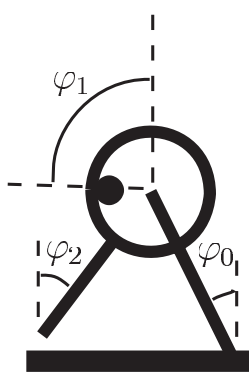


Master d'Ingénierie Mathématique  
 Contrôle des systèmes non-linéaires  
 Examen, durée 3h

Sujet donné par Pierre Rouchon, tous les documents sont autorisés.



Comme le montre la figure ci-contre, ce robot marcheur élémentaire se déplace dans un plan vertical. Il est constitué de deux jambes et d'un disque jouant le rôle de volant d'inertie. La jambe qui repose sur le sol fait un angle  $\varphi_0$  avec la verticale ascendante. La jambe libre fait un angle  $\varphi_1$ . Au centre du disque se trouve deux moteurs. Le moteur de la jambe  $\varphi_0$  (resp.  $\varphi_1$ ) développe un couple  $\tau_0$  (resp.  $\tau_1$ ). La rotation du disque est repérée par l'angle  $\varphi_1$ . La petite pastille noire dessinée en périphérie du disque n'est qu'une marque indiquant le zéro de  $\varphi_1$ . On supposera toujours  $\varphi_0 \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

La dynamique du système est donnée par

$$\begin{cases} J_0 \ddot{\varphi}_0 = mgL \sin \varphi_0 - \tau_0 \\ J_1 \ddot{\varphi}_1 = \tau_0 - \tau_2 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 = \tau_2 \end{cases} \quad (1)$$

avec  $m$  la masse du robot,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $J_0 = m(L_0)^2$ ,  $J_1 = m(L_1)^2$  et  $J_2 = m(L_2)^2$  des moments d'inertie. Les longueurs  $L$ ,  $L_0$  et  $L_1$  sont comparables. La longueur  $L_2$  est nettement plus petite car les jambes sont légères par rapport au disque. On prendra pour simplifier les calculs :

- $L_0 = L_1 = L$  et  $L_2 = \epsilon L$  avec  $0 < \epsilon \ll 1$  ;
- $\tau_0 = mL^2 u_1$  et  $\tau_2 = mL^2 u_2$  où  $u_1$  et  $u_2$  sont les deux contrôles ;
- $\omega = \sqrt{g/L}$ .

Les questions sont regroupées en 4 blocs de 1 à 4. Chaque bloc peut être abordé en partie indépendamment des autres blocs.

1. Points d'équilibre et linéaire tangent.

- (a) Mettre le système sous forme d'état avec  $x = (\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)$  et  $u = (u_1, u_2)$ .
- (b) On suppose  $u = 0$ . Donner les points d'équilibre (on rappelle que  $|\varphi_0| < \pi/2$ ). Le système est-t-il stable ou instable autour de ses points d'équilibre ?
- (c) On considère l'équilibre  $x = 0$ ,  $u = 0$ . Calculer le linéaire tangent, i.e. les matrices  $A$  et  $B$  de  $\dot{x} = Ax + Bu$ . Calculer les valeurs propres de  $A$ .
- (d) Montrer que le linéaire tangent autour de 0 est commandable.

- (e) Montrer que ses deux sorties de Brunovsky sont  $y_1 = \varphi_0 + \varphi_1 + \epsilon^2 \varphi_2$  et  $y_2 = \varphi_2$ . Donner le changement d'état ainsi que le bouclage statique régulier qui met le système sous la forme de Brunovsky.
2. Contrôle rapide de la jambe libre  $\varphi_2$ .

- (a) On considère le sous système  $\epsilon^2 \ddot{\varphi}_2 = u_2$ . Montrer que le bouclage

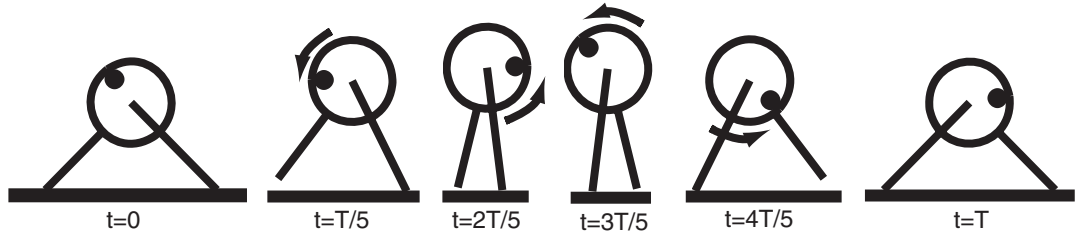
$$u_2 = -2\omega\epsilon \dot{\varphi}_2 - \omega^2(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2) \quad (2)$$

assure la convergence de  $\varphi_2$  vers la consigne  $\bar{\varphi}_2$  supposée ici constante. Donner l'échelle de temps (i.e., les valeurs propres en boucle fermée) de cette convergence.

- (b) On considère maintenant (1) avec le bouclage (2) où  $t \mapsto \bar{\varphi}_2(t)$  est une consigne continûment dérivable qui ne varie notablement que sur des intervalles temporels d'ordre  $1/\omega$ . Ecrire les équations du second ordre (1) dans l'échelle de temps rapide  $\tau = t/\epsilon$ . On notera  $'$  pour  $d/d\tau$ . Mettre ces équations sous forme d'état. On prendra comme état  $z = (\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \varphi_2')$  où les vitesses de  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont dans l'échelle  $t$  et la vitesse de  $\varphi_2$  est dans l'échelle  $\tau$ .
- (c) Dédurre de ce qui précède que, sur des temps d'ordre  $1/\omega$ , les trajectoires de (1) avec le bouclage (2) sont proches de celle de :

$$\ddot{\varphi}_0 = \omega^2 \sin \varphi_0 - u_1, \quad \ddot{\varphi}_1 = u_1, \quad \varphi_2 = \bar{\varphi}_2(t) \quad (3)$$

3. Planification de trajectoires. Le but de cette question est, comme l'illustre la figure ci-dessous, de trouver une trajectoire de (3) qui corresponde à un pas. Dans les questions suivantes on fera l'approximation  $\sin \varphi_0 \approx \varphi_0$ .



- (a) Montrer que

$$\ddot{\varphi}_0 = \omega^2 \varphi_0 - u_1, \quad \ddot{\varphi}_1 = u_1 \quad (4)$$

est commandable avec comme sortie de Brunovsky  $y = \varphi_0 + \varphi_1$ .

- (b) Justifier le fait que faire un pas entre  $t = 0$  et  $t = T > 0$  consiste à trouver, pour la jambe qui repose sur le sol, une trajectoire de (4) vérifiant :

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) &= \alpha, & \dot{\varphi}_0(0) &= 0, & \varphi_1(0) &= \beta, & \dot{\varphi}_1(0) &= 0 \\ \varphi_0(T) &= -\alpha, & \dot{\varphi}_0(T) &= 0, & \varphi_1(T) &= \gamma, & \dot{\varphi}_1(T) &= 0 \end{aligned}$$

où  $2\alpha$  est l'angle aigu entre les deux jambes à  $t = 0$  et  $t = T$ . Les deux angles  $\beta$  et  $\gamma$  sont ici arbitraires.

- (c) On suppose  $\beta = -2\alpha$  et  $\gamma = 2\alpha$ . Avec  $T = \pi/\omega$  montrer que la trajectoire de (4) définie par la sortie de Brunovsky  $y^r(t) = \alpha \sin(\omega(t - T/2))$  permet de faire un pas (on utilise l'exposant  $r$  pour trajectoire de référence). Montrer que  $\varphi_0^r$  et  $\varphi_1^r$  sont alors des fonctions monotones du temps. En déduire le contrôle en boucle ouverte  $[0, T] \ni t \mapsto u_1^r(t)$  qui assure ce transfert.
- (d) Justifier le fait que faire un pas consiste, pour la jambe libre, à trouver une trajectoire de  $\varphi_2$  telle que

$$\varphi_2(0) = -\alpha, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0, \quad \varphi_2(T) = \alpha, \quad \dot{\varphi}_2(T) = 0$$

Montrer que, si  $\pi > |\varphi_2| \geq |\varphi_0|$  à chaque instant, la jambe libre ne heurte pas le sol supposé ici parfaitement horizontal. Montrer enfin que

$$\varphi_2^r(t) = - \left( 1 + \left[ \frac{t(T-t)}{T^2} \right]^2 \right) \varphi_0^r(t)$$

est une bonne trajectoire de référence pour  $\varphi_2$ .

#### 4. Stabilisation et suivi de trajectoires.

- (a) Mettre (4) sous forme d'état. Donner le bouclage et le changement d'état qui met (4) sous forme de Brunovsky (on rappelle que la sortie de Brunovsky est  $y = \varphi_0 + \varphi_1$ ).
- (b) En déduire le bouclage qui stabilise asymptotique (4) à 0. Les pôles en boucle fermée seront pris tous égaux à  $-\omega$ .
- (c) En déduire le feedback qui assure pour (4), le suivi de la trajectoire de référence  $\varphi_0^r(t)$ ,  $\varphi_1^r(t)$  et  $u_1^r(t)$  déduite de la question 3c.

**Master d'Ingénierie Mathématiques**  
**Dynamique et contrôle des systèmes :**  
**stabilité, commandabilité, suivi de trajectoires**  
**Corrigé du Contrôle des connaissances de juin 2005.**

1. (a) On a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= \omega^2 \sin(x_1) - u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= u_1 - u_2 \\ \dot{x}_5 &= x_6, & \dot{x}_6 &= u_2/\epsilon^2 \end{aligned}$$

(b) Les points d'équilibre sont  $x = (0, 0, \alpha, 0, \beta, 0)$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  arbitraires. Comme chaque point d'équilibre est entouré d'une infinité d'autres points d'équilibre, il ne peut être asymptotiquement stable. En jouant avec le paramètre  $\eta \neq 0$ , la trajectoire  $x^\eta(t) = (0, 0, \alpha, 0, \beta + \eta t, \eta)$  démarre aussi près que l'on veut de l'équilibre  $(0, 0, \alpha, 0, \beta, 0)$ . Elle s'en éloigne autant que l'on souhaite pour des temps suffisamment grands. Aussi, chaque équilibre n'est pas stable au sens de Lyapounov.

(c) On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/\epsilon^2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont 0 de multiplicité 4,  $\omega$  et  $-\omega$ .

(d) Un calcul simple montre que la matrice de commandabilité

$$(B, AB, A^2B, A^3B, A^4B, A^5B)$$

est de rang  $6 = \dim x$ . En fait le rang de  $(B, AB, A^2B, A^3B)$  est déjà de rang 6 :

$$(B, AB, A^2B, A^3B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Les relations

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1^{(2)}/\omega^2 \\
x_2 &= y_1^{(3)}/\omega^2 \\
x_3 &= y_1 - \epsilon^2 y_2 - y_1^{(2)}/\omega^2 \\
x_4 &= y_1^{(1)} - \epsilon^2 y_2^{(1)} - y_1^{(3)}/\omega^2 \\
x_5 &= y_2 \\
x_6 &= y_2^{(1)}
\end{aligned}$$

définissent un changement de variables entre  $x$  et  $z = (y_1, y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_1^{(3)}, y_2, y_2^{(1)})$ .  
Le bouclage

$$u_1 = y_1^{(2)} - v_1/\omega^2, \quad u_2 = \epsilon^2 v_2$$

donne la forme de Brunovsky

$$y_1^{(4)} = v_1, \quad y_2^{(2)} = v_2$$

2. (a) La dynamique en boucle fermée est linéaire et stable avec comme pôle double  $\frac{-\omega}{\epsilon}$ . Ainsi  $\varphi_2$  tend vers  $\bar{\varphi}_2$  avec une échelle de temps de convergence très petite  $\epsilon/\omega$ .
- (b) On a

$$\begin{aligned}
\varphi_0'' &= \epsilon^2(\omega^2 \sin \varphi_0 - u_1) \\
\varphi_1'' &= \epsilon^2(u_1 + 2\omega\varphi_2' + \omega^2(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2)) \\
\varphi_2'' &= -2\omega\varphi_2' - \omega^2(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2)
\end{aligned}$$

Avec  $z$  on a la forme d'état suivante :

$$\begin{aligned}
z_1' &= \epsilon z_2 \\
z_2' &= \epsilon(\omega^2 \sin z_1 - u_1) \\
z_3' &= \epsilon z_4 \\
z_4' &= \epsilon(u_1 + 2\omega z_6 + \omega^2(z_5 - \bar{\varphi}_2)) \\
z_5' &= z_6 \\
z_6' &= -2\omega z_6 - \omega^2(z_5 - \bar{\varphi}_2)
\end{aligned}$$

- (c) Il est alors clair que la forme d'état précédente est sous la forme normale de Tikhonov avec comme état lent  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  et comme état rapide  $(z_5, z_6)$ . La dynamique rapide (celle de  $(z_5, z_6)$ ) en considérant  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  comme des

paramètres constants) est asymptotiquement stable et converge vers  $z_5 = \bar{\varphi}_2$ ,  $z_6 = 0$ . Ainsi sur des temps  $\tau$  de l'ordre de  $\omega/\epsilon$  l'approximation lente est valide :

$$\begin{aligned} z_1' &= \epsilon z_2 \\ z_2' &= \epsilon(\omega^2 \sin z_1 - u_1) \\ z_3' &= \epsilon z_4 \\ z_4' &= \epsilon u_1 \\ z_5 &= \bar{\varphi}_2 \\ z_6 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne bien (3) en échelle de temps  $t$ .

3. (a) C'est évident car

$$\varphi_0 = y^{(2)}/\omega^2, \quad \varphi_1 = y - y^{(2)}/\omega^2, \quad u_1 = y^{(2)} - y^{(4)}/\omega^2$$

- (b) En  $t = 0$  la jambe libre est sur le point de ne plus toucher le sol et tout est à vitesse nulle. Donc  $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$  et  $\varphi_0 = -\varphi_2$ . Comme  $\varphi_0 - \varphi_2 = 2\alpha$ , on voit que  $\varphi_0 = \alpha$ . La position initiale du disque est arbitraire et on la note  $\beta$ . Pour traiter l'arrivée en  $t = T$ , il suffit de changer  $\alpha$  en  $-\alpha$ .
- (c) Pour  $y = y^r$ , on a avec la question ??

$$\varphi_0^r = -\alpha \sin(\omega(t-T/2)), \quad \varphi_1^r = 2\alpha \sin(\omega(t-T/2)), \quad u_1^r = -2\alpha\omega^2 \sin(\omega(t-T/2))$$

Il suffit alors de remarquer que lorsque  $t$  va de 0 à  $T$ ,  $\omega(t-T/2)$  va de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$ . Ainsi  $|\varphi_0^r| \leq \alpha$ .

- (d) Voir la réponse à la question ?? pour la justification. La différence de hauteur entre le pied de la jambe libre avec celui de la jambe au sol est proportionnelle à  $\cos \varphi_0 - \cos \varphi_2$ . Cette différence reste bien positive dès que  $\pi > |\varphi_2| \geq |\varphi_0|$ . On vérifie sans peine que  $\pi > |\varphi_2^r| \geq |\varphi_0^r|$  à chaque instant car  $|\varphi_0^r| \leq \alpha < \pi/2$ . De plus  $\dot{\varphi}_2^r(0) = \dot{\varphi}_2^r(T) = 0$  avec  $\varphi_2^r(0) = -\varphi_0^r(0) = -\alpha$  et  $\varphi_2^r(T) = -\varphi_0^r(T) = \alpha$ .
4. (a) Avec  $x = (\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \varphi_1, \dot{\varphi}_1)$  on a

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \omega^2 x_1 - u_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u_1$$

Le changement de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= y^{(2)}/\omega^2, & x_2 &= y^{(3)}/\omega^2 \\ x_3 &= y - y^{(2)}/\omega^2, & x_4 &= y^{(1)} - y^{(3)}/\omega^2 \end{aligned}$$

entre  $x$  et  $z = (y, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$  avec le bouclage  $u_1 = y^{(2)} - v/\omega^2$  donne  $y^{(4)} = v$ .

(b) Il suffit de poser

$$v = -4\omega y^{(3)} - 6\omega^2 y^{(2)} - 4\omega^3 y^{(1)} - \omega^4 y$$

(l'opposé du coefficient devant  $y^{(3)}$  (resp.  $y^{(2)}$ ,  $y^{(1)}$  et  $y$ ) est la somme des pôles (resp. la somme des doubles produits, la somme des triples produits, le produit des 4 pôles)).

(c) Il faut se mettre en écart par rapport à la trajectoire pour obtenir le bouclage de suivi :

$$v = y^r - 4\omega(y^{(3)} - (y^r)^{(3)}) - 6\omega^2(y^{(2)} - (y^r)^{(2)}) - 4\omega^3(y^{(1)} - (y^r)^{(1)}) - \omega^4(y - y^r)$$

où

$$y = \varphi_0 + \varphi_1, \quad y^{(1)} = \dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1, \quad y^{(2)} = \omega^2 \varphi_0, \quad y^{(3)} = \omega^2 \dot{\varphi}_0.$$