# Mécanique quantique: qubit, *n*-qubit et la boite à photons du LKB

Pierre Rouchon

Centre Automatique et Systèmes
Mines ParisTech
pierre.rouchon@mines-paristech.fr

Novembre 2018

# Quelques références

- Le cours de Mécanique Quantique de C. Cohen-Tannoudji B. Diu et F. Laloë. Hermann, Paris, Volumes I& II, 1977.
- Cours en ligne de Serge Haroche au Collège de France :
  `http://www.college-de-france.fr/site/en-serge-haroche/_course.htm`
- Exploring the quantum : atoms, cavities and photons. S. Haroche and J-M Raimond. Oxford University Press (2006).
- Cours de Peskill au Caltech intitulé Quantum computation :
  `www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/#lecture`
- Quantum Computation and Quantum Information. M.A. Nielsen and I.Chuang, Cambridge Univ.Press. (2000)
- Le site web d'une entreprise : `http://www.idquantique.com`

# Plan

1. La boite à photons du LKB
   - Trois règles fondamentales
   - Physique simplifiée et modèle de Markov
   - Convergence de la chaîne de Markov (complément)
2. Etats quantiques, opérateurs, mesures et produit tensoriel
   - Bra, Ket, états purs et états mixtes
   - Opérateurs et équation différentielle de Schrödinger
   - Mesures et réduction du paquet d'ondes
   - Systèmes composites et produit tensoriel
3. Le qubit
   - Qubit : système à deux niveaux
   - Mesure projective d'un qubit
   - Compléments : manipulation d'un qubit et oscillations de Rabi
   - Compléments : matrice densité d'un qubit et sphère de Bloch
4. *n*-qubit : prototype de système composite
   - Produit tensoriel
   - Mesure sur un 2-qubit
5. Oscillateur harmonique

# Trois règles fondamentales [1]

1. Schrödinger : fonction d'onde $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (entrée $u$)

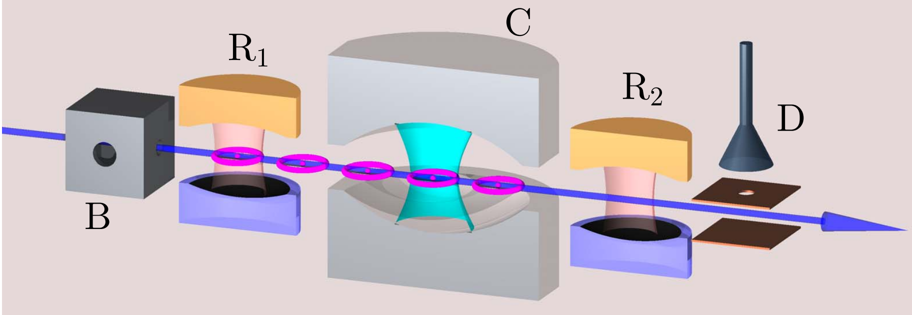
$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle = -\tfrac{i}{\hbar}\boldsymbol{H}|\psi\rangle, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + u\boldsymbol{H}_1,$$

2. Origine de la dissipation : reduction du paquet d'ondes induit par la mesure de l'observable $\boldsymbol{O}$ de décomposition spectrale $\sum_\mu \lambda_\mu \boldsymbol{P}_\mu$ :
   - résultat de la mesure $\mu$ avec proba.. $\mathbb{P}_\mu = \langle\psi|\,\boldsymbol{P}_\mu\,|\psi\rangle$ dépendant de $|\psi\rangle$ juste avant la mesure
   - action en retour de la mesure si $\mu = y$ (sortie $y$) :

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi\rangle_+ = \frac{\boldsymbol{P}_y\,|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\,\boldsymbol{P}_y\,|\psi\rangle}}$$

3. Produit tensoriel pour les systèmes composites $(S_1, S_2)$ :
   - Espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
   - Hamiltonien $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 \otimes \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{H}_{int} + \boldsymbol{I}_1 \otimes \boldsymbol{H}_2$
   - Observable locale sur $S_2$ (uniquement) : $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{I}_1 \otimes \boldsymbol{O}_2$.

1. S. Haroche and J.M. Raimond. *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities and Photons.* Oxford Graduate Texts, 2006.




Les photons piégés entre les deux miroirs de la cavité *C* sont mesurés avec des atomes (les petits anneaux couleur rose foncé) sortant de *B*. Les atomes traversent l'un après l'autre la cavité *C*. Ils sont manipulés individuellement avant et après leur passage dans la cavité dans $R_1$ et $R_2$. Ils sont mesurés par le détecteur *D* soit dans un état de basse énergie $|g\rangle$ soit dans un état de forte énergie $|e\rangle$.
Serge Haroche a reçu le prix Nobel de Physique en 2012 [2] pour ses travaux sur la boite à photon(s) (électro-dynamique quantique en cavité).

2. Prix partagé avec le physicien américain David Wineland du NIST.

Système bipartite $(S, M)$ :

- $S$ les photons piégé dans $C$ :
  $\mathcal{H}_S = \left\{ |\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle \mid (\psi_n)_{n=0}^{\infty} \in l^2(\mathbb{C}) \right\}$, avec $|n\rangle$ état de Fock avec exactement $n$ photons.
- $M$ l'atome : un système à deux niveaux, un niveau bas $|g\rangle$ et un niveau haut $|e\rangle$ ; $\mathcal{H}_M = \mathbb{C}^2$ avec comme base orthonormée $(|g\rangle, |e\rangle)$.

Les atomes sortent de $B$ dans l'état $|g\rangle$ au rythme d'un atome par période $\tau$. Entre $t = 0^+$ et $t = \tau^-$ :

- à $t = 0^+$ : un atome sort de $B$ dans l'état $|g\rangle \in \mathcal{H}_M$
- à $t = t_1$ : l'atome est entre $R_1$ et $C$
- à $t = t_c$ : l'atome est entre $C$ et $R_2$
- à $t = t_2$ : l'atome est entre $R_2$ et $D$
- à $t = \tau^-$ l'atome est mesuré dans $D$ ;

A $t = \tau^+$, l'atome quitte $D$ juste au moment où un autre atome préparé en $|g\rangle$ sort de $B$

# Physique simplifiée : les évolutions unitaires de $t = 0^+$ à $t = \tau^-$

L'état $|\Psi\rangle_t \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$ à l'instant $t$ évolue selon :

- $|\Psi\rangle_{0^+} = |\psi\rangle_{0^+} \otimes |g\rangle$ où $|\psi\rangle_{0^+} \in \mathcal{H}_S$ est l'état des photons piégés dans $C$ à $t = 0^+$.
- $|\Psi\rangle_{\tau_1} = U(\tau_1)\,|\Psi\rangle_{0^+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi\rangle_{0^+} \otimes |g\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi\rangle_{0^+} \otimes |e\rangle$ car dans $R_1$ la manipulation ne porte que sur l'atome avec le propagateur $U(\tau_1) = \mathbb{I} \otimes U_{R_1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle g| - |g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle e|)$.
- $|\Psi\rangle_{\tau_c} = U(\tau_c)\,|\Psi\rangle_{\tau_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\imath \frac{\theta}{2} N}\,|\psi\rangle_{0^+} \otimes |g\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\imath \frac{\theta}{2} N}\,|\psi\rangle_{0^+} \otimes |e\rangle$ ; intrication cavité/atome : hamiltonien $H = \frac{\Omega(t)}{2} N \otimes (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$ ($N = \sum_n |n\rangle\langle n|$) produisant un propagateur de la forme $U(\tau_c) = e^{-\imath \frac{\theta}{2} N} \otimes |e\rangle\langle e| + e^{\imath \frac{\theta}{2} N} \otimes |g\rangle\langle g|$ avec $\theta = \int_{\tau_1}^{\tau_c} \Omega(t)dt$.
- $|\Psi\rangle_{\tau_2} = \imath \sin\left(\frac{\theta}{2} N\right)\,|\psi\rangle_{0^+} \otimes |g\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2} N\right)\,|\psi\rangle_{0^+} \otimes |e\rangle$ car l'évolution dans $R_2$ est la même que celle dans $R_1$ : $|\Psi\rangle_{\tau_2} = \mathbb{I} \otimes U_{R_2}\,|\Psi\rangle_{\tau_c}$ ($U_{R_2} = U_{R_1}$).

Il ne se passe rien entre $R_2$ et $D$, donc $|\Psi\rangle_{\tau^-} = |\Psi\rangle_{\tau_2}$. On part de $|\Psi\rangle_{0^+} = |\psi\rangle_{0^+} \otimes |g\rangle$. Juste avant la mesure de $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ en $D$ on a

$$|\Psi\rangle_{\tau^-} = \left(M_g \, |\psi\rangle_{0^+}\right) \otimes |g\rangle + \left(M_e \, |\psi\rangle_{0^+}\right) \otimes |e\rangle$$

avec $M_g = \imath \sin\left(\frac{\theta}{2} N\right)$ et $M_e = \cos\left(\frac{\theta}{2} N\right)$. La réduction du paquet d'ondes juste après la mesure en $t = \tau^+$ donne :

$$|\Psi\rangle_{\tau^+} = \begin{cases} \frac{M_g |\psi\rangle_{0^+}}{\sqrt{p_g}} \otimes |g\rangle\,, & \text{avec la probabilité } p_g = \left\langle \psi | M_g^\dagger M_g | \psi \right\rangle_{0^+}\,; \\ \frac{M_e |\psi\rangle_{0^+}}{\sqrt{p_e}} \otimes |e\rangle\,, & \text{avec la probabilité } p_e = \left\langle \psi | M_e^\dagger M_e | \psi \right\rangle_{0^+}. \end{cases}$$

Ainsi $|\Psi\rangle_{\tau^+} = |\psi\rangle_{\tau^+} \otimes |\mu\rangle$ ($\mu = g$ où $e$) est de nouveau un état séparable avec

$$|\psi\rangle_{\tau^+} = \begin{cases} \frac{M_g |\psi\rangle_{0^+}}{\sqrt{p_g}}, & \text{avec la probabilité } p_g = \left\langle \psi | M_g^\dagger M_g | \psi \right\rangle_{0^+}\,; \\ \frac{M_e |\psi\rangle_{0^+}}{\sqrt{p_e}}, & \text{avec la probabilité } p_e = \left\langle \psi | M_e^\dagger M_e | \psi \right\rangle_{0^+}. \end{cases}$$

On note avec un indice $k$ l'état des photons en $t = k\tau^+$, pour $k \in \mathbb{N}$.
Pour les états purs, on a la chaîne de Markov d'état le vecteur d'onde $|\psi\rangle$ :

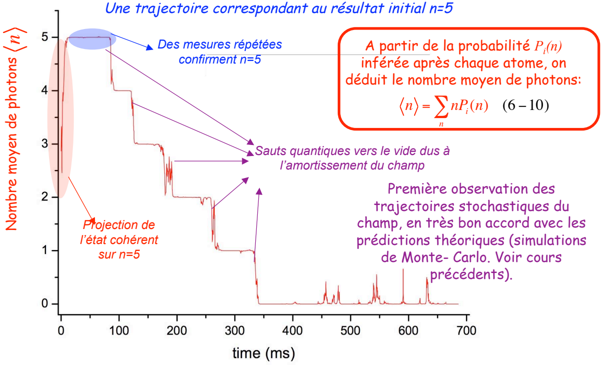
$$|\psi\rangle_{k+1} = \begin{cases} \frac{M_g|\psi\rangle_k}{\sqrt{p_{g,k}}}, & \text{avec la probabilité } p_{g,k} = \left\langle \psi | M_g^\dagger M_g | \psi \right\rangle_k ; \\ \frac{M_e|\psi\rangle_k}{\sqrt{p_{e,k}}}, & \text{avec la probabilité } p_{e,k} = \left\langle \psi | M_e^\dagger M_e | \psi \right\rangle_k . \end{cases}$$

Pour les états arbitraires et a priori mixtes on a la chaîne de Markov d'état, la matrice densité $\rho$ :

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \frac{M_g \rho_k M_g^\dagger}{\mathrm{tr}\left(M_g \rho_k M_g^\dagger\right)}, & \text{avec la probabilité } p_{g,k} = \mathrm{tr}\left(M_g \rho_k M_g^\dagger\right) ; \\ \frac{M_e \rho_k M_e^\dagger}{\mathrm{tr}\left(M_e \rho_k M_e^\dagger\right)}, & \text{avec la probabilité } p_{e,k} = \mathrm{tr}\left(M_e \rho_k M_e^\dagger\right) ; \end{cases}$$

Partant d'une même condition initiale $\rho_0$, chaque réalisation donne une trajectoire $k \mapsto \rho_k$ différente, une trajectoire quantique (en temps discret).
Nous allons voir que chacune de ses trajectoires converge vers un état pur $|n\rangle\langle n|$, un état de Fock. Des simulations de type Monte-Carlo permettent de s'en rendre compte (script MATLAB `QNDphoton.m`).

## Valeur moyenne du nombre de photons le long d'une longue séquence de mesure: observation d'une trajectoire stochastique




**Une autre trajectoire expérimentale partant d'un état cohérent à 3 photons**

3. Source : Serge Haroche, Collège de France, notes de cours 2007/2008.

Avec $M_g = \sin(\theta N/2)$, $M_e = \cos(\theta N/2)$ et $\theta/\pi$ irrationnel, on considère $\rho_{k+1} = \frac{M_{\mu_k}\rho_k M_{\mu_k}^\dagger}{\mathrm{tr}\left(M_{\mu_k}\rho_k M_{\mu_k}^\dagger\right)}$ avec $\mu_k = \mu \in \{g, e\}$ de proba. $p_{\mu,k} = \mathrm{tr}\left(M_\mu \rho_k M_\mu^\dagger\right)$.
Si $\rho_0 = |n\rangle\langle n|$, alors $\rho_k \equiv |n\rangle\langle n|$ : chaque état de Fock est un point stationnaire.
Comme $\mathbb{E}\left(\langle n|\rho_{k+1}|n\rangle \setminus \rho_k\right) = \langle n|\rho_k|n\rangle$, chaque $\langle n|\rho_k|n\rangle$ est une martingale[4].
Avec l'identité $px^2 + (1-p)y^2 = (px + (1-p)y)^2 + p(1-p)(x-y)^2$, on montre que $V(\rho) = 1 - \sum_n \langle n|\rho|n\rangle^2$ est une super-martingale[5] positive :
$\mathbb{E}\left(V(\rho_{k+1}) \setminus \rho_k\right) = V(\rho_k) - Q(\rho_k)$ où $Q(\rho) \geq 0$ est donné par

$$Q(\rho) = p_g(1-p_g)\left(\sum_n \left(\frac{\sin^2(n\theta/2)}{p_g} - \frac{\cos^2(n\theta/2)}{1-p_g}\right)^2 \langle n|\rho|n\rangle^2\right)$$

avec $p_g = \sum_n \sin^2(n\theta/2)\langle n|\rho|n\rangle$.
Ainsi $\mathbb{E}\left(Q(\rho_k)\right)$ converge vers 0 et donc $Q(\rho_k)$ converge vers 0 pour presque toute trajectoire $\rho_k$. Or $Q(\rho) = 0$ ssi existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\rho = |n\rangle\langle n|$ car $\rho$ est aussi une matrice densité ($\rho \geq 0$, $\rho^\dagger = \rho$ et $\mathrm{tr}(\rho) = 1$).

---

4. Son espérance est constante.
5. Son espérance décroît.

$\mathcal{H}$ Hilbert de dim. finie $d > 0$, de base hilbertienne $(|n\rangle)_{1 \leq n \leq d}$ .
Notations de Dirac : Bra $\langle \bullet |$ : co-vecteurs ; Ket $| \bullet \rangle$ : vecteurs ;
$^\dagger$ : transposition hermitienne ;

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{d} \psi_n |n\rangle , \quad |\psi\rangle^\dagger = \langle\psi| = \sum_{n=1}^{d} \psi_n^* \langle n| , \quad \psi_n \in \mathbb{C}.$$

Etat quantique pur : $|\psi\rangle$ de longueur $1 = \langle\psi|\psi\rangle = \sum_n |\psi_n|^2$.
Le produit hermitien : $\langle\psi|\phi\rangle = \sum_n \psi_n^* \phi_n$ ; $\langle\psi|\phi\rangle^\dagger = \langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle$.
Projecteur orthogonal $P$ sur le sous espace vectoriel de base hilbertienne $(|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_p\rangle)$

$$P = \sum_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| .$$

# Etats mixtes, opérateur densité $\rho$

Un mélange statistique d'états purs ne peut pas être décrit avec des moyennes portant directement sur des vecteurs appartenant à la sphère unité de $\mathcal{H}$ (prendre $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $|\psi_k\rangle = \cos(2k\pi/3)\,|1\rangle + \sin(2k\pi/3)\,|2\rangle$, $k = 0, 1, 2$ de probabilité $1/3$)
$\rho$ : moyenne sur les projecteurs orthogonaux associés aux états quantiques purs ($\rho = \frac{1}{3}\left(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_3\rangle\langle\psi_3|\right)$) :

$$\mathcal{D} = \left\{\rho \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \mid \rho^\dagger = \rho,\ \rho \geq 0,\ \mathrm{tr}\,(\rho) = 1\right\}.$$

$\rho$ diagonalisable en base orthonormée. Pour un spectre non dégénéré :

$$\rho = \sum_n p_n\, |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\,, \quad \mathrm{tr}\,(\rho) = 1 = \sum_n p_n.$$

Pour un spectre dégénéré : $\rho = \sum_{n'} p_{n'} P_{n'}$ où $P_{n'}$ est le projecteur orthogonal sur l'espace propre associé à la valeur propre $p_{n'}$.
$\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) \leq 1$. Si $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = 1$ alors $\rho$ est de rang 1 : $\rho$ est donc un état pur $|\phi\rangle\langle\phi|$.

Un opérateur hermitien $H$ : auto-adjoint pour le produit scalaire hermitien $H = H^\dagger$.
Dans une base orthonormée, $(|n\rangle)_{n=1,\ldots,d}$, est associé à l'opérateur $H$ la matrice hermitienne $(H_{n,n'})_{1\leq n,n'\leq d}$ avec $H_{n,n'} = \langle n|H|n'\rangle \in \mathbb{C}$ :

$$H = \sum_{n,n'} H_{n,n'} \, |n\rangle\langle n'| \, , H^\dagger = H \text{ signifie que } \forall n, n', \; H^*_{n,n'} = H_{n',n}.$$

$H$ est diagonalisable en base orthonormée :

$$H = V \Delta V^\dagger$$

où $V$ est une matrice unitaire $VV^\dagger = V^\dagger V = \mathbb{I}$ et $\Delta = \text{diag}(h_1, \ldots, h_d)$ une matrice diagonale formée avec les valeurs propres $h_1, \ldots, h_d$ de $H$ ($h_n \in \mathbb{R}$).
Pour toutes fonctions $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$, on définit l'opérateur hermitien $f(H)$ par la formule

$$f(H) = Vf(\Delta)V^\dagger$$

où $f(\Delta) = \text{diag}(f(h_1), \ldots, f(h_d))$. Lorsque $f(x) = \sum_k f_k x^k$ est un polynôme ou une fonction entière comme $\cos(x)$, $e^x$, on retrouve le calcul usuel $f(H) = \sum_k f_k H^k$ avec une somme absolument convergente.

Equation différentielle de Schrödinger ($\imath = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $\hbar = 1$) associé à l'hamiltonien $H = H^\dagger$ :

$$\frac{d}{dt} \left|\psi\right\rangle_t = -\imath H(t) \left|\psi\right\rangle_t \text{ avec la condition initiale } \left|\psi\right\rangle_{t=0} \in \mathcal{H}.$$

$H$ indépendant du temps :

$$\left|\psi\right\rangle_t = \sum_n \psi_n(0) e^{-\imath h_n t} \left|n\right\rangle \quad \text{où} \quad H = \sum_n h_n \left|n\right\rangle\!\left\langle n\right|.$$

Si $H$ dépend du temps : pas de solution explicite, $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$ en général.

L'évolution selon l'équation de Schrödinger préserve le produit hermitien

$$\frac{d}{dt} U(t) = -\imath H(t) U(t), \quad U(0) = \mathbb{I}$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice identité et $U(t) \in \mathcal{U}(d)$ le groupe des matrices unitaires $d \times d$. La solution de $\frac{d}{dt} \left|\psi\right\rangle_t = -\imath H(t) \left|\psi\right\rangle_t$ de C.I. $\left|\psi\right\rangle_{t=0} = \left|\psi\right\rangle_0$ est alors $\left|\psi\right\rangle_t = U(t) \left|\psi\right\rangle_0$.

Pour $H$ est indépendant du temps, on a $U(t) = e^{-\imath H t}$. Si $\mathrm{tr}\,(H(t)) = 0$ alors $\det U(t) \equiv 1$ car $\frac{d}{dt} \det U = -\imath \mathrm{tr}\,(H(t)) \det U$.

# Equation différentielle de Liouville pour $\rho$

L'équation de Schrödinger $\frac{d}{dt}|\psi\rangle_t = -\imath H(t)|\psi\rangle_t$ donne l'évolution du système fermé d'état pur initial $|\psi\rangle_{t=0} = |\phi\rangle$. Pour $\rho(t) = |\psi\rangle\langle\psi|_t$ on voit que

$$\rho(0) = |\phi\rangle\langle\phi|, \quad \rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t), \quad \frac{d}{dt}\rho(t) = -\imath[H(t), \rho(t)]$$

où $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ est le commutateur de $H$ avec $\rho$.
Si la condition initiale est un mélange statistique $\rho_0 = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ où $\sum_k p_k = 1$ et chaque $|\phi_k\rangle$ de longueur 1 avec

$$\frac{d}{dt}|\psi_k\rangle_t = -\imath H(t)|\psi_k\rangle_t, \quad |\psi_k\rangle_{t=0} = |\phi_k\rangle$$

alors $\rho(t) = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|_t$ est la solution de l'équation différentielle matricielle (équation de Liouville) :

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H(t), \rho(t)], \quad \rho(0) \in \mathcal{D}.$$

$\rho(t)$ reste une matrice densité pour tout $t > 0$ et son spectre reste constant.
En effet, $\rho(t)$ et $\rho(0)$ sont deux opérateurs semblables : $\rho(t)U(t) = U(t)\rho(0)$ avec $U^{-1}(t) = U^\dagger(t)$.

A chaque mesure est attachée un opérateur auto-adjoint $M$ (observable) de décomposition spectrale : $M = \sum_{n'=1}^{d'} m_{n'} P_{n'}$. La mesure est instantanée. La mesure de $|\psi\rangle$ donne alors $m_{n'}$ avec la probabilité $\langle\psi|P_{n'}|\psi\rangle = \text{tr}\left(P_{n'}\rho\right)$ avec $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Réduction du paquet d'ondes : si $m_{n'}$, alors, juste après la mesure, l'état quantique n change en $\frac{P_{n'}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{n'}|\psi\rangle}}$ :

En résumé on a :

$$|\psi\rangle_+ = \frac{P_{n'}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{n'}|\psi\rangle}}, \quad \rho_+ = \frac{P_{n'}\rho P_{n'}}{\text{tr}\left(P_{n'}\rho\right)} \quad \text{avec proba.} \quad p_{n'} = \langle\psi|P_{n'}|\psi\rangle = \text{tr}\left(P_{n'}\rho\right).$$

où $|\psi\rangle_+$, $\rho_+$ correspondent à l'état quantique juste après la mesure. La mesure répétée un grand nombre de fois du même état quantique pur $|\psi\rangle$ ou mixte $\rho$ donne comme moyenne

$$\langle M\rangle = \text{tr}\left(M\rho\right) = \sum_{n'=1}^{d'} m_{n'}\text{tr}\left(P_{n'}\rho\right) = \sum_{n'=1}^{d'} p_{n'}(\rho) m_{n'}$$

où $p_{n'}(\rho) = \text{tr}\left(P_{n'}\rho\right)$ est la probabilité d'obtenir la mesure $m_{n'}$. Comme $\sum_{n'} P_{n'} = \mathbb{I}$, on a $\text{tr}\left(\rho\right) = \text{tr}\left(\rho\sum_{n'} P_{n'}\right) = \sum_{n'}\text{tr}\left(P_{n'}\rho\right) = \sum_{n'} p_{n'}(\rho) = 1$.

# Systèmes composites et produit tensoriel

Système bipartite $(A, B)$ : Hilbert de $A$ seul noté $\mathcal{A}$ et du $B$ seul noté $\mathcal{B}$ ; Hilbert de $(A, B)$ $\mathcal{H} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, le produit tensoriel de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
Structure hilbertienne sur $\mathcal{H}$ issue de celles sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ : bases hilbertiennes $(|n_a\rangle)_{1\leq n_a \leq d_a}$ sur $\mathcal{A}$ et $(|n_b\rangle)_{1\leq n_b \leq d_b}$ sur $\mathcal{B}$ et $(|n_a\rangle \otimes |n_b\rangle)$ sur $\mathcal{H}$. On note souvent $|n_a\rangle \otimes |n_b\rangle$ par $|n_a, n_b\rangle$ ou par $|n_a n_b\rangle$ :

$$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle = \sum_{n_a,n_b} \psi_{n_a,n_b} |n_a\rangle \otimes |n_b\rangle = \sum_{n_a,n_b} \psi_{n_a,n_b} |n_a n_b\rangle , \quad \psi_{n_a,n_b} \in \mathbb{C}.$$

Le produit hermitien de $|\psi\rangle$ avec $|\phi\rangle = \sum_{n_a,n_b} \phi_{n_a,n_b} |n_a n_b\rangle$ :
$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_{n_a,n_b} \psi^*_{n_a,n_b}\phi_{n_a,n_b}$. Indépendant des bases orthonormées sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
Intrication de $|\psi\rangle \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ssi il n'existe pas de $|\psi_a\rangle \in \mathcal{A}$ et de $|\psi_b\rangle \in \mathcal{B}$ tels que $|\psi\rangle = |\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$. Pour un tel $|\psi\rangle$, il n'est pas possible de définir un état partiel et pur ni pour le sous-système $A$, ni pour le sous-système $B$. On parle aussi d'état $|\psi\rangle$ non séparable entre $A$ et $B$. C'est un peu comme une fonction scalaire de deux variables $f(x_a, x_b)$ qui n'est pas à variables séparables, i.e. de la forme $f(x_a, x_b) = f_a(x_a)f_b(x_b)$. En général, une fonction scalaire de deux variables $x_a$ et $x_b$ n'est pas la multiplication d'une fonction scalaire de $x_a$ seul par une autre fonction scalaire de $x_b$ seul.

Prenons maintenant un opérateur $H_a$ sur $\mathcal{A}$ et un opérateur $H_b$ sur $\mathcal{B}$. Alors $H_a$ et $H_b$ se prolongent sur $\mathcal{H}$ avec $H_a \otimes \mathbb{I}_b$ et $\mathbb{I}_a \otimes H_b$ ($\mathbb{I}_a$ et $\mathbb{I}_b$ sont les opérateurs identité sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) :

$$(H_a \otimes \mathbb{I}_b) \left|\psi\right\rangle = \sum_{n_a,n_b} \psi_{n_a,n_b} H_a \left|n_a\right\rangle \otimes \left|n_b\right\rangle ,$$

$$(\mathbb{I}_a \otimes H_b) \left|\psi\right\rangle = \sum_{n_a,n_b} \psi_{n_a,n_b} \left|n_a\right\rangle \otimes H_b \left|n_b\right\rangle .$$

Par abus de notations on note

$$H_a \equiv H_a \otimes \mathbb{I}_b, \quad H_b \equiv \mathbb{I}_a \otimes H_b.$$

On peut aussi former l'opérateur $H_a \otimes H_b$ défini par

$$(H_a \otimes H_b) \left|\psi\right\rangle = \sum_{n_a,n_b} \psi_{n_a,n_b} H_a \left|n_a\right\rangle \otimes H_b \left|n_b\right\rangle .$$

- Bra $\langle\bullet|$ et Ket $|\bullet\rangle$ : un vecteur $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ s'écrit $|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$ avec $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ et

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  $|\psi\rangle$ amplitude complexe de probabilité : $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$.
- Conjuguée hermitienne : $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = a_0^* \langle 0| + a_1^* \langle 1|$
- Produit hermitien : $|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$, $|\phi\rangle = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle$, on a

$$\langle\psi|\phi\rangle = a_0^* b_0 + a_1^* b_1 .$$

- La décomposition de l'identité $\mathbb{I}$ souvent notée 1 : $1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$, plus généralement

$$1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$$

  où $(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle)$ est une base ortho-normée de $\mathbb{C}^2$.

- Opérateur hermitien : toute matrice $2 \times 2$ hermitienne $G = G^\dagger$ s'écrit

$$G = g_0 |0\rangle \langle 0| + g_1 |1\rangle \langle 1| + g |1\rangle \langle 0| + g^* |0\rangle \langle 1|$$

avec $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathbb{C}$ (intérêt de cette notation : calcul de $G |\psi\rangle$ avec $|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$).

- La mesure de l'observable associée à $G$ de l'état quantique (qubit) $|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$ donne en moyenne la valeur :

$$\langle \psi | G | \psi \rangle = g_0 |a_0|^2 + g_1 |a_1|^2 + 2\Re(g a_0 a_1^*).$$

- Matrices de Pauli ($\imath = \sqrt{-1}$)

$$\sigma_x = |1\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1| , \; \sigma_y = \imath |0\rangle \langle 1| - \imath |1\rangle \langle 0| , \; \sigma_z = - |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|$$

avec les relations de commutations :

$$\sigma_x^2 = 1, \quad \sigma_x \sigma_y = \imath \sigma_z, \text{ ..... permutation circulaire}$$

- Souvent on utilise les notations $(|0\rangle, |1\rangle)$ à la place de $(|g\rangle, |e\rangle)$ et on parle de qubit.
- La mesure de $\sigma_z = -|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ sur le qubit $|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$ donne
  - soit $-1$ avec la probabilité $|\psi_0|^2$
  - soit $+1$ avec la probabilité $|\psi_1|^2$.
- Réduction du paquet d'onde : si on mesure
  - $-1$ alors $|\psi\rangle$ devient $|0\rangle$ ;
  - $+1$ alors $|\psi\rangle$ devient $|1\rangle$.
- Illustration sur un ion piégé à deux niveaux électroniques $|g\rangle$ et $|e\rangle$ via un état supplémentaire instable $|f\rangle$, un laser résonnant sur la transition $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ et un photo-détecteur captant les photons de fluorescence de cette transition.

- Soit le qubit d'état :

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

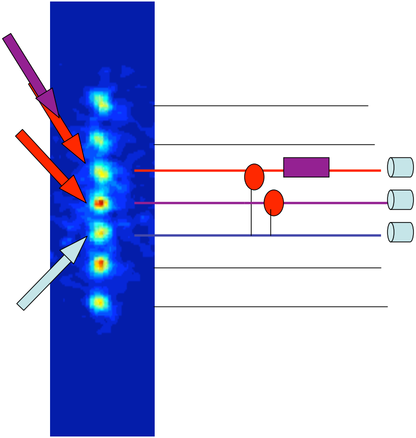
La mesure de $\sigma_z = -|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ donne 1 ou $-1$ avec comme probabilité $1/2$ à chaque fois. Ce qubit est dit intriqué vis à vis de la mesure $\sigma_z$.

- La mesure de $\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ sur $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ donne toujours la valeur $+1$.
- La mesure de $\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ sur $\frac{-|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ donne toujours la valeur $-1$.

Avec $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ et $|-\rangle = \frac{-|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\sigma_z = |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|, \quad \sigma_x = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|.$$

# Logique quantique avec une chaîne d'ions



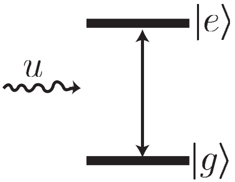
*Des impulsions laser appliqués séquentiellement aux ions de la chaîne réalisent des portes à un bit et des portes à deux bits. La détection par fluorescence (éventuellement précédée par une rotation du bit) extrait l'information du système.*

Beaucoup de problèmes à résoudre pour réaliser un tel dispositif…..

6

6. Source : Serge Haroche, Collège de France, 2006.

# Systèmes à deux niveaux (spin $1/2$)




Electron autour d'un atome dans l'état fondamental $|g\rangle$ d'énergie $E_g$ ou dans l'état excité $|e\rangle$ d'énergie $E_e$. Plus généralement, son état quantique $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ est une superposition linéaire $|\psi\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_e |e\rangle$ qui évolue selon Schrödinger ($\psi_g$ et $\psi_e$ dépendent de $t$).

**Equation de Schrödinger** pour le système isolé à deux niveaux :

$$\imath\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle = \big( E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g| \big) |\psi\rangle$$

où $H$ est l'opérateur Hamiltonien (auto-adjoint $H^\dagger = H$) correspondant à l'énergie.

L'énergie est définie à une constante près : $H$ et $H + \varpi(t) I$ où $\varpi(t) \in \mathbb{R}$ est arbitraire correspondent au même système physique. Si $|\psi\rangle$ vérifie $\imath\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$ alors $|\chi\rangle = e^{-\imath\vartheta(t)} |\psi\rangle$ avec $\frac{d}{dt}\vartheta = \frac{\varpi}{\hbar}$ vérifie aussi $\imath\hbar \frac{d}{dt} |\chi\rangle = (H + \varpi I) |\chi\rangle$. Ainsi pour tout $\vartheta$, $|\psi\rangle$ et $e^{-\imath\vartheta} |\psi\rangle$ représentent le même système physique : la phase globale de l'état quantique $|\psi\rangle$ n'a pas de sens physique et peut être choisie arbitraire.

Avec une origine des énergies telle que $E_g$ (resp. $E_e$) devient $-\frac{E_e-E_g}{2}$ (resp. $\frac{E_e-E_g}{2}$) et en posant $\Omega = \frac{E_e-E_g}{\hbar}$ la solution du système isolé $\imath \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \frac{H}{\hbar}|\psi\rangle = \frac{\Omega}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)|\psi\rangle$ est

$$|\psi\rangle_t = \psi_{g0} e^{\frac{\imath\Omega t}{2}} |g\rangle + \psi_{e0} e^{\frac{-\imath\Omega t}{2}} |e\rangle .$$

Avec un champ électromagnétique variable classique décrit par $u(t) \in \mathbb{R}$, l'évolution cohérente (conservative) est toujours donnée par Schrödinger mais avec l'Hamiltonien **contrôlé**

$$\frac{H(t)}{\hbar} = \frac{\Omega}{2}\sigma_z + \frac{u(t)}{2}\sigma_x = \frac{\Omega}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \frac{u(t)}{2}(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$$

L'équation de Schrödinger $\imath\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ s'écrit :

$$\imath \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\psi_e\\ \psi_g\end{pmatrix} = \frac{\Omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_e\\ \psi_g\end{pmatrix} + \frac{u(t)}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_e\\ \psi_g\end{pmatrix}.$$

**Les matrices de Pauli** vérifient $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_x\sigma_y = \imath\sigma_z$ , . . . , avec

$$\sigma_x = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e| , \ \sigma_y = -\imath|e\rangle\langle g| + \imath|g\rangle\langle e| , \ \sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$$

$\sigma_x^2 = I$, $\sigma_x \sigma_y = \imath \sigma_z$ , . . . , avec

$$\sigma_x = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|\,,\ \sigma_y = -\imath\,|e\rangle\langle g| + \imath\,|g\rangle\langle e|\,,\ \sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$$

Pour tout angle $\theta \in \mathbb{R}$

- Comme $e^{\imath\theta\sigma_x} = \cos\theta + \imath\sin\theta\sigma_x$ (idem pour $\sigma_y$ et $\sigma_z$), la solution de $\imath\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \frac{\Omega}{2}\sigma_z|\psi\rangle$ est

$$|\psi\rangle_t = e^{\frac{-\imath\Omega t}{2}\sigma_z}|\psi\rangle_0 = \left(\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \imath\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\sigma_z\right)|\psi\rangle_0$$

- Pour $\alpha, \beta = x, y, z$, $\alpha \neq \beta$ on a

$$\sigma_\alpha e^{\imath\theta\sigma_\beta} = e^{-\imath\theta\sigma_\beta}\sigma_\alpha, \qquad \left(e^{\imath\theta\sigma_\alpha}\right)^{-1} = \left(e^{\imath\theta\sigma_\alpha}\right)^\dagger = e^{-\imath\theta\sigma_\alpha}.$$

et aussi

$$e^{-\frac{\imath\theta}{2}\sigma_\alpha}\sigma_\beta e^{\frac{\imath\theta}{2}\sigma_\alpha} = e^{-\imath\theta\sigma_\alpha}\sigma_\beta = \sigma_\beta e^{\imath\theta\sigma_\alpha}$$

Dans $\imath \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \left( \frac{\Omega}{2}\sigma_z + \frac{u}{2}\sigma_x \right) |\psi\rangle$, on pose $|\psi\rangle = e^{-\frac{\imath\Omega t}{2}\sigma_z} |\phi\rangle$ (passage au repère d'interaction) pour éliminer le drift :

$$\imath \frac{d}{dt} |\phi\rangle = \frac{u}{2} e^{\frac{\imath\Omega t}{2}\sigma_z} \sigma_x e^{-\frac{\imath\Omega t}{2}\sigma_z} |\phi\rangle = \frac{H_{int}}{\hbar} |\phi\rangle$$

avec $\frac{H_{int}}{\hbar} = \frac{u}{2} e^{\imath\Omega t} \overbrace{\frac{\sigma_x + \imath\sigma_y}{2}}^{\sigma^+ = |e\rangle\langle g|} + \frac{u}{2} e^{-\imath\Omega t} \overbrace{\frac{\sigma_x - \imath\sigma_y}{2}}^{\sigma^- = |g\rangle\langle e|}$

Contrôle résonnant $u = \mathbf{u} e^{\imath\Omega t} + \mathbf{u}^* e^{-\imath\Omega t}$ avec $\mathbf{u}$ amplitude complexe lentement variable $\left| \frac{d}{dt}\mathbf{u} \right| \ll \Omega |\mathbf{u}|$. L' approximation du champ tournant consiste à négliger les termes oscillant à la pulsation $2\Omega$ de moyenne nulle (licite si $|\mathbf{u}| \ll \Omega$)

$$\frac{H_{int}}{\hbar} = \left( \frac{\mathbf{u} e^{2\imath\Omega t} + \mathbf{u}^*}{2} \right) \sigma^+ + \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{u}^* e^{-2\imath\Omega t}}{2} \right) \sigma^- \approx \frac{\mathbf{u}^*\sigma^+ + \mathbf{u}\sigma^-}{2}.$$

Justification : application du théorème de moyennisation.

$$\imath \frac{d}{dt} |\phi\rangle = \frac{(\mathbf{u}^* \sigma^+ + \mathbf{u}\sigma^-)}{2} |\phi\rangle = \frac{(\mathbf{u}^* |e\rangle \langle g| + \mathbf{u} |g\rangle \langle e|)}{2} |\phi\rangle$$

On suppose $\mathbf{u} = \omega_r e^{\imath\theta}$ avec $\omega_r > 0$ et $\theta$ réel. Alors

$$\frac{\mathbf{u}^* \sigma^+ + \mathbf{u}\sigma^-}{2} = \frac{\omega_r}{2} \left(\cos\theta \sigma_x + \sin\theta \sigma_y\right)$$

et le système oscille entre $|e\rangle$ et $|g\rangle$ avec la pulsation de Rabi $\frac{\omega_r}{2}$.

Comme $(\cos\theta\sigma_x + \sin\theta\sigma_y)^2 = I$ et donc

$$e^{-\frac{\imath\omega_r t}{2}(\cos\theta\sigma_x + \sin\theta\sigma_y)} = \cos\left(\frac{\omega_r t}{2}\right) - \imath \sin\left(\frac{\omega_r t}{2}\right) \left(\cos\theta\sigma_x + \sin\theta\sigma_y\right),$$

la solution de $\frac{d}{dt} |\phi\rangle = \frac{-\imath\omega_r}{2} \left(\cos\theta\sigma_x + \sin\theta\sigma_y\right) |\phi\rangle$ est

$$|\phi\rangle_t = \cos\left(\frac{\omega_r t}{2}\right) |g\rangle - \imath \sin\left(\frac{\omega_r t}{2}\right) e^{-\imath\theta} |e\rangle, \quad \text{quand} \quad |\phi\rangle_0 = |g\rangle,$$

$$|\phi\rangle_t = \cos\left(\frac{\omega_r t}{2}\right) |e\rangle - \imath \sin\left(\frac{\omega_r t}{2}\right) e^{\imath\theta} |g\rangle, \quad \text{quand} \quad |\phi\rangle_0 = |e\rangle,$$

On part toujours de l'état fondamental $|\phi\rangle_0 = |g\rangle$ et on allume le laser avec une amplitude $\mathbf{u} = \imath \frac{\omega_r}{2}$ complexe uniquement sur $[0, T]$ (pulse de longueur $T$). Comme

$$|\phi\rangle_T = \cos\left(\frac{\omega_r T}{2}\right)|g\rangle + \sin\left(\frac{\omega_r T}{2}\right)|e\rangle,$$

on voit que

- si $\omega_r T = \pi$ (pulse $\pi$) alors $|\phi\rangle_T = |e\rangle$ et donc on bascule sur l'état excité : absorption stimulée d'un photon et passage à l'état excité. Si on mesure l'énergie dans cet état on trouve toujours $E_e$.
- si $\omega_r T = \pi/2$ (pulse $\pi/2$) alors $|\phi\rangle_T = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$ et le système est dans une superposition cohérente de $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Si on mesure l'énergie dans cet état, on trouve $E_g$ une fois sur deux.

On part de $|\psi\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_e |e\rangle$ qui vérifie $\imath\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$. On considère le projecteur orthogonal $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, dit opérateur densité. Alors $\rho$ est un opérateur auto-adjoint $\geq 0$, vérifie $\operatorname{tr}(\rho) = 1$, $\rho^2 = \rho$ et obéit à l'équation :

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{\imath}{\hbar}[H, \rho].$$

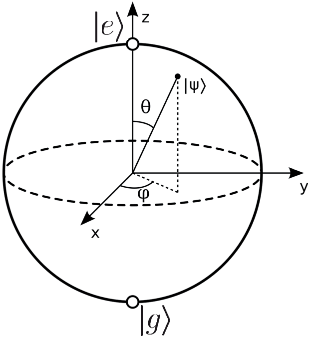
Pour un système à deux niveaux, on a l'écriture suivante

$$\rho = \frac{I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z}{2}$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ représentant le vecteur $\vec{M}$ qui évolue sur la sphère de Bloch (longueur 1 car $\operatorname{tr}\left(\rho^2\right) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$) :

$$\frac{d}{dt}\vec{M} = (u\vec{\imath} + \Omega\vec{k}) \times \vec{M},$$

une autre écriture de $\frac{d}{dt}\rho = -\imath\left[\frac{\Omega}{2}\sigma_z + \frac{u}{2}\sigma_x,\ \rho\right]$. Alors $u$ est la vitesse de rotation instantanée autour de l'axe des $x$ et $\Omega$ celle autour de l'axe des $z$.




Si $|\psi\rangle$ vérifie $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$, alors le projecteur $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ vérifie :

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho].$$

Pour $|\psi\rangle = \psi_g|g\rangle + \psi_e|e\rangle$ :

$$|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi_g|^2|g\rangle\langle g| + \psi_g\psi_e^*|g\rangle\langle e| + \psi_g^*\psi_e|e\rangle\langle g| + |\psi_e|^2|e\rangle\langle e|.$$

On pose $x = 2\Re(\psi_g\psi_e^*)$, $y = 2\Im(\psi_g\psi_e^*)$, $z = |\psi_e|^2 - |\psi_g|^2$ et on obtient

$$\rho = \frac{\mathbb{I} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z}{2}.$$

Le vecteur de Bloch $\vec{M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ est sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ :

$$i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \left(\tfrac{\omega_x}{2}\sigma_x + \tfrac{\omega_y}{2}\sigma_y + \tfrac{\omega_z}{2}\sigma_z\right)|\psi\rangle \quad \backsim \quad \frac{d}{dt}\vec{M} = (\omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}) \times \vec{M}$$

Vecteur de Bloch $\vec{M}$ associé aux angles d'Euler$(\theta,\phi)$ :

$$|\psi\rangle = e^{i\varphi}\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|g\rangle + \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|e\rangle.$$

- $n$ qubits : produit tensoriel $\overbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \ldots \otimes \mathbb{C}^2}^{n \text{ fois}}$ isomorphe à $\mathbb{C}^{2^n}$. Très différent du produit cartésien utilisé pour les systèmes classiques et qui donnerait alors $\mathbb{C}^{2n}$ :
- La base d'un système de 2 qubits :

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\,, \quad |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\,, \quad |10\rangle\,, \quad |11\rangle\,.$$

- La base d'un système de 3 qubits :

$$|000\rangle\,, \quad |001\rangle\,, \quad |010\rangle\,, \quad |011\rangle\,, \quad |100\rangle\,, \quad |101\rangle\,, \quad |110\rangle\,, \quad |111\rangle\,.$$

- Mesure $\sigma_z = -|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ du premier qubit d'une paire de qubits : l'opérateur de mesure $G = \sigma_z \otimes I_d$
- Sur la paire de qubits

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle$$

la mesure de $\sigma_z$ associé au 1er qubit donne en moyenne

$$-(|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2) + (|a_{10}|^2 + |a_{11}|^2)$$

i.e., donne soit $-1$ avec une probabilité $|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2$, soit $+1$ avec une probabilité $|a_{10}|^2 + |a_{11}|^2$.

On part de $|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle$.

- Si la mesure de $\sigma_z$ sur le 1er qubit donne $-1$, juste après la mesure, la paire de qubits est dans l'état

$$\frac{a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle}{\sqrt{|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2}} = |0\rangle \otimes \left(\frac{a_{00}|0\rangle + a_{01}|1\rangle}{\sqrt{|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2}}\right)$$

- Si la mesure de $\sigma_z$ sur le 1er qubit donne $+1$, juste après la mesure, la paire de qubits est dans l'état

$$\frac{a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle}{\sqrt{|a_{10}|^2 + |a_{11}|^2}} = |1\rangle \otimes \left(\frac{a_{10}|0\rangle + a_{11}|1\rangle}{\sqrt{|a_{10}|^2 + |a_{11}|^2}}\right)$$

- Réduction (collapse) du paquet d'onde suite à la mesure de $\sigma_z$ : interprétation de Copenhague.

Formulation hamiltonienne, oscillateur harmonique classique de pulsation $\omega$ :

$$\frac{d}{dt}x = \omega p = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p}, \quad \frac{d}{dt}p = -\omega x = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x}, \quad \boldsymbol{H}(x,p) = \frac{\omega}{2}(p^2 + x^2).$$

Principe de correspondance et quantification : $|\psi\rangle_t \equiv (\psi(x,t))_{x\in\mathbb{R}}$ avec $\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2(x,t)dx = 1$ ; $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ; $H = \omega(P^2 + X^2) = -\frac{\omega}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega}{2}x^2$ où $P = -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}$ l'opérateur agissant sur $|\psi\rangle_t$ et $X = \frac{x}{\sqrt{2}}$.
L'équation de Schrödinger

$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle = -\imath H|\psi\rangle \text{ est une EDP } \imath\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\omega}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\omega}{2}x^2\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le spectre de $H$ est non-dégénéré $h_n = \omega(n + \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}$ : état propre associé à $n$ noté $|n\rangle$, état de Fock à $n$ photon(s). On note $N = \sum_n n|n\rangle\langle n|$, l'opérateur nombre de photons : $H = \omega(N + \frac{1}{2})$.

# Opérateurs $a$ et $a^\dagger$, états cohérents $|\alpha\rangle$

Les états de Fock $|n\rangle$ sont construits à partir des opérateurs d'annihilation $a$ de création $a^\dagger$ :

$$a = X + \imath P = \frac{x + \frac{\partial}{\partial x}}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = X - \imath P = \frac{x - \frac{\partial}{\partial x}}{\sqrt{2}}, \quad N = a^\dagger a = \sum_n n \, |n\rangle\langle n|$$

$|0\rangle$ est caractérisé par $a|0\rangle = 0$ : $\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp(-x^2/2)$.
Les autres $|n\rangle$ s'obtiennent via $a^\dagger \, |n\rangle = \sqrt{n+1} \, |n+1\rangle$, $a \, |n\rangle = \sqrt{n} \, |n-1\rangle$.
Pour chaque amplitude complexe $\alpha \in \mathbb{C}$, l'état cohérent d'amplitude $|\alpha\rangle$ est :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \, |n\rangle \, .$$

La proba. $p_n$ d'obtenir $n \in \mathbb{N}$ en mesurant $N$ sur $|\alpha\rangle$ suit une loi de Poison $p_n = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}/n!$ et l'énergie moyenne est $\langle \alpha | N | \alpha \rangle = |\alpha|^2$.
Etats cohérents et états classiques : la solution de $\frac{d}{dt} \, |\psi\rangle = -\imath H \, |\psi\rangle$ , de condition initiale l'état cohérent d'amplitude $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, $|\psi\rangle_{t=0} = |\alpha_0\rangle$, reste un état cohérent d'amplitude $\alpha_t = e^{-\imath \omega t} \alpha_0$ : $|\psi\rangle_t = e^{-\imath \omega t/2} \, |\alpha_t\rangle$. Comme $\frac{d}{dt} \alpha_t = -\imath \omega \alpha_t$, en posant $\alpha_t = x + ip$, avec $(x, p) \in \mathbb{R}^2$ on retrouve les deux équations classiques $\frac{d}{dt} x = \omega p$, $\frac{d}{dt} p = -\omega x$.