Analyse et commandes des systèmes dynamiques
Partie I
Stabilité, Commandabilité et Observabilité

Pierre Rouchon
Ecole des Mines de Paris
pierre.rouchon@ensmp.fr

Automne 2003

Le bio-réacteur: dynamique et stabilisation par feedback

Bilan bio-masse et substrat carboné.

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}X &= (\mu(S) - D)X \\ \tfrac{d}{dt}S &= D(S_e - S) - \mu(S)X \end{aligned}$$

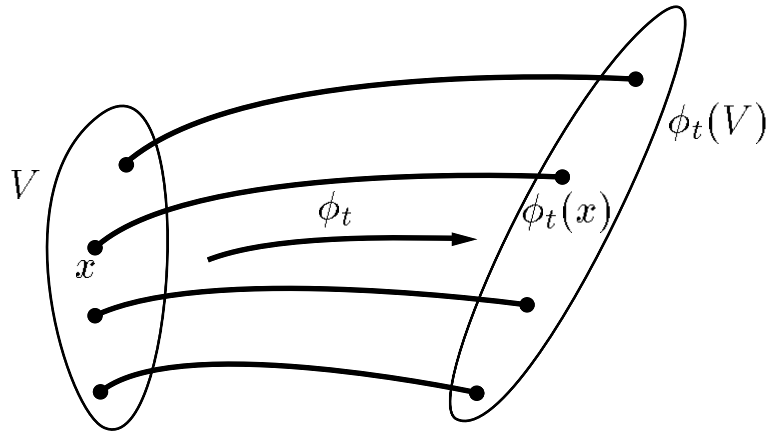
est globalement stabilisé en $D = \bar{D} = \sup_S \mu(S)$ par un feedback très simple:

$$D = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } \bar{D} - k(S - \bar{S}) < \varepsilon \\ 2\bar{D} & \text{si } \bar{D} - k(S - \bar{S}) > 2\bar{D} \\ \bar{D} - k(S - \bar{S}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonction de Lyapounov en boucle ouverte pour $D \leq \bar{D}$:

$$V = \frac{1}{2}(X + S - S_e)^2 + \frac{1}{2}X^2.$$

Théorème de Cauchy et flot



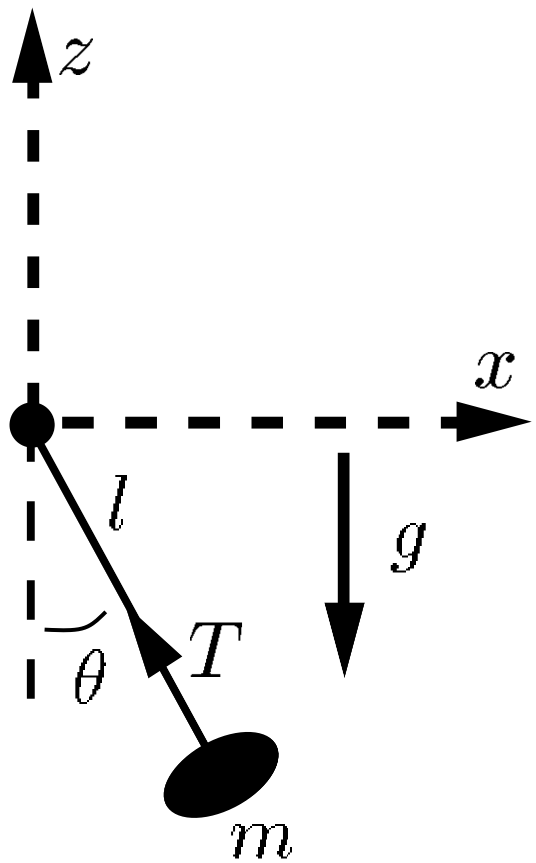
Soit $\frac{d}{dt}x = v(x)$ avec le champ de vecteurs v continûment dérivable sur U. Pour tout x_0 dans U, il existe $a < 0 < b$ réels et une unique solution

$$\begin{array}{rccl} \phi_\cdot(x_0) & : &]a, b[& \longrightarrow & U \\ & & t & \longrightarrow & \phi_t(x_0) \end{array}$$

avec $x(0) = x_0$ ($\phi_0(x_0) = x_0$):

$$\frac{d}{dt}\left(\phi_t(x)\right)|_{t=\tau} = v(\phi_\tau(x)) \quad \text{et} \quad \phi_0(x) = x$$

Pendule



Première variation sensibilité et calcul des dérivées

Soit $\{\phi_t\}$ le flot associé à $\frac{d}{dt}x = v(x)$. Sa dérivée, notée $D_x\phi_t(x)$ (matrice $n \times n$ $\left(\frac{\partial[\phi_t]_i}{\partial x_j}\right)$), est solution de

$$\frac{d}{dt}\left(D_x\phi_t(x)\right)_{t=\tau} = D_x v(\phi_\tau(x))\ D_x\phi_\tau(x)$$

avec comme condition initiale $D_x\phi_0(x) = I_n$. De plus $D_x\phi_t(x) \cdot v(x) = v(\phi_t(x))$.

Si $v = v(x,\lambda)$, alors le flot de $v(\cdot,\lambda)$, $\{\phi_t^\lambda\}$ dépend aussi de λ:

$$\frac{d}{dt}\left(D_\lambda\phi_t^\lambda(x)\right)_{t=\tau} = D_x v(\phi_\tau^\lambda(x),\lambda)\ D_\lambda\phi_\tau^\lambda(x) + D_\lambda v(\phi_\tau^\lambda(x),\lambda)$$

avec comme condition initiale $D_\lambda\phi_0^\lambda(x) = 0$.

Ensemble invariant et intégrale première

Soit A un sous-ensemble de l'espace d'état U. A est dit invariant (resp. positivement invariant) par le flot ϕ_t, si, pour tout t dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $[0, +\infty[$), $\phi_t(A)$ est inclus dans A.

On appelle intégrale première, une fonction C^1 $h \; : U \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{d}{dt}[h(\phi_t(x))] = 0$ pour tout x dans U et pour tout t. Cette condition est équivalente à $D_x h(x) \cdot v(x) = 0$ pour tout x dans U

Point d'équilibre et orbite périodique: deux ensembles invariants.

Les trois équations de Lorenz

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & s(-x_1 + x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & rx_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} & = & -bx_3 + x_1 x_2. \end{cases}$$

sont d'apparence très simples, bien que, pour $s = 10$, $r = 28$ et $b = 8/3$, l'allure des solutions, sur de grands intervalles de temps, soit très irrégulière.

Le contrôle élémentaire $r = x_3$ stabilise globalement le système en 0.

Stabilité au sens de Lyapounov

Un point d'équilibre $\overline{x}$ de $\frac{d}{dt}x = v(x)$ est stable au sens de Lyapounov si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (dépendant de ε mais indépendant du temps t) tel que, pour tout x vérifiant $\|x-\overline{x}\| \leq \eta$, $\|\phi_t(x) - \overline{x}\| \leq \varepsilon$ pour tout $t > 0$.

Le point d'équilibre $\overline{x}$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapounov s'il est stable au sens de Lyapounov et si de plus, pour tout x suffisamment proche de $\overline{x}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi_t(x) = \overline{x}$.

$1^{\text{ère}}$ méthode de Lyapounov, invariance de Lasalle

Soient $\frac{d}{dt}x = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (pour simplifier) et une fonction C^1, $V\ :\ \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$, telle que :

- si $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini en norme, $V(x)$ tend aussi vers l'infini ;

- V décroît le long de toutes les trajectoires, $\dfrac{dV}{dt} \leq 0$.

Alors, toutes les trajectoires sont définies sur $[0, +\infty[$ et convergent asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble défini par $D_x V \cdot v = 0$.

Exemple du pendule avec frottement.

Systèmes linéaires $\frac{d}{dt}x = Ax$

$$x(t) = \exp(tA)x(0), \quad \exp(tA) = \left[I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}A^k + \ldots\right]$$

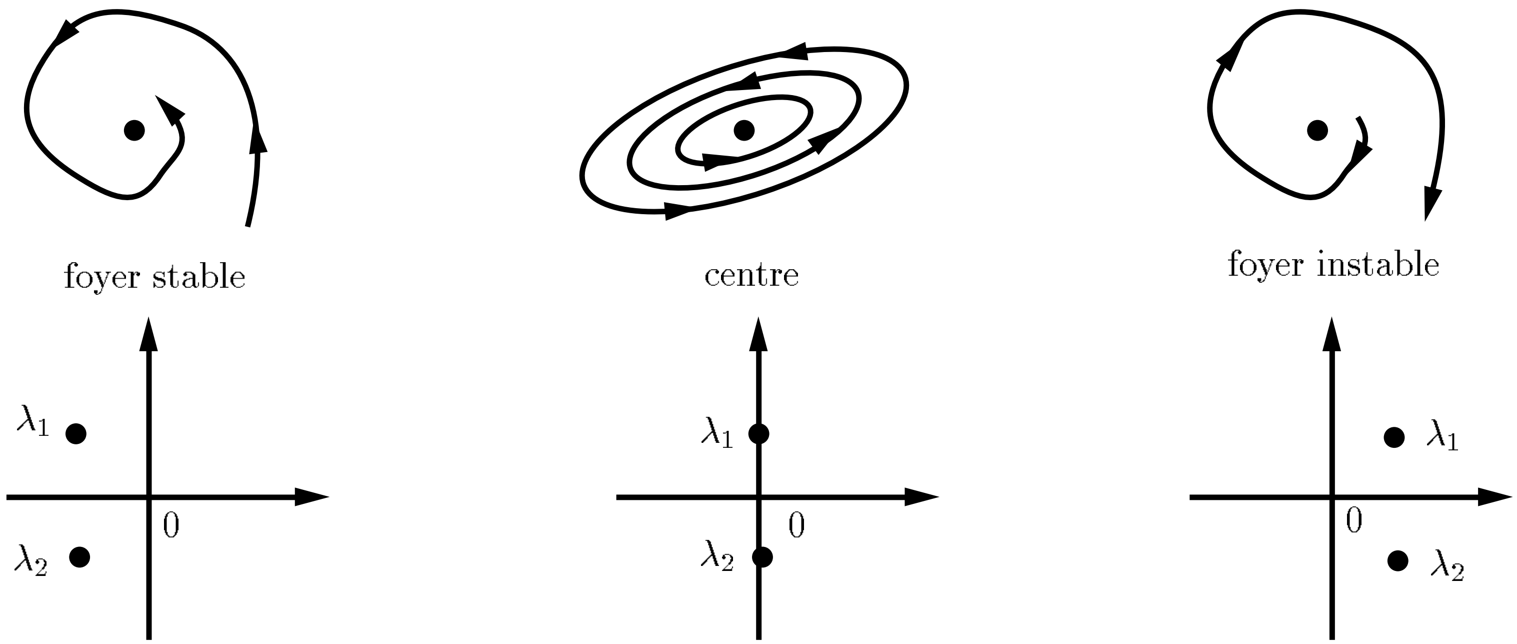
Propriété de l'exponentielle:

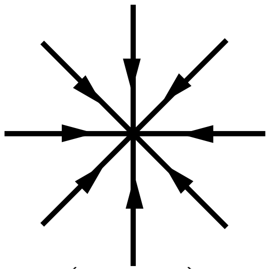
$$\exp(tA)\,\exp(sA) = \exp((t+s)A), \quad \frac{d}{dt}(\exp(tA)) = \exp(tA)\,A$$

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$$

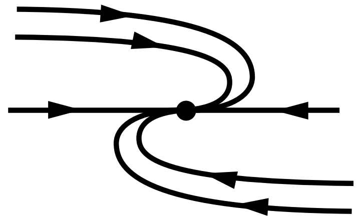
$$\exp(A) = \lim_{m\to+\infty}\left(I + \frac{A}{m}\right)^m, \quad \det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$$

Portrait de Phases

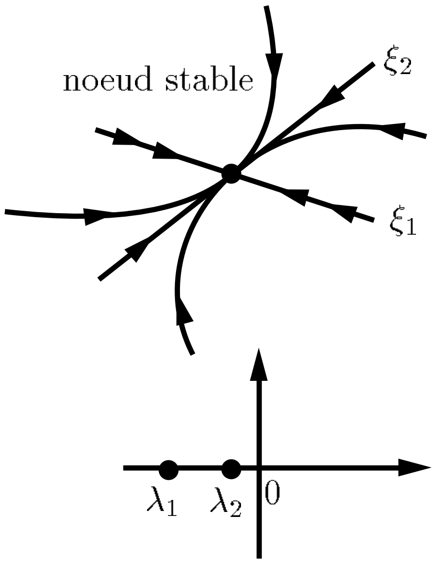


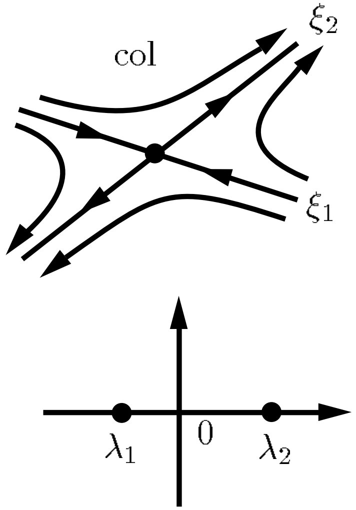


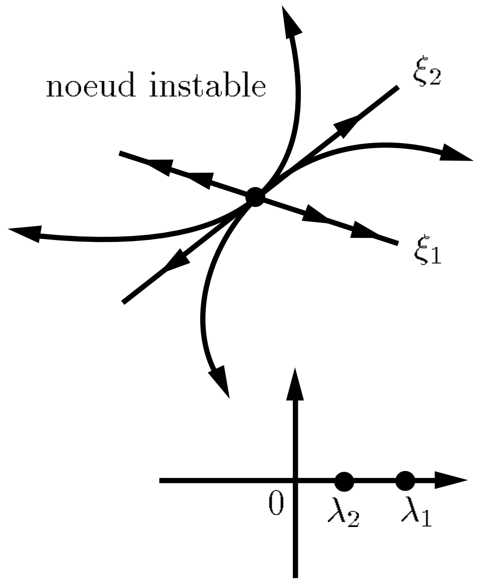
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda < 0$$



$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda < 0$$







Lien avec le linéaire tangent (seconde méthode de Lyapounov)

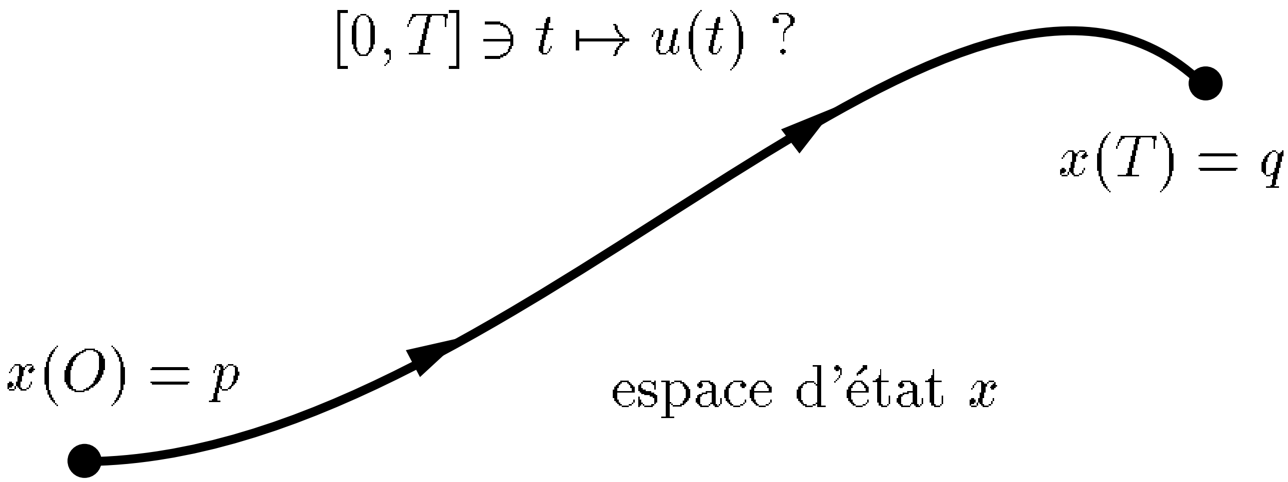
Autour de l'équilibre $\overline{x}$ le système linéarisé tangent est :

$$\frac{d(\Delta x)}{dt} = D_x v(\overline{x})\,\Delta x \quad \text{où} \quad D_x v(\overline{x}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\bar{x})\right)\Bigg|_{1\leq i,j\leq n}.$$

Si les valeurs propres de $Dv(\overline{x})$ sont toutes à partie réelle *strictement* négative, alors $\overline{x}$ est un équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapounov. Si l'une des valeurs propres de $Dv(\overline{x})$ possède une partie réelle *strictement* positive alors $\overline{x}$ n'est pas un équilibre stable au sens de Lyapounov.

Les valeurs propres de $Dv(\overline{x})$ sont invariantes par changement de variables sur x. On les appelle **exposants caractéristiques**; $\overline{x}$ est dit **hyperbolique** si tous ses exposants caractéristiques sont à partie réelle non nulle.

Planification de trajectoires et commandabilité.



Problème difficile en général car nécessite l'intégration de

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u(t)).$$

Commandabilité non linéaire

Le système

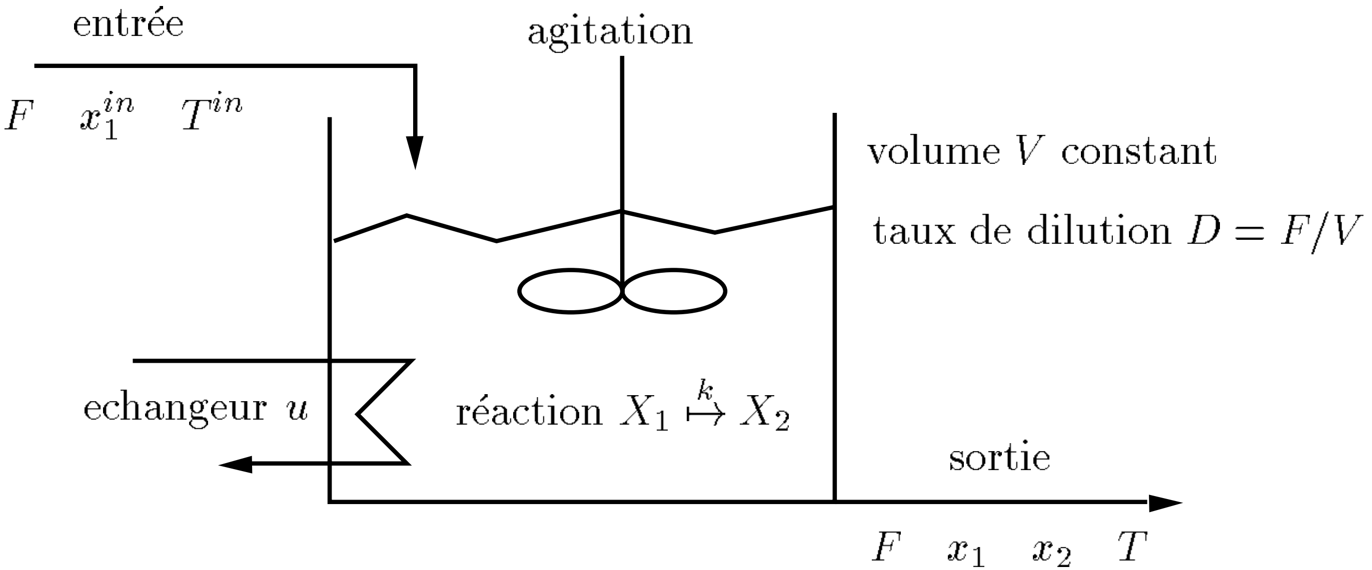
$$\frac{d}{dt}x = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

est dit commandable en temps $T > 0$, si et seulement si, pour $p, q \in \mathbb{R}^n$, il existe une loi horaire $[0, T] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$, dite commande en boucle ouverte, qui amène le système de l'état $x(0) = p$ à l'état $x(T) = q$, c'est à dire, telle que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(t)) \quad \text{pour } t \in [0, T] \\ x(0) &= p \end{aligned}$$

vérifie $x(T) = q$. Le système est dit simplement commandable lorsqu'il est commandable pour au moins un temps $T > 0$.

Réacteur exothermique et invariant chimique



Bilan matière et énergie:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= D(x_1^{in} - x_1) - k_0 \exp(-E/RT) x_1 \\
\dot{x}_2 &= -D x_2 + k_0 \exp(-E/RT) x_1 \\
\dot{T} &= D(T^{in} - T) + \alpha \Delta H \exp(-E/RT) x_1 + u.
\end{aligned}
$$

Intégrale première et commandabilité

Une fonction régulière $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t,x) \mapsto h(t,x) \in \mathbb{R}$ est appelée intégrale première de $\frac{d}{dt}x = f(x,u)$ si elle est constante le long de toute trajectoire du système. Une intégrale première est dite triviale si c'est une fonction constante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Si h est une intégrale première, sa dérivée le long d'une trajectoire arbitraire est nulle :

$$\frac{d}{dt}h = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{d}{dt}x = \text{fonction}(x,u) \equiv 0$$

pour toute trajectoire $(t \mapsto (x(t), u(t))$ du système.

Si $\frac{d}{dt}x = f(x,u)$ est commandable, alors ses intégrales premières sont triviales.

Matrice de commandabilité pour les systèmes linéaires.

Système linéaire avec contrôle:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

La matrice de commandabilité

$$\mathcal{C} = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B)$$

est de rang n, si, et seulement si, les seules intégrales premières sont triviales.

Changement d'état, bouclage statique et invariance

L'ensemble des transformations

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ K & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}$$

forment un groupe lorsque les matrices M, N et K varient M et N étant inversibles.

Si $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ est commandable (resp. n'admet pas d'intégrale première) alors $\frac{d}{dt}\widetilde{x} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}\widetilde{u}$ est commandable (resp. n'admet pas d'intégrale première).

Critère de Kalman

Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ est commandable si, et seulement si, la matrice de commandabilité

$$\mathcal{C} = (B, AB, \ldots A^{n-1}B)$$

est de rang $n = \dim(x)$.

Pour abréger, on dit souvent que *la paire* (A, B) *est commandable*, pour dire que le rang de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$ est maximum.

Forme normale de Brunovsky

Si la matrice de commandabilité, $(B, AB, \dots A^{n-1}B)$, du système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ est de rang $n = \dim(x)$ et si B est de rang $m = \dim(u)$, alors il existe un changement d'état $z = Mx$ (M matrice inversible $n \times n$) et un bouclage statique régulier $u = Kz + Nv$ (N matrice inversible $m \times m$), tels que les équations du système dans les variables (z, v) admettent la forme suivante (écriture sous la forme de m équations différentielles d'ordre ≥ 1) :

$$y_1^{(\alpha_1)} = v_1, \quad \dots \quad , y_m^{(\alpha_m)} = v_m$$

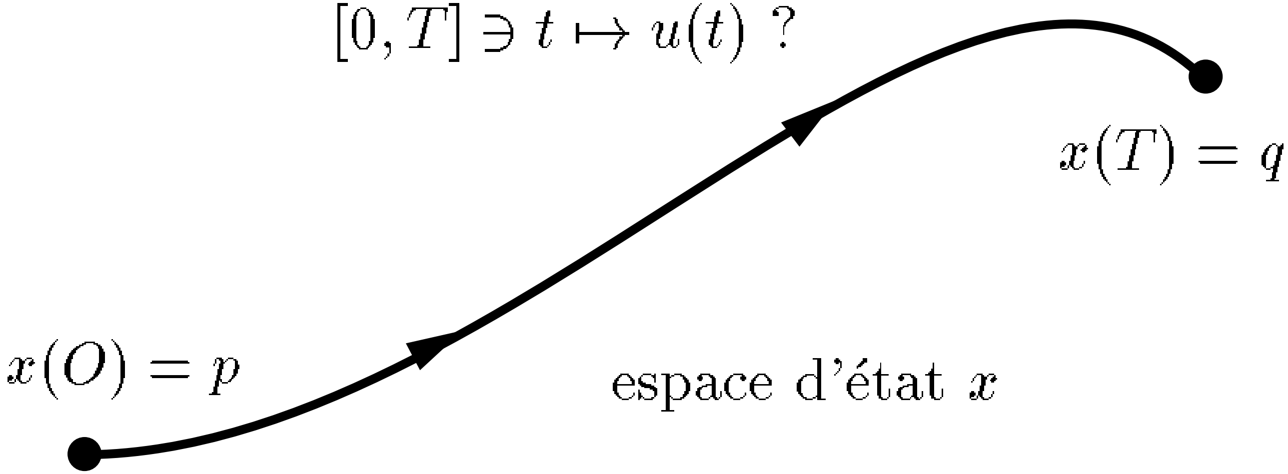
avec comme état

$$z = (y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\alpha_1 - 1)}, \quad \dots \quad , y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m - 1)}),$$

les α_i étant des entiers positifs.

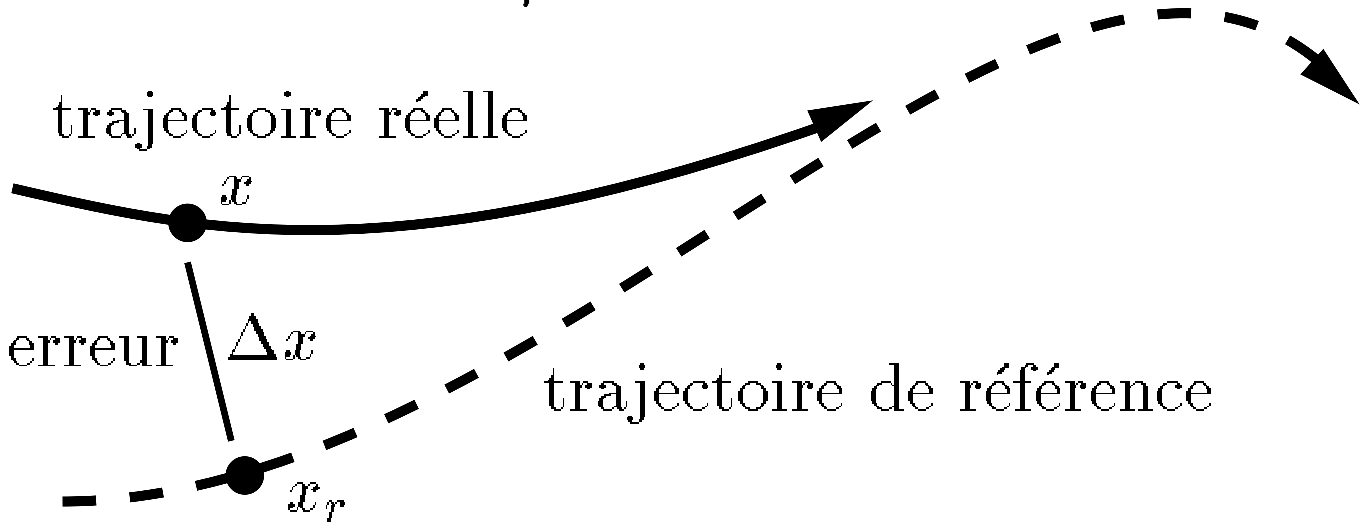
Les m quantités y, qui sont des combinaisons linéaires de l'état x, sont appelées *sorties de Brunovsky*.

Planification de trajectoires pour $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$.



Suivi de trajectoire et stabilisation pour $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$.

$$u = u_r + \Delta u \ ?$$



Calculer Δu, $u = u_r + \Delta u$, pour que $\Delta x = x - x_r$ tende vers 0.

Intérêt de la forme de Brunovsky

1. Changement de variables $(x, u) \mapsto (z, v)$: on se ramène à dim(u) chaînes découplées d'intégrateur: $y_i^{(\alpha_i)} = v_i$.

2. Pour chaque chaîne on résout la planification et le suivi

3. On calcule ensuite le vrai contrôle u via le changement inverse $(z, v) \mapsto (x, u)$.

La stabilisation

Pour chaque $y_i^{(\alpha_i)} = v_i$ on cherche un feedback (les gains k_k, $k = 1, ..., \alpha_i$),

$$v_i = k_1 y_i^{(\alpha_i - 1)} + \ldots + k_{\alpha_i} y_i$$

tel que la boucle fermée soit stable. Soient α_i valeurs propres, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\alpha_i}$, correspondant au spectre d'une matrice réelle de dimension α_i:

$$\prod_{k=1}^{\alpha_i} (X - \lambda_k) = X^{\alpha_i} - s_1 X^{\alpha_i - 1} + s_2 X^{\alpha_i - 2} + \ldots + (-1)^{\alpha_i} s_{\alpha_i}$$

Alors le bouclage

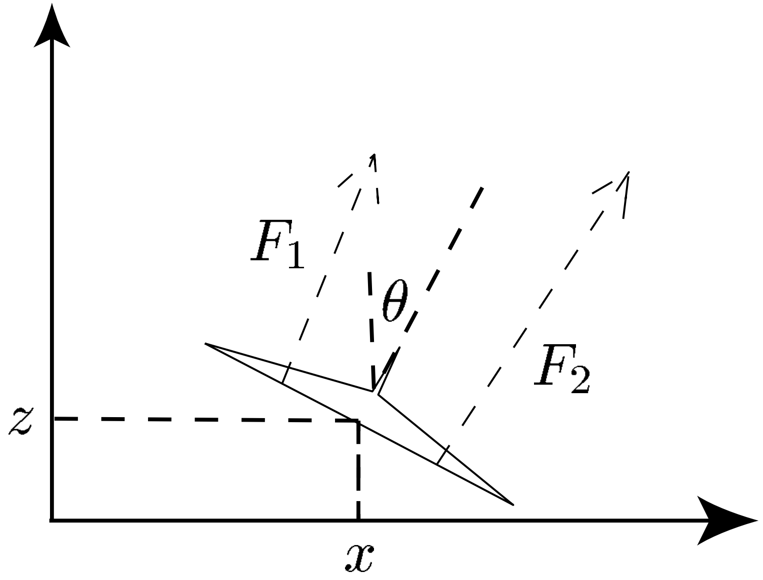
$$v_i = s_1 y_i^{(\alpha_i - 1)} - s_2 y_i^{(\alpha_i - 2)} + \ldots + (-1)^{\alpha_i - 1} s_{\alpha_i} y_i$$

stabilise $y_i^{(\alpha_i)} = v_i$ dès que $\Re(\lambda_k) < 0$.

Placement de pôles et stabilisation par feedback

Si la paire (A, B) est commandable alors, pour toute matrice réelle F $n \times n$, il existe une matrice $m \times n$, K (non nécessairement unique), telle que le spectre de $A + BK$ coïncide avec celui de F.

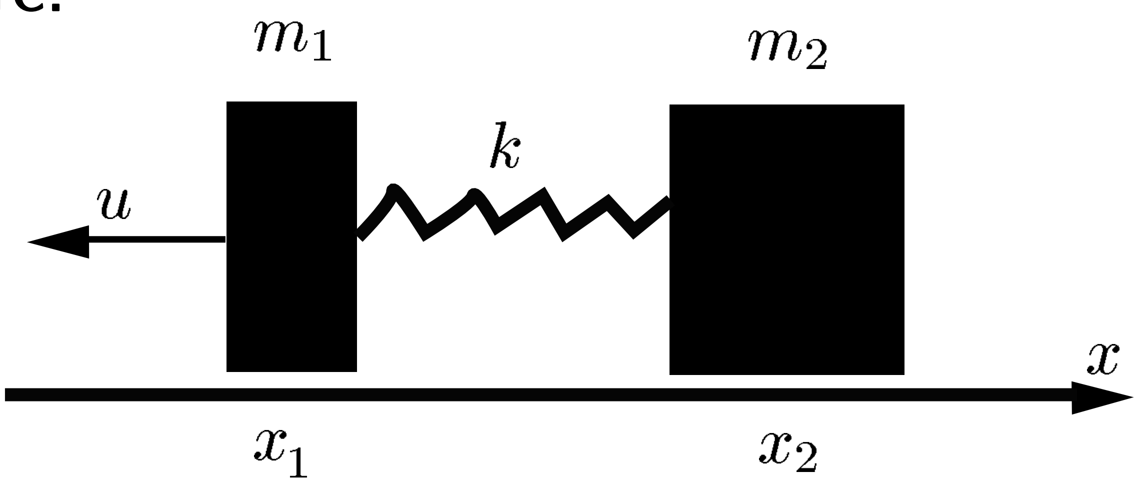
L’avion à décollage vertical



Modèle de contrôle:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -v_1 \sin\theta \\ \ddot{z} &= v_1 \cos\theta - g \\ \ddot{\theta} &= v_2,\end{aligned}$$

Vers le non linéaire: deux masses couplées par un ressort non-linéaire.



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -\Gamma(x_1 - x_2) + u \\ m_2\ddot{x}_2 = \Gamma(x_1 - x_2). \end{cases}$$

où Γ est une fonction croissante, $\Gamma(0) = 0$.

Robustesse par rapport aux dynamiques négligées

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{dx}{dt} & = & \varepsilon f(x,y,u,\varepsilon) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y,u,\varepsilon)\end{array}\right.$$

avec $h(x,u)$ le point d'équilibre hyperbolique et stable de la partie rapide. Le système lent est alors $\frac{d}{dt}x = f(x,h(x,u),u,0)$.

Supposons que $u = k(x)$ rende le point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{u} = k(\bar{x}))$ hyperbolique. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, le système perturbé avec le bouclage lent $u = k(x)$, admet un point d'équilibre hyperbolique proche de $(\bar{x}, \bar{y} = h(\bar{x}, \bar{u}))$.

Systèmes lents/rapides: théorème de Tikhonov

Les trajectoires de

$$\frac{d}{dt}x = \varepsilon f(x,y), \quad \frac{d}{dt}y = g(x,y)$$

sont proches pour $t \in]0, 1/\varepsilon]$ de celles de

$$\frac{d}{dt}x = \varepsilon f(x,y), \quad 0 = g(x,y)$$

si pour chaque (x,y) tel que $g(x,y) = 0$, les valeurs propres de $\frac{\partial g}{\partial y}(x,h(x))$ sont stables.

Systèmes lents/rapides: point d'équilibre et robustesse

Supposons en plus des hypothèses du théorème de Tikhonov que le système réduit $\frac{d}{dt}x = f(x, h(x))$ ($x \mapsto h(x)$ défini par les fonctions implicites via $g(x, h) = 0$) admet un point d'équilibre hyperboliquement stable $\bar{x}$, $f(\bar{x}, h(\bar{x})) = 0$, et que les valeurs propres de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

en $x = \bar{x}$, $y = h(\bar{x})$ sont à partie réelle strictement négative. Alors, pour tout $\varepsilon \geq 0$ assez proche de 0, le système perturbé admet un point d'équilibre proche de $(\bar{x}, h(\bar{x}))$ et hyperboliquement stable.

Observabilité

$$\frac{d}{dt}x = f(x,u), \quad y = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^p.$$

Distinguabilité. Deux états initiaux x et $\widetilde{x}$ sont indistinguables ($xI\widetilde{x}$) si pour tout $t \geq 0$, les sorties $y(t)$ et $\widetilde{y}(t)$ sont identiques pour toute entrée $u(t)$ admissible. Ils sont dits distinguables sinon.

Observabilité globale. Le système est dit observable en x si $I(x) = \{x\}$ et il est observable si $I(x) = \{x\}$ pour tout x.

Observabilité locale

Exemple:

$$\dot{x}_1 = u x_2, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad y = x_1$$

est observable avec $u = 1$ mais pas avec $u \equiv 0$.

L'état x de $\frac{d}{dt}x = f(x,u)$, $y = h(x)$ est localement observable, si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout voisinage U de x, il existe $\eta > 0$ plus petit que ε et un voisinage V de x contenu dans U, tel que pour tout $\widetilde{x} \in V$, il existe une entrée $[0, \eta] \ni t \mapsto u(t)$ qui distingue x et $\widetilde{x}$, i.e. telle que $y(\eta) \neq \widetilde{y}(\eta)$. Le système est localement observable s'il l'est pour tout x.

Critère d'observabilité locale Pour

$$\frac{d}{dt}x = f(x,u), \quad y = h(x)$$

on dérive la sortie

$$h_{k+1} = \frac{d}{dt}(h_k), \quad h_0(x) = h(x).$$

pour essayer d'avoir x en fonction de y et u et leur dérivées en temps en résolvant le système.

$$\begin{cases} h_0(x) = y \\ h_1(x,u) = \dot{y} \\ \vdots \\ h_k(x,u,\ldots,u^{(k-1)}) = y^{(k)} \end{cases}$$

Pour que ce système admette des solutions il faut que y et u vérifient des conditions de compatibilité (en fait p équations différentielles) à la base du diagnostique.

Exemple:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= D(x_1^{in} - x_1) - k_0 \exp(-E/RT)x_1 \\
\dot{T} &= D(T^{in} - T) + \alpha \Delta H \exp(-E/RT)x_1 + u \\
y &= T
\end{aligned}
$$

On a

$$
x_1 = \frac{\dot{y} - D(T^{in} - y) - u}{\alpha \Delta H \exp(-E/Ry)}. \tag{1}
$$

Le système est donc formellement observable et y et u sont reliés par une équation différentielle du second ordre en y et du premier ordre en u, relation utile pour la détection de panne:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y} - D(T^{in} - y) - u}{\alpha \Delta H \exp(-E/Ry)}\right) = Dx_1^{in} - (D + k_0 \exp(-E/Ry))\, \frac{\dot{y} - D(T^{in} - y) - u}{\alpha \Delta H \exp(-E/Ry)}.
$$

Observateur, estimation, moindre carré

On note $\phi_t^u(x)$ la solution de $\dot{x} = f(x,u)$ qui démarre en x. Alors $y(t) = h(\phi_t^u(x))$.

Moindres carrés pour un intervalle d'observation $[0,T]$: x comme l'argument du minimum de

$$J(\xi) = \int_0^T (y(t) - h(\phi_t^u(\xi))^2 \; dt.$$

Cas linéaire: $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$,
$\phi_t^u(x) = \exp(tA)x + \int_0^t \exp((t-s)A)Bu(s) \; ds$ et

$$J(\xi) = \int_0^T (z(t) - C\exp(tA)\xi)^2 \; dt$$

où $z(t) = y(t) - C\int_0^t \exp((t-s)A)Bu(s) \; ds$. On retrouve le filtre de Kalman.

Systèmes linéaires

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{array}$$

où A est une matrice $n \times n$, B une matrice $n \times m$ et C une matrice $p \times n$.

Critère de Kalman Le système est observable si, et seulement si, le rang de la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est égal à $n = \dim(x)$.

On dit que la paire (A, C) est observable si le rang de $\mathcal{O}$ est n.

Observateurs asymptotiques

Supposons

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx.$$

observable. Alors une estimation asymptotique $\widehat{x}$ de x est donnée par

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + Bu(t) + L(\widehat{y} - y(t)), \quad \widehat{y} = C\widehat{x}$$

si la matrice des gains L est telle que $A + LC$ soit stable car

$$\frac{d}{dt}(x - \widehat{x}) = (A + LC)(x - \widehat{x}).$$

Placement des pôles de l'observateur Si (A, C) est observable, il existe L, matrice $n \times p$, telle que le spectre de $A + LC$ soit le même que celui de n'importe quelle matrice réelle $n \times n$.

Moteur électrique

$$\begin{aligned} J\frac{d}{dt}\omega &= k\ \iota - p \\ L\frac{d}{dt}\iota &= -k\ \omega - R\ \iota + u \\ \frac{d}{dt}p &= 0 \end{aligned}$$

est observable à partir du courant $y = \iota$.

Filtrage sans déphasage du courant ι, et estimation de la vitesse mécanique ω et de la charge p via le filtre

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\widehat{p} &= L_p(\widehat{\iota} - \iota) \\ J\frac{d}{dt}\widehat{\omega} &= k\ \widehat{\iota} - \widehat{p} + L_\omega(\widehat{\iota} - \iota) \\ L\frac{d}{dt}\widehat{\iota} &= -k\widehat{\omega} - R\ \widehat{\iota} + u + L_\iota(\widehat{\iota} - \iota) \end{aligned}$$

où les gains L_p, L_ω et L_ι sont choisis pour avoir $A + LC$ stable.

Observateur-contrôleur linéaire

(A, B) commandable: planification de trajectoire $[0, T] \ni t \mapsto (x_r(t), u_r(t))$ et suivi via $u = u_r + K(x - x_r)$ avec $A + BK$ stable.

(A, C) observable: observateur asymptotique

$$\frac{d}{dt}\widehat{x} = A\widehat{x} + L(C\widehat{x} - y) + Bu$$

avec $A + LC$ stable.

Le bouclage dynamique de sortie

$$\begin{array}{ll} u(t) = u_r(t) + K(\widehat{x} - x_r(t)) & \text{contrôleur} \\ \frac{d}{dt}\widehat{x} = A\widehat{x} + Bu(t) + L(C\widehat{x} - y(t)) & \text{observateur} \end{array}$$

assure le suivi asymptotique de la trajectoire de référence $[0, T] \ni t \mapsto (x_r(t), u_r(t))$, bien que tout l'état ne soit pas directement mesuré.