Master d'Ingénierie Mathématique
Contrôle des systèmes non-linéaires
Examen, durée 3h
Sujet donné par Pierre Rouchon, tous les documents sont autorisés.

Contrôle d'un système quantique à deux états

Nous prendrons ici le modèle de spin fictif $\frac{1}{2}$ associé à un système quantique à deux états. Nous le supposerons dans un champs magnétique co-linéaire au vecteur $\vec{B} = u\vec{e}_1 + \Omega\vec{e}_3$ où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un trièdre ortho-normé, la constante $\Omega > 0$ est la pulsation de Larmor et u est le contrôle scalaire. Le système est décrit par les équations de Bloch avec comme état un vecteur $\vec{\sigma} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ obéissant à la dynamique

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma} = \vec{\sigma} \wedge \vec{B} \tag{1}$$

où $\wedge$ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ euclidien: ($\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$). Si on mesure le spin selon l'axe $\vec{e}_1$, la probabilité d'avoir $+\frac{1}{2}$ est $(1 + x_1)/2$ et $-\frac{1}{2}$, $(1 - x_1)/2$. Ainsi $x_1/2$ s'interprète comme la valeur moyenne du spin selon l'axe $\vec{e}_1$. Il en est de même des autres composantes de $\vec{\sigma}$.

1. Montrer $\|\vec{\sigma}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ est constante au cours du temps. Le système (1) est-il commandable pour $\vec{\sigma} \in \mathbb{R}^3$?

A partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, on suppose que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

2. **Boucle ouverte**
   (a) Montrer que
   $$\frac{d}{dt}x_1 = \Omega x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = -\Omega x_1 + u x_3, \quad \frac{d}{dt}x_3 = -u x_2. \tag{2}$$
   (b) On suppose $u = \bar{u} \geq 0$ constant. Quels sont les points d'équilibre (respectant $\|\vec{\sigma}\|^2 = 1$)?
   (c) Quelles sont les valeurs propres autour des points d'équilibre de la question précédente? Que peut-on en déduire sur leur stabilité au sens de Lyapounov ?
   (d) On suppose toujours $u = \bar{u}$. Montrer que $V(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}x_1 + \Omega x_3$ est une constante du mouvement. En déduire que les points d'équilibre de la question 2b sont stables au sens Lyapounov. Sont-ils asymptotiquement stable ?

3. **Etude du tangent** On considère le point d'équilibre $\vec{\sigma} = \vec{e}_3$ associé à $\bar{u} = 0$.
   (a) Calculer les équations du linéaire tangent. On notera par $z_i = \delta x_i$ ($i = 1, 2, 3$) les petits écarts à l'équilibre pour l'état x (le contrôle u restant petit).
   (b) Ce système est-il commandable ? Donner sa partie commandable et la sortie de Brunovsky associée.
   (c) Construire un bouclage d'état $u = -Kz$ stabilisant la partie commandable à 0 et exprimer les coefficients de K en fonction des deux pôles (p_1, p_2) en boucle fermée.

4. **Champ faible et contrôle résonnant**.
   (a) On considère le changement de variables
   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
   Montrer que les équations (2) du système dans les variables $Y = (y_1, y_2, y_3)$ prennent la forme suivante
   $$\frac{d}{dt}y_1 = -u\sin(\Omega t)y_3, \quad \frac{d}{dt}y_2 = u\cos(\Omega t)y_3, \quad \frac{d}{dt}y_3 = u\sin(\Omega t)y_1 - u\cos(\Omega t)y_2$$

(b) On choisit un contrôle résonnant $u = v\cos(\Omega t)$ où v est un petit contrôle lentement variable $|v| \ll \Omega$ et $\left|\frac{d}{dt}v\right| \ll \Omega v$. Montrer que la dynamique s'écrit $\frac{d}{dt}Y = vF(Y, \Omega t)$ où F est une fonction 2π-périodique de son second argument. On admettra que les trajectoires de $\frac{d}{dt}Y = vF(Y, \Omega t)$ sont proches de celles du système moyen $\frac{d}{dt}Y = v\bar{F}(Y)$ où $\bar{F}(Y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(Y,\theta)\, d\theta$. Calculer $\bar{F}$.

(c) Le système moyen avec le contrôle v est-il commandable ? Est-il possible de trouver, pour le système moyen, une commande v qui assure le transfert de $Y = (0, 0, -1)$ en $t = 0$ à $Y = (0, 0, +1)$ en $t = T$? Si oui, donner toutes les commandes $[0, T] \mapsto v(t)$ qui assurent un tel transfert (pour être cohérent on suppose $T \gg 2\pi/\Omega$).

5. **Champ fort** Le but est de construire, pour le système (2), un contrôle $t \mapsto u(t)$, continûment dérivable en temps, qui assure le transfert de $\vec{\sigma} = -\vec{e}_3$ en $t = 0$ à $\vec{\sigma} = \vec{e}_3$ en $t = T_0$ où $T_0 = 2/\Omega$. Quitte à changer t en Ωt et u en u/Ω, on prendra dans les questions ci-dessous $\Omega = 1$ et donc $T_0 = 2$.

(a) Montrer que que $y(t) := x_1(t)$ est une sortie plate pour le système non-linéaire (2) sur la sphère unité. On exprimera x et u en fonction de y et ses dérivées en utilisant le fait que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

(b) On pose $y(t) = (t(2-t))^2(1-t)$. On admet que la fonction $f(t) = 1 - y^2(t) - \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2$ est positive sur $[0, 2]$, atteint sur $[0, 2]$ son minimum uniquement en $t = 1$ avec $\frac{d^2}{dt^2}f(1) > 0$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ -\sqrt{f(t)} & \text{si } t \in [0, 1] \\ \sqrt{f(t)} & \text{si } t \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } t > 2. \end{cases}$$

est deux fois continûment dérivable.

(c) Donner en fonction de y et g une trajectoire $t \mapsto \vec{\sigma}(t)$ continûment dérivable et un contrôle continûment dérivable $t \mapsto u(t)$ nul en dehors de $[0, 2]$ qui assure le transfert de $-\vec{e}_3$ à $+\vec{e}_3$.

(d) Montrer que le contrôle précédent assure le transfert symétrique de $\vec{e}_3$ à $-\vec{e}_3$.

6. **Dé-cohérence et dissipation** On considère la modification suivante du système (2):

$$\frac{d}{dt}x_1 = \Omega x_2 + \Gamma x_1 x_3, \quad \frac{d}{dt}x_2 = -\Omega x_1 + u x_3 + \Gamma x_2 x_3, \quad \frac{d}{dt}x_3 = -u x_2 + \Gamma((x_3)^2 - 1) \qquad (3)$$

où $\Gamma > 0$, modification correspondant à la dynamique sans saut dans les modèles de trajectoires quantiques de Monte-Carlo.

(a) Montrer que, si $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ à $t = 0$, alors $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ pour tout t.

(b) On suppose $u = 0$ et on se place sur la sphère unité $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Calculer les deux points d'équilibre de (3) et les valeurs propres associées. Que peux-t-on en déduire sur leur stabilité ?

(c) On suppose encore $u = 0$. Montrer que, sur la sphère unité, la fonction $V(x) = x_3$ est une fonction de Lyapounov. En déduire que toutes les trajectoires sauf une convergent vers l'un des deux points d'équilibre calculés à la question 6b.

Corrigé: contrôle d'un système quantique à deux états

1. Comme $\frac{d}{dt}\vec{\sigma}$ est orthogonal à $\vec{\sigma}$ sa longueur reste constante. Le système n'est pas commandable.
2. Boucle ouverte
   (a) Il suffit de développer le produit vectoriel en coordonnées cartésiennes.
   (b) On doit résoudre
   $$0 = \Omega x_2, \quad 0 = -\Omega x_1 + \bar{u}x_3, \quad 0 = -\bar{u}x_2$$
   Les première et troisième équations donnent $x_2 = 0$, la seconde $x_1 = \frac{\bar{u}}{\Omega}x_3$. Comme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ on obtient une équation pour x_3 qui admet deux solutions $\pm\sqrt{\frac{\Omega^2}{\Omega^2+\bar{u}^2}}$. Ainsi on a deux points d'équilibre sur la sphère unité ($\bar{u} \geq 0$):
   $$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\bar{u}^2}{\Omega^2 + \bar{u}^2}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \bar{u}^2}}$$
   (c) Le polynôme caractéristique de la matrice anti-symétrique
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \Omega & 0 \\ -\Omega & 0 & \bar{u} \\ 0 & -\bar{u} & 0 \end{pmatrix}$$
   est $\det(sI - A) = s(s^2 + \Omega^2 + \bar{u}^2)$ et ses racines sont
   $$(0, +\imath\sqrt{\Omega^2 + \bar{u}^2}, -\imath\sqrt{\Omega^2 + \bar{u}^2}).$$
   Ainsi, avec le théorème 5, page 21 du cours, on peut conclure à la stabilité au sens de Lyapounov mais pas asymptotique (théorème 4, page 19).
   (d) On a $\frac{d}{dt}V = \bar{u}\frac{d}{dt}x_1 + \Omega\frac{d}{dt}x_3 = \bar{u}\Omega x_2 - \Omega\bar{u}x_2 = 0$. Ainsi, nous avons deux intégrales premières pour caractériser les trajectoires:
   $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{et} \quad \bar{u}x_1 + \Omega x_3 = \bar{u}x_1^0 + \Omega x_3^0.$$
   On reconnaît l'intersection de la sphère unité avec un plan de vecteur orthogonal $\bar{u}\vec{e}_1 + \Omega\vec{e}_3$. Les trajectoires sont donc des cercles tracés sur la sphère unité. On en déduit sans peine la stabilité au sens de Lyapounov (sans être asymptotique).
3. Etude du tangent
   (a) Un calcul direct donne
   $$\frac{d}{dt}z_1 = \Omega z_2, \quad \frac{d}{dt}z_2 = -\Omega z_1 + u, \quad \frac{d}{dt}z_3 = 0 \tag{4}$$
   (b) Ce système n'est pas commandable car z_3 est un invariant non trivial. Sa partie commandable correspond à z_1 et z_2. La sortie de Brunovsky est $y = z_1$ car
   $$z_1 = y, \quad z_2 = \frac{\dot{y}}{\Omega}, \quad u = \Omega y + \frac{\ddot{y}}{\Omega}.$$
   (c) On ne considère donc que le sous-système à deux états (z_1, z_2). Le bouclage
   $$u = \Omega z_1 + \frac{v}{\Omega}$$
   donne la forme de Brunovsky $\frac{d^2}{dt^2}y = v$. On pose alors $v = (p_1 + p_2)\dot{y} - p_1p_2y$ pour avoir (p_1, p_2) comme pôles en boucle fermée. En revenant dans les variables (z_1, z_2, u) au lieu des variables $(y, \dot{y}, v)$ on obtient le feedback stabilisant:
   $$u = \left(\Omega - \frac{p_1p_2}{\Omega}\right) z_1 + (p_1 + p_2)z_2$$

4. **Champ faible**.

   (a) Avec $x_1 = \cos(\Omega t)y_1 + \sin(\Omega t)y_2$, et $x_2 = -\sin(\Omega t)y_1 + \cos(\Omega t)y_2$ l'équation différentielle $\frac{d}{dt}x_1 = \Omega x_2$ devient
   $$\cos(\Omega t)\frac{d}{dt}y_1 + \sin(\Omega t)\frac{d}{dt}y_2 = 0.$$
   De même $\frac{d}{dt}x_2 = -\Omega x_1 + ux_3$ devient alors
   $$-\sin(\Omega t)\frac{d}{dt}y_1 + \cos(\Omega t)\frac{d}{dt}y_2 = uy_3.$$
   Ainsi on a
   $$\frac{d}{dt}y_1 = -u\sin(\Omega t)y_3, \quad \frac{d}{dt}y_2 = u\cos(\Omega t)y_3, \quad \frac{d}{dt}y_3 = u\sin(\Omega t)y_1 - u\cos(\Omega t)y_2$$

   (b) Avec $u = v\cos(\Omega t)$, on a
   $$F(Y, \Omega t) = \begin{pmatrix} -\cos(\Omega t)\sin(\Omega t)y_3 \\ \cos^2(\Omega t)y_3 \\ \cos(\Omega t)\sin(\Omega t)y_1 - \cos^2(\Omega t)y_2 \end{pmatrix}.$$
   Ainsi
   $$\bar{F}(Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_3/2 \\ -y_2/2 \end{pmatrix}.$$

   (c) Le système moyen n'est pas commandable car y_1 et $y_2^2 + y_3^2$ sont des intégrales premières non triviales. Pour le transfert, on a $y_1 = 0$ et $y_2^2 + y_3^2 = 1$. On peut donc écrire $y_2 = \sin\phi$ et $y_3 = \cos\phi$ avec $\frac{d}{dt}\phi = v/2$. Donc les commandes $[0, T] \mapsto v(t)$ qui assurent le transfert s'écrivent comme le double de la dérivée d'une fonction $t \mapsto \phi(t)$ telle que $\phi(0) = -\pi/2 \mod (2\pi)$ et $\phi(T) = \pi/2 \mod (2\pi)$.

5. **Champ fort**

   (a) L'équation sur $\frac{d}{dt}x_1$ donne $x_2 = \dot{y}$. Comme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, on a $y^2 + \dot{y}^2 + x_3^2 = 1$. Ainsi $x_3 = \pm\sqrt{1 - y^2 - \dot{y}^2}$. le contrôle u s'obtient avec $u = -\frac{\dot{x}_3}{x_2}$, soit $u = \pm\frac{y+\ddot{y}}{\sqrt{1-y^2-\dot{y}^2}}$.

   (b) Pour t proche de 0, $y(t)$ est un $O(t^2)$ et $\dot{y}$ un $O(t)$. Donc f et g sont C^2 en 0. De même f et g sont C^2 en $t = 2$. Il reste à étudier g autour de 1. Un développement limité de f autour de 1 donne
   $$f(t) = (t-1)^2(\ddot{f}(1)/2 + O(|t-1|))$$
   Comme $\ddot{f}(1) > 0$, g s'écrit autour de 1
   $$g(t) = (t-1)\sqrt{\ddot{f}(1)/2 + O(|t-1|)}.$$
   Donc g est régulière en $t = 1$ (analytique). En conclusion g est C^2 sur $\mathbb{R}$.

   (c) On obtient une trajectoire du système en prenant
   $$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = g, \quad u = -\dot{g}/\dot{y}.$$
   En effet $u = -\dot{x}_3/x_2 = -\dot{g}/\dot{y}$. Reste à vérifier que ce quotient est bien défini lorsque $\dot{y} = 0$. On a $\dot{g} = -\dot{y}(y + \ddot{y})/g$ et donc $-\dot{g}/\dot{y} = (y + \ddot{y})/g$. Ce quotient est bien défini lorsque $\dot{y} = 0$ car alors $g \neq 0$.

   (d) Il suffit d'utiliser la symétrie $\vec{\sigma} \mapsto -\vec{\sigma}$.

6. (a) Comme $\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2\Gamma x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$, on voit que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ reste à 1.

(b) La troisième équation donne $x_3 = \pm 1$. Comme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ on a $x_1 = x_2 = 0$. Les deux points d'équilibre sont $(0, 0, \pm 1)$. La matrice Jacobienne en $(0, 0, \pm 1)$ est

$$\begin{pmatrix} \pm\Gamma & \Omega & 0 \\ -\Omega & \pm\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2\Gamma \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont $\pm 2\Gamma$, $\frac{\pm\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Omega^2}}{2}$ et $\frac{\pm\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4\Omega^2}}{2}$. Ainsi $(0, 0, 1)$ est instable (toutes les valeurs propres sont à partie réelle > 0) et $(0, 0, -1)$ est localement asymptotiquement stable car toutes les valeurs sont à partie réelle < 0.

(c) Comme on est sur la sphère $|x_3| \leq 1$. Comme $\frac{d}{dt}V = \Gamma(x_3^2 - 1)$ on a $\frac{d}{dt}V \leq 0$. Le principe d'invariance de LaSalle s'applique ici. On considère donc les solutions du système sur-déterminé

$$\frac{d}{dt}x_1 = \Omega x_2 + \Gamma x_1 x_3, \quad \frac{d}{dt}x_2 = -\Omega x_1 + \Gamma x_2 x_3, \quad \frac{d}{dt}x_3 = \Gamma((x_3)^2 - 1), \quad \frac{d}{dt}V = 0$$

dont les seules solutions sont les deux points d'équilibre calculés ci-dessus $(0, 0, \pm 1)$. Comme les trajectoires sur la sphère unité qui ne démarrent pas en $(0, 0, 1)$ ne peuvent converger vers $(0, 0, 1)$ car ce point d'équilibre est instable selon toutes les directions (toutes les valeurs propres sont instables), la seule possibilité est la convergence vers l'autre point $(0, 0, -1)$. Son bassin d'attraction est donc la sphère unité privée de l'équilibre instable $(0, 0, 1)$.