mathcal{L})S^L(\mathcal{L}) + \tau^V(\mathcal{V})S^V(\mathcal{V}).$$

Les résultats que Prigogine et Glansdorff [69, 31] ont obtenus pour des systèmes dissipatifs en général, permettent d'affirmer que

$$\dot{s} \geq S^F - S^L(\mathcal{L}) - S^V(\mathcal{V}).$$

Cependant, pour bien comprendre l'origine des irréversibilités, il est utile de redémontrer cette inégalité entropique à partir des relations (C.1).

On a

$$\dot{s} = \dot{\tau}^L S^L(\mathcal{L}) + \dot{\tau}^V S^V(\mathcal{V}) + \tau^L(\mathcal{L}) \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{L}}] + \tau^V(\mathcal{V}) \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}} [\dot{\mathcal{V}}].$$

Comme<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} S^L(\mathcal{L}) &= \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} [\mathcal{L}], \quad S^V(\mathcal{V}) = \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}} [\mathcal{V}], \\ \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} &= \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

on a

$$\dot{s} = \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} \left[ \dot{\tau}^L \mathcal{L} + \dot{\tau}^V \mathcal{V} + \tau^L(\mathcal{L}) \dot{\mathcal{L}} + \tau^V(\mathcal{V}) \dot{\mathcal{V}} \right] = \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{R}}].$$

Ainsi, les équations de bilan donnant  $\dot{\mathcal{R}}$  conduisent à

$$\dot{s} = \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} [\mathcal{F}^L + \mathcal{F}^V - \mathcal{L} - \mathcal{V}] = \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} [\mathcal{F}^L] + \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}} [\mathcal{F}^V] - S^L(\mathcal{L}) - S^V(\mathcal{V}).$$

Or  $S^F \leq S^L(\mathcal{F}^L) + S^V(\mathcal{F}^V)$ . Donc

$$\begin{aligned} \dot{s} - (S^F - S^L(\mathcal{L}) - S^V(\mathcal{V})) &= \left( \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} - \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{F}^L} \right) [\mathcal{F}^L] \\ &\quad + \left( \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}} - \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{F}^V} \right) [\mathcal{F}^V] \\ &\quad + S^L(\mathcal{F}^L) + S^V(\mathcal{F}^V) - S^F. \end{aligned}$$

Puisque les entropies sont concaves<sup>5</sup>,

$$\left( \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} - \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{F}^L} \right) [\mathcal{F}^L] \geq 0 \quad \text{et} \quad \left( \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}} - \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{F}^V} \right) [\mathcal{F}^V] \geq 0.$$

Ce qui prouve que la production d'entropie

$$P = \dot{s} - (S^F - S^L(\mathcal{L}) - S^V(\mathcal{V})) \geq 0.$$

Remarquons que nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse que l'alimentation  $\mathcal{F}$  est constante ni que les volumes sont constants : l'inégalité précédente est vraie avec une alimentation variable et des volumes de rétention variables. Les calculs précédents montrent

<sup>4</sup> Les entropies sont des fonctions homogènes de degré 1. Les phases sont à l'équilibre thermodynamique.

<sup>5</sup> Si  $\phi$  est une fonction concave homogène de degré 1 de  $x \in ]0, +\infty[^n$  telle que  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  soit de rang  $n-1$ , alors, pour tout  $a \in ]0, +\infty[^n$ ,  $\min_{x \in ]0, +\infty[^n} \left( \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_a x - \phi(x) \right) = 0$ .



que la production d'entropie  $P$  est uniquement due au mélange des molécules arrivant par l'alimentation avec celles constituant le liquide et la vapeur contenus dans ballon.

Nous allons montrer que  $P$  décroît au cours du temps. On a

$$\begin{aligned} P &= \left( \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} - \left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{F}^L} \right) [\mathcal{F}^L] \\ &\quad + \left( \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}} - \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{F}^V} \right) [\mathcal{F}^V] \\ &\quad + S^L(\mathcal{F}^L) + S^V(\mathcal{F}^V) - S^F. \end{aligned}$$

Puisque l'alimentation est supposée constante, on obtient en dérivant par rapport au temps

$$\dot{P} = \left( \frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{L}}, \mathcal{F}^L] + \left( \frac{\partial^2 S^V}{\partial \mathcal{V}^2} \right)_{\mathcal{V}} [\dot{\mathcal{V}}, \mathcal{F}^V].$$

Comme les phases sont à chaque instant à l'équilibre thermodynamique,

$$\left( \frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} = \left( \frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}},$$

on a, en dérivant par rapport au temps,

$$\left( \frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{L}}, \cdot] = \left( \frac{\partial^2 S^V}{\partial \mathcal{V}^2} \right)_{\mathcal{V}} [\dot{\mathcal{V}}, \cdot].$$

Ainsi

$$\dot{P} = \left( \frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{L}}, \mathcal{F}^L + \mathcal{F}^V].$$

Mais  $\dot{\mathcal{R}} + \dot{\mathcal{L}} + \dot{\mathcal{V}} = \dot{\mathcal{F}}^L + \dot{\mathcal{F}}^V$ . Donc

$$\dot{P} = \left( \frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{L}}, \dot{\mathcal{R}} + \dot{\mathcal{L}} + \dot{\mathcal{V}}] = \left( \frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{L}}, \dot{\mathcal{R}}]$$

grâce aux relations de Gibbs-Duhem rappelées plus haut. On a

$$\dot{\mathcal{R}} = \dot{\tau}^L \mathcal{L} + \dot{\tau}^V \mathcal{V} + \tau^L(\mathcal{L}) \dot{\mathcal{L}} + \tau^V(\mathcal{V}) \dot{\mathcal{V}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \left( \frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2} \right)_{\mathcal{L}} \left[ \dot{\mathcal{L}}, \dot{\tau}^L \mathcal{L} + \dot{\tau}^V \mathcal{V} + \tau^L(\mathcal{L}) \dot{\mathcal{L}} + \tau^V(\mathcal{V}) \dot{\mathcal{V}} \right] \\ &= \tau^L(\mathcal{L}) \left( \frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{L}}, \dot{\mathcal{L}}] + \tau^V(\mathcal{V}) \left( \frac{\partial^2 S^V}{\partial \mathcal{V}^2} \right)_{\mathcal{V}} [\dot{\mathcal{V}}, \dot{\mathcal{V}}]. \end{aligned}$$

Puisque les matrices hessiennes des entropies sont semi-définies négatives et  $\tau^L, \tau^V > 0$ ,

$$\dot{P} \leq 0.$$

Remarquons que jusqu'ici, nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse des volumes constants : même si les volumes de chacune des phases sont variables,  $P \geq 0$  et  $\dot{P} \leq 0$ , pourvu que l'alimentation soit constante.

Ainsi, lorsque le temps tend vers l'infini, les trajectoires convergent, vers le plus grand sous-ensemble contenu dans  $\dot{P} = 0$  et invariant par rapport à la dynamique du système (cf. le livre de LaSalle et Lefschetz [46]) . Nous allons voir que cet ensemble est réduit au point stationnaire.

Les cas où  $\dot{P} = 0$  sont caractérisés par

$$\left( \frac{\partial^2 S^L}{\partial \mathcal{L}^2} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{L}}, \dot{\mathcal{L}}] = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 S^V}{\partial \mathcal{V}^2} \right)_{\mathcal{V}} [\dot{\mathcal{V}}, \dot{\mathcal{V}}] = 0.$$

Comme nous supposons les concavités de  $S^L$  et  $S^V$  strictes en dehors des directions  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{V}$ , il existe deux réels  $\lambda^L$  et  $\lambda^V$  tels que

$$\dot{\mathcal{L}} = \lambda^L \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{V}} = \lambda^V \mathcal{V}.$$

Comme les volumes sont supposés constants, les rétentions  $\mathcal{R}$  sont des fonctions homogènes de degré 0 des flux  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{V}$ . Ainsi

$$\dot{\mathcal{R}} = \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} [\dot{\mathcal{L}}] + \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}} [\dot{\mathcal{V}}] = \lambda^L \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{L}} \right)_{\mathcal{L}} [\mathcal{L}] + \lambda^V \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mathcal{V}} [\mathcal{V}] = 0.$$

Ce qui montre que l'ensemble des points où  $\dot{P} = 0$  est réduit au point stationnaire.

La décroissance le long des trajectoires de la production d'entropie  $P$  est une conséquence du critère universelle d'évolution de Glansdorff et Prigogine [31]. En effet, ils ont démontré

- d'une part, que la production d'entropie peut se mettre sous la forme générale

$$P = \sum_{\nu} \phi_{\nu} X_{\nu}$$

où  $\phi_{\nu}$  est une différence de potentiels caractérisant un écart à l'équilibre thermodynamique et  $X_{\nu}$  le flux engendré par cet écart ;

- d'autre part, que les équations de la dynamique du système impliquent que, le long des trajectoires, la forme différentielle, en général non fermée,

$$d_X P = \sum_{\nu} d\phi_{\nu} X_{\nu}$$

est négative, c'est dire que

$$\sum_{\nu} \frac{d\phi_{\nu}}{dt} X_{\nu} \leq 0.$$

Dans la preuve précédente, les  $\phi_\nu$  correspondent aux termes

$$\left(\frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}}\right)_{\mathcal{L}} - \left(\frac{\partial S^L}{\partial \mathcal{L}}\right)_{\mathcal{F}^L} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}}\right)_{\mathcal{V}} - \left(\frac{\partial S^V}{\partial \mathcal{V}}\right)_{\mathcal{F}^V},$$

les  $X_\nu$  aux termes  $\mathcal{F}^L$  et  $\mathcal{F}^V$ . Les  $X_\nu$  étant constants,  $\frac{dP}{dt} = \frac{d_X P}{dt}$ . Le critère universelle d'évolution implique alors que  $\frac{dP}{dt} \leq 0$ .

Il est possible d'aller encore plus loin dans l'étude de la dynamique d'un flash. En effet, on peut montrer que les équations (C.1) représentent la dynamique d'un système dérivant d'un potentiel et dont l'espace des phases est une sous-variété riemannienne. Le potentiel n'est autre que la production d'entropie. La sous-variété des phases est alors définie dans un espace de dimension  $2(c+1)$ , produit cartésien de l'espace des rétentions liquides par celui des rétentions vapeurs. Dans cet espace produit, la sous-variété des phases est caractérisée par les conditions d'équilibre thermodynamique entre le liquide et la vapeur et par le fait que les volumes liquide et vapeur sont constants. La métrique est alors définie à partir des matrices hessiennes des entropies. Une telle interprétation géométrique de la dynamique d'un flash permet alors d'affirmer qu'autour de n'importe quel point stationnaire, le système linéarisé tangent a toutes ces valeurs propres réelles et négatives. En résumé, le comportement dynamique d'un flash est assez pauvre car ce système dérive d'un potentiel.

A la lumière de ce qui précède, il est clair que le caractère isenthalpique du flash n'est pas essentiel pour la stabilité asymptotique. Elle reste acquise si, par exemple, on suppose la pression et la température fixées. Dans ce cas, il faut utiliser l'énergie libre de Gibbs et les flux molaires uniquement.



# Appendix D

## Résultats de la littérature

### D.1 Etude de Rosenbrock

P. Duchêne nous a indiqué certains travaux de Rosenbrock qui a montré le résultat suivant ([76], théorème 6 de l'annexe).

**Théorème de Rosenbrock** *Considérons le système différentiel de dimension  $p > 0$*

$$\frac{d\xi}{dt} = \phi(\xi).$$

*Supposons que  $\xi = (\xi_i)_{i=1,\dots,p}$  appartient à  $\Omega$ , un convexe fermé borné de  $\mathbb{R}^p$ , et que  $\phi = (\phi_i)_{i=1,\dots,p}$  est continûment dérivable. Supposons de plus que :*

- (i) *pour toute condition initiale dans  $\Omega$ , la solution reste dans  $\Omega$  ;*
- (ii) *pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$ , la fonction de  $\xi$*

$$\psi_i(\xi) = - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_i}(\xi) \tag{D.1}$$

*est non négative ;*

- (iii) *pour tout  $i \neq k$  dans  $\{1, \dots, p\}$ ,  $\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_i} \geq 0$  ;*

- (iv) *pour  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$  tel que  $\psi_i = 0$ , il existe  $j \neq i$  dans  $\{1, \dots, p\}$  tel que  $\frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_i} \neq 0$  ;  
si  $\psi_j = 0$ , alors il existe  $k$  dans  $\{1, \dots, p\}$  différent de  $i$  et de  $j$  tel que  $\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_j} \neq 0$  ;  
si  $\psi_k = 0$ , alors ... ; de plus, ce processus est fini et conduit toujours à un entier  $l$  dans  $\{1, \dots, p\}$  pour lequel  $\psi_l \neq 0$ .*

Alors il existe un état stationnaire unique dans  $\Omega$  ; pour toute condition initiale dans  $\Omega$  la solution converge vers le point stationnaire ; la fonction  $\sum_{k=1}^p |\phi_k(\xi)|$  est une fonction de Liapounov du système.

Rosenbrock a utilisé ce résultat pour montrer qu'une colonne binaire est un système dynamique asymptotiquement stable.

## D.2 Matrice de Jacobi

Nous rappelons également le lemme suivant qui résulte d'un résultat classique sur les matrices de Jacobi et qui nous a été indiqué par Y. Creff.

**Lemme 10.** Soient  $a = (a_i)$  et  $b = (b_i)$ , deux vecteurs réels de dimension  $p > 0$ , et  $J = (J_{i,j})$ , la matrice réelle de dimension  $p \times p$  construite à partir de  $a$  et  $b$  comme suit :

- pour  $i = 2, \dots, p$ ,  $J_{i,i-1} = a_{i-1}$  ;
- pour  $i = 1, \dots, p$ ,  $J_{i,i} = -a_i - b_i$  ;
- pour  $i = 1, \dots, p-1$ ,  $J_{i,i+1} = b_{i+1}$  ;
- pour  $i, j = 1, \dots, p$  tels que  $|i - j| > 1$ ,  $J_{i,j} = 0$ .

Si pour tout  $i$  dans  $\{0, \dots, p\}$   $a_i > 0$  et  $b_i > 0$ , alors les valeurs propres de  $J$  sont réelles distinctes et négatives.

**Preuve** Les valeurs propres  $\lambda$  de  $J$  sont solutions de  $\det(J - \lambda I_p) = 0$ , i.e.

$$\begin{vmatrix} -a_1 - b_1 - \lambda & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -a_2 - b_2 - \lambda & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{p-2} & -a_{p-1} - b_{p-1} - \lambda & b_p \\ 0 & 0 & 0 & a_{p-1} & -a_p - b_p - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Mais on a :

$$\det(J - \lambda I_p) = (-1)^p \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + \lambda & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 + b_2 + \lambda & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{p-2} & a_{p-1} + b_{p-1} + \lambda & b_p \\ 0 & 0 & 0 & a_{p-1} & a_p + b_p + \lambda \end{vmatrix}.$$

Ainsi, le spectre de  $J$  est l'opposé du spectre de la matrice de Jacobi

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 + b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{p-2} & a_{p-1} + b_{p-1} & b_p \\ 0 & 0 & 0 & a_{p-1} & a_p + b_p \end{pmatrix}.$$

Avec le résultat de [24] page 99, on vérifie que les valeurs propres de cette matrice sont réelles, distinctes et positives.

### D.3 Théorème de Tikhonov

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, u(t), w(t), \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, u(t), w(t), \varepsilon) \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

où  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre, les vecteurs  $x$  (l'état lent) et  $z$  (l'état rapide) forment l'état du système, les vecteurs  $u$  et  $w$  sont les entrées, les fonctions  $f$  et  $g$  sont régulières. Notons  $(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$  la solution de ce système sur l'intervalle  $[0, T]$  ( $T > 0$ ) ayant pour condition initiale  $x(0, \varepsilon) = x^0$  et  $z(0, \varepsilon) = z^0$ .

Le sous-système lent associé est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, u(t), w(t), 0) \\ 0 = g(x, z, u(t), w(t), 0). \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Nous supposons qu'il admet une solution  $(x_0(t), z_0(t))$  sur  $[0, T]$  ayant pour condition initiale  $x_0(0) = x^0$ . Pour  $\bar{t}$  dans  $[0, T]$ , le sous-système rapide est

$$\frac{dz}{d\tau} = g(x_0(\bar{t}), z(\tau), u(\bar{t}), w(\bar{t}), 0) \quad (\text{D.4})$$

où  $\tau = t/\varepsilon$ .

**Théorème de Tikhonov** *Si, pour tout  $\bar{t}$  dans  $[0, T]$ , la matrice jacobienne*

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x_0(\bar{t}), z_0(\bar{t}), u(\bar{t}), w(\bar{t}), 0)$$

est stable, et si  $z^0$  appartient au bassin d'attraction du point stationnaire  $z_0(0)$  de (D.4) pour  $\bar{t} = 0$ , alors

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x(t, \varepsilon) &= x_0(t) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} z(t, \varepsilon) &= z_0(t)\end{aligned}$$

uniformément sur tout intervalle fermé de  $]0, T]$ .

La démonstration de ce théorème se trouve dans [92]. Il justifie l'approximation du système (D.2) de taille  $\dim(x) + \dim(z)$  par le système (D.3) de taille inférieure,  $\dim(x)$ . Pour cela, il convient de vérifier que la partie (D.4) que l'on néglige est stable et suffisamment rapide.

En pratique, le premier problème que l'on rencontre est de trouver un petit paramètre  $\varepsilon$  : en général, la modélisation ne conduit que rarement à des systèmes écrits sous la forme singulièrement perturbée standard (D.2). Bien souvent, seules des considérations physiques permettent de trouver ce petit paramètre  $\varepsilon$ . Pour plus de détails sur l'utilisation de ce théorème pour la modélisation et la commande, nous renvoyons le lecteur au long article de Kokotovic [42] ainsi qu'à l'article plus récent de Marino et Kokotovic [55].