

École Nationale Supérieure des Mines de Paris

SYSTÈMES DYNAMIQUES
ET MODÉLISATION

par
P. Rouchon

Janvier 1993

Note à l'intention des Elèves

Ce document est volontairement rédigé dans un style assez mathématique. Il est illustré de dessins et figures aussi nombreux que possible. Par ailleurs, il constitue une présentation, autonome et assez générale, des idées et des méthodes mises en œuvre lors du cours oral, cours qui repose **entièrement** sur des exemples précis et concrets.

Table des matières

1	Notions Fondamentales	1
1.1	Espace des phases, champ de vecteurs et flot	1
1.1.1	Un modèle élémentaire de population	1
1.1.2	Existence, unicité, flot	3
1.1.3	Compléments sur le flot	5
1.1.4	Remarque sur l'espace des phases	7
1.1.5	Comportements asymptotiques	8
1.1.6	L'étude qualitative ou le contenu des modèles	9
1.2	Points d'équilibre	10
1.2.1	Stabilité au sens de Liapounov	10
1.2.2	Le théorème de Grobman-Hartman	13
1.2.3	Les systèmes linéaires	14
1.2.4	Espaces rentrant et sortant, portrait de phases	16
1.3	Orbites périodiques	18
1.3.1	Stabilité asymptotique	18
1.3.2	Systèmes dynamiques discrets	20
1.4	Cas des flots de dimension 2	24
1.4.1	Flots dans le plan	24
1.4.2	Influence de la topologie de l'espace des phases	25
1.5	Conclusion	27
1.5.1	Théorie ergodique des systèmes dynamiques	27
1.5.2	Stabilité structurelle	27
1.6	Figures	28
2	Bifurcations locales	67
2.1	Introduction	67
2.2	Sous-variété centrale et formes normales	69
2.2.1	Sous-variété centrale	70
2.2.2	Formes normales	77
2.2.3	Utilisation en théorie des bifurcations	84
2.3	Bifurcations classiques de point d'équilibre	85

2.3.1	Les deux bifurcations locales génériques à un paramètre	85
2.3.2	Deux autres bifurcations classiques	89
2.4	Conclusion	90
2.4.1	Classification des bifurcations par codimension	90
2.4.2	Retard à la bifurcation, bifurcation dynamique	92
2.5	Figures	93
3	Théorie des perturbations	105
3.1	Les perturbations singulières	106
3.1.1	Approximation sur des temps $t \sim 1/\varepsilon$	106
3.1.2	Approximation sur des temps t non bornés	109
3.1.3	Méthode d'approximation de la sous-variété invariante lente	110
3.2	Moyennisation	111
3.3	Conclusion	114
4	Attracteurs étranges et chaos déterministe	117
4.1	Instabilités thermo-convectives de Rayleigh-Bénard	118
4.2	Du modèle complet au modèle de Lorenz	119
4.3	Etude élémentaire du modèle de Lorenz	122
4.3.1	Courbes intégrales sur $[0, +\infty[$	122
4.3.2	Stabilité asymptotique globale de 0 lorsque $r \leq 1$	122
4.3.3	Contraction du volume	122
4.3.4	Points d'équilibre	123
4.4	Le chaos déterministe	125
4.4.1	Bifurcations vers le chaos dans le modèle de Lorenz	125
4.4.2	Un exemple historique : le fer à cheval de Smale	128
4.4.3	Attracteurs et mesures asymptotiques	131
4.5	Figures	137

Chapitre 1

Notions Fondamentales

La théorie des équations différentielles ordinaires permet d'étudier de nombreux processus d'évolution **déterministes, finis** et **différentiables**. Nous exposons ici les principales notions indispensables à l'étude de tels systèmes. Ces notions sont à la base de la théorie des **systèmes dynamiques** dont l'objet principal est l'analyse **qualitative** du comportement des solutions sur de longs intervalles de temps.

Toutes les figures sont rassemblées en fin de chapitre dans une section spéciale.

1.1 Espace des phases, champ de vecteurs et flot

Nous commençons par introduire les notions d'espace des phases, de champ de vitesse et de flot sur un exemple simple. Puis nous abordons le cas général avec les justifications mathématiques qui conviennent.

1.1.1 Un modèle élémentaire de population

Considérons une population de x micro-organismes (x grand) dans un milieu nutritif favorable (un fermenteur par exemple) et avec une vitesse de reproduction proportionnelle à x (cette condition est une bonne approximation tant que la nourriture est suffisante, tant que les micro-organismes ne meurent pas, ...).

Ce processus est décrit par l'équation différentielle de bilan suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x \tag{1.1}$$

où μ est la vitesse spécifique de reproduction (μ est une constante positive exprimée par exemple en 1/h). x est la grandeur caractéristique du système, son **état** : il appartient à l'ensemble des réels positifs $[0, +\infty[$, **l'espace d'état**, appelé aussi **espace des phases**

pour des raisons historiques¹. μx est la vitesse d'évolution : elle résulte des hypothèses de modélisation.

Nous voyons qu'il n'est pas nécessaire de connaître les solutions de (1.1) pour connaître explicitement la vitesse d'évolution. Il suffit de connaître la position x dans l'espace des phases, i.e. l'état. Il est alors naturel d'introduire la notion de champ de vecteurs vitesse (des phases) : le champ de vecteurs vitesse est l'application qui à chaque point x de l'espace des phases fait correspondre le vecteur vitesse $v(x)$ (ici $v(x) = \mu x$) d'évolution du phénomène.

La modélisation se décompose donc en deux étapes :

étape 1 : se donner un espace des phases (on dit aussi espace d'état) convenable qui permette de caractériser le système à chaque instant par un point dans cet espace ;

étape 2 décrire **quantitativement** l'évolution de proche en proche du système par un champ de vecteurs vitesse (des phases) et en donner une expression calculable en fonction de la position x dans l'espace des phases.

A partir d'une population initiale x_0 au temps $t = 0$, la résolution explicite de (1.1) conduit à la loi horaire

$$x(t) = \exp(\mu t)x_0.$$

On constate alors les points suivants, également vrais pour les systèmes généraux différentiables :

- deux solutions ayant la même condition initiale x_0 sont identiques (unicité de la solution) ;
- par une condition initiale x_0 passe une solution (existence pour des intervalles de temps fini).

Pour chaque instant t , l'application

$$\begin{aligned} \phi_t : [0, +\infty[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longrightarrow \exp(\mu t)x \end{aligned}$$

est une bijection régulière (il est d'usage de dire difféomorphisme) de l'espace des phases $([0, +\infty[)$ dans lui même et $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$. Remarquons aussi que $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ et $\phi_0 = I$ (I est l'identité). Ainsi, l'ensemble $G = (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un **groupe à un paramètre de difféomorphismes**. Il est d'usage d'appeler **flot**² ce groupe $\{\phi_t\}$. On appelle orbites

¹L'espace des phases a été introduit par H. Poincaré en mécanique. Un système mécanique à n degrés de liberté (espace des configurations) est entièrement caractérisé par un point dans un espace des phases de dimension $2n$. Par exemple, la position spatiale d'un solide en rotation autour d'un point fixe est repérée par les 3 angles d'Euler (espace des configurations $SO(3)$, l'ensemble des rotations de l'espace euclidien physique \mathbb{R}^3), alors que sa dynamique, i.e. son évolution au cours du temps est caractérisée par sa position et sa vitesse initiale, i.e. les trois angles d'Euler et les trois vitesses instantanées de rotation. Dans cet exemple, l'espace des phases est de dimension 6 (le fibré tangent de $SO(3)$). Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces notions au remarquable livre de V.I. Arnol'd [3].

²Le terme "flot" vient d'une analogie cinématique avec l'écoulement stationnaire d'un fluide : si x_0 est la position d'un élément de fluide à l'instant $t = 0$, $\phi_t(x_0)$ est la position de l'élément de fluide à l'instant t lorsque chaque élément de fluide de position x est soumis à la vitesse d'écoulement $v(x)$.

du flot ou trajectoires ou courbes de phase, les courbes de l'espace des phases $\phi_t(x)$ paramétrées par le temps t .

La connaissance du flot $\{\phi_t\}$ entraîne la connaissance du champ de vecteurs vitesse. En effet

$$v(x) = \mu x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t(x)).$$

Nous voyons donc qu'il est équivalent de se fixer le champ de vecteurs vitesse ou le flot : l'un permet la détermination de l'autre et réciproquement. Plus généralement, à tout groupe à un paramètre de difféomorphismes est associé une équation différentielle par la relation précédente.

Nous avons directement sur le flot $\{\phi_t\}$ les comportements des solutions de (1.1) lorsque t devient grand en valeur absolue :

- si $x_0 = 0$ alors $\phi_t(x_0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- si $x_0 > 0$ alors $\phi_t(x_0) \rightarrow +\infty$ quand t tend vers $+\infty$ et $\phi_t(x_0) \rightarrow 0$ quand t tend vers $-\infty$.

Ce type de renseignement sur le comportement asymptotique des solutions n'est pas évident a priori pour un champ de vecteurs vitesse $v(x)$ quelconque. Ici réside l'une des difficultés majeures : la modélisation fournit principalement l'espace des phases et le champ $v(x)$ sur cet espace alors que les réponses aux questions qualitatives sur le comportement des solutions sur de grands intervalles de temps sont fournies par le flot $\{\phi_t\}$. Dans le cas général, il est extraordinairement difficile de déduire, de la connaissance du champ de vecteurs vitesse, des propriétés globales relatives au flot et aux comportements asymptotiques d'ensembles de solutions.

1.1.2 Existence, unicité, flot

Les résultats d'existence et d'unicité sont locaux en temps et en espace. Aussi peuvent-ils être énoncés pour un système différentiel du type

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \tag{1.2}$$

où $x = x(t)$ appartient à un ouvert U (un ouvert de l'espace des phases paramétré par les coordonnées locales x) de \mathbb{R}^n et v est une application régulière de U dans \mathbb{R}^n . L'application v est appelée champ de vecteurs (vitesse), cf. figure 1.1, page 29. Comme v ne dépend pas du temps, le système est dit autonome. Tout système non autonome $\frac{dx}{dt} = v(x, t)$ peut être vu comme une partie d'un système autonome de plus grande dimension. Il suffit de poser $\tilde{x} = (x, t)$ et $\tilde{v}(\tilde{x}) = (v(x), 1)$ et de considérer le système étendu $\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{v}(\tilde{x})$.

Théorème 1 [existence et unicité] *Considérons le système (1.2) et supposons le champ de vecteurs v continûment dérivable sur U . Pour tout x_0 dans U , il existe $a < 0 < b$ réels*

et une unique solution

$$\begin{aligned} \phi.(x_0) :]a, b[&\longrightarrow U \\ t &\longrightarrow \phi_t(x_0) \end{aligned}$$

satisfaisant (1.2) avec $x(0) = x_0$.

La preuve de ce résultat classique d'existence locale et d'unicité, illustrée par la figure 1.2, page 30, se trouve dans [2].

L'hypothèse de dérivabilité de v peut être affaiblie en supposant v localement lipschitzienne ($\|v(x) - v(y)\| \leq K\|x - y\|$ avec K constante de Lipschitz). Cette hypothèse de régularité sur la variation de v est indispensable pour l'unicité. En effet, l'équation scalaire $\frac{dx}{dt} = x^{2/3}$ admet deux solutions distinctes ayant la même condition initiale $0 : t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow t^3/27$.

L'intervalle de temps $]a, b[$ dépend a priori de x_0 . Si x_0 évolue dans un compact de U alors il est possible de borner inférieurement $|a|$ et b . Ce qui permet de considérer tout un ensemble de conditions initiales et ainsi de définir le flot (cf. figure 1.3, page 31).

Le théorème 1 assure l'existence d'une solution sur un petit intervalle de temps autour de 0. En raison de l'unicité, deux solutions, qui coïncident au moins en un point, sont nécessairement égales. Comme l'illustre la figure 1.4, page 32, deux trajectoires distinctes ne peuvent ni se recoller, ni se croiser.

Cette propriété est tout à fait importante. Elle permet de définir la notion de courbe intégrale maximale, d'orbite (cf. figure 1.5, page 33), et de flot.

Définition 1 [flot] *Le champ de vecteurs v est appelé générateur infinitésimal du flot $\phi_t : U \rightarrow U$ défini par*

$$\frac{d}{dt} (\phi_t(x))|_{t=\tau} = v(\phi_\tau(x)) \quad \text{et} \quad \phi_0(x) = x$$

pour $x \in U$ et τ entre 0 et t . Il faut noter que, pour x dans U , $\phi_t(x)$ est toujours défini pour t proche de 0.

Le flot ϕ_t satisfait à des propriétés de groupe (lorsque les opérations sont définies) : $\phi_0 = I$ et $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$. Ainsi $x \rightarrow \phi_t(x)$ a pour réciproque $x \rightarrow \phi_{-t}(x)$.

A $x \in U$ fixé, la courbe $t \rightarrow \phi_t(x)$ est appelée trajectoire ou encore courbe intégrale passant par x .

Définition 2 [intégrale maximale] *Pour une condition initiale x fixée, il est possible de choisir l'intervalle de temps $]a, b[$, sur lequel la solution $\phi_t(x)$ peut être définie, le plus grand possible : il correspond au prolongement maximal dans le passé ($t < 0$) et dans le futur ($t > 0$) de la solution passant par x à $t = 0$. On appelle intégrale maximale une telle solution. On appelle orbite l'ensemble des points de l'espace des phases décrit par une intégrale maximale. On appelle portrait de phases, la partition de l'espace des phases en orbites. On porte habituellement sur le dessin d'un portrait de phases le sens de parcours des orbites (cf. figure 1.5, page 33, par exemple).*

Les cas où l'intervalle $]a, b[$ de définition d'une intégrale maximale n'est pas \mathbb{R} tout entier sont essentiellement les suivants (cf. figure 1.6, page 34) :

- explosion en temps fini (la norme de la solution part vers l'infini) : l'exemple de base est le suivant $U = \mathbb{R}$ et $\frac{dx}{dt} = x^2 = v(x)$; $\phi_t(0) = 0$, $\phi_t(x) = \frac{-1}{t - 1/x}$ pour $x \neq 0$; si $x > 0$ alors l'intégrale maximale passant par x est définie sur $] - \infty, 1/x[$;
- la courbe intégrale arrive sur le bord du domaine U , en un temps fini, en un endroit où le vecteur vitesse $v(x)$ pointe soit vers l'extérieur de U (on dit que v est sortant) soit vers l'intérieur de U (on dit que v est rentrant) selon que l'on a $b \neq +\infty$ ou $a \neq -\infty$, respectivement.

Les principaux cas où les courbes intégrales sont définies sur un intervalle de longueur infini sont (figure 1.7, page 35) :

- soit $U = \mathbb{R}^n$ et Dv , la matrice jacobienne de v , est bornée sur \mathbb{R}^n (évite les phénomènes d'explosion en temps fini) ; soit U est un domaine borné de \mathbb{R}^n et le champ de vecteurs vitesse est tangent sur le bord de U (cas où v est nul sur le bord par exemple) ; dans les deux cas, $a = -\infty$ et $b = +\infty$;
- si U est un domaine borné de \mathbb{R}^n et si le champ de vecteurs est rentrant dans U , alors $b = +\infty$.

1.1.3 Compléments sur le flot

Proposition 1 [dépendance régulière par rapport aux conditions initiales] *Soient le système (1.2) avec v continûment dérivable (C^1) et $\{\phi_t\}$ le flot associé. Alors la dérivée de $\phi_t(x)$ par rapport à x , notée $D\phi_t(x)$ est solution de l'équation (première variation)*

$$\frac{d}{dt} (D\phi_t(x))_{t=\tau} = Dv(\phi_\tau(x))D\phi_\tau(x)$$

avec comme condition initiale $D\phi_0(x) = I$.

Si v dépend régulièrement d'un paramètre λ ($v = v(x, \lambda)$) alors le flot de $v(\cdot, \lambda)$, $\{\phi_t^\lambda\}$ dépend aussi régulièrement de λ et on a

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\phi_t^\lambda(x)) \right]_{t=\tau} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\phi_\tau^\lambda(x)} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\phi_\tau^\lambda(x)) \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)_{\phi_\tau^\lambda(x)}$$

avec comme condition initiale $\frac{\partial}{\partial \lambda} (\phi_0^\lambda(x)) = 0$.

Pour démontrer ces relations, il suffit de dériver par rapport à x et λ les relations définissant le flot,

$$\frac{d}{dt} (\phi_t^\lambda(x)) \Big|_{t=\tau} = v(\phi_\tau^\lambda(x)), \quad \phi_0^\lambda(x) = x. \blacksquare$$

Nous voyons donc que deux trajectoires $\phi_t(x)$ et $\phi_t(y)$, ayant des conditions initiales voisines ($\|x - y\|$ petit), restent voisines l'une de l'autre sur un intervalle de temps **borné**

($\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\|$ reste petit pour $0 \leq t \leq b$, $b < +\infty$). Plus précisément, on a l'estimation a priori suivante que l'on peut déduire de la proposition précédente (pour une démonstration voir [8]).

Proposition 2 *Si la norme de la matrice jacobienne Dv (norme matricielle issue de la norme $\|\cdot\|$ sur les vecteurs de \mathbb{R}^n) est bornée sur U par une constante K alors, pour x et y dans U ,*

$$\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| \leq \|x - y\| \exp(Kt).$$

Comme l'illustre la figure 1.8, page 36, rien ne dit que pour des temps grands, $t \gg 1/K$, les trajectoires restent encore voisines si elles le sont au départ. La majoration précédente peut très bien être une bonne approximation de l'écart entre deux trajectoires et la divergence est au plus exponentielle sur des **temps longs**. Cette divergence peut être aussi interprétée comme une sensibilité importante par rapport aux conditions initiales. Cette propriété est l'une des caractéristiques des systèmes dits chaotiques.

Soit $y = f(x)$ un changement (local) de coordonnées sur U (par exemple le passage de coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires dans le plan). Autrement dit $f : x \rightarrow y = f(x)$ est un difféomorphisme local. Alors, l'équation différentielle (1.2) devient dans les nouvelles variables y

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{f^{-1}(y)} v(f^{-1}(y)) = w(y). \quad (1.3)$$

Il est alors clair que le flot $\psi_t(y)$, de générateur infinitésimal $w(y)$, est relié au flot $\phi_t(x)$, de générateur infinitésimal $v(x)$, par la relation

$$\psi_t(f(x)) = f(\phi_t(x)),$$

soit $\psi_t \circ f = f \circ \phi_t$ pour chaque t .

Nous allons voir que, autour d'un point où la vitesse v est non nulle, la structure locale du flot (i.e. des trajectoires) est particulièrement simple : comme l'illustre la figure 1.9, page 37, un changement de variables sur x (changement de coordonnées locales) permet de redresser le champ de vitesse en un champ constant arbitraire. On a le théorème suivant, dit théorème de redressement.

Théorème 2 [redressement] *Soit a dans U tel que $v(a) \neq 0$. Alors, il existe un difféomorphisme local f autour de a , $y = (y_1, \dots, y_n) = f(x)$, qui transforme l'équation différentielle (1.2) dans la forme normale suivante :*

$$\frac{dy_1}{dt} = 0 \quad \dots \quad \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0 \quad \frac{dy_n}{dt} = 1.$$

Preuve On peut supposer $a = 0$. Une fois que l'on a compris la construction de la figure 1.10, page 38, la preuve devient très simple. Il suffit d'introduire un hyperplan de contenant pas $v(0)$, passant par 0 et dont la direction est définie par les vecteurs (e_1, \dots, e_{n-1}) associés aux $n - 1$ premières coordonnées de x (quitte à permuter des composantes de x , c'est toujours possible). Les nouvelles variables y , qui mettent le système localement sous la forme normale du théorème, sont alors données par

$$f^{-1} : y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \longrightarrow x = \phi_{y_n}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$$

où ϕ_t est le flot de v . ■

1.1.4 Remarque sur l'espace des phases

Dans les définitions précédentes, nous avons supposé que l'espace des phases est un ouvert U de \mathbb{R}^n . Or, pour une vision globale du flot, et en particulier des comportements sur de grand intervalle de temps du système, on est souvent obligé d'introduire la notion de variété des phases. Une variété abstraite peut être vue comme une mise bout à bout **globalement cohérente** d'ouverts de \mathbb{R}^n correspondant, au moyen de coordonnées locales, à des petits morceaux (voisinages) de la variété (pour une définition mathématique d'une variété différentiable voir [2]). La notion de variété différentiable a pour origine l'étude des courbes (variété de dimension 1) et des surfaces (variété de dimension 2). La figure 1.11, page 39, rappelle les prototypes les plus classiques de variétés de dimension 1 et 2.

S^1 , le cercle, est le prototype des courbes fermées (orbite périodique) et donc apparaît très souvent au cours de l'étude de comportement périodique.

Le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ est la variété des phases naturelle du pendule plan : le pendule (figure 1.19, 47) est caractérisé par l'angle θ par rapport à la verticale descendante, défini à 2π près, donc appartenant à $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et par sa vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ allant de $-\infty$ à $+\infty$. A chacun des points (θ, ω) du cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ est associé un vecteur vitesse, tangent au cylindre (figure 1.12, page 40) au point considéré. La dynamique est alors déterminée par un champ de vecteurs tangents au cylindre.

Le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ apparaît naturellement lors de l'étude de deux oscillateurs (cf. la figure 1.38, page 66).

Bien que le tore T^2 ait la même dimension que la sphère S^2 , il n'est pas possible de faire correspondre **globalement** de façon régulière et biunivoque les points de T^2 et ceux de S^2 (il est instructif d'essayer!)³. Cette impossibilité est d'ordre topologique. Elle a des conséquences sur l'aspect global des champs de vecteurs tangents et sur les flots. Par exemple, il est possible de construire sur le tore T^2 un champ régulier de vecteurs tangents ne s'annulant jamais, alors que c'est impossible pour la sphère S^2 (problème dit du hrisson).

³Contrairement aux notations, ici trompeuses, $S^1 \times S^1$ n'est pas égal (difféomorphe) à S^2 .

1.1.5 Comportements asymptotiques

Là où la vitesse est non nulle, la structure locale du portrait de phases est très simple (théorème de redressement) : dans les bonnes coordonnées, les orbites sont des droites parallèles. En revanche, là où la vitesse s'annule, le portrait de phases peut être nettement plus compliqué. Pour s'en convaincre il suffit de comparer la figure 1.9, page 37, avec la figure 1.13, page 41. L'une des raisons essentielles de cette différence est que, pour étudier la structure des orbites autour d'un point où le vecteur vitesse s'annule, il faut considérer des intervalles de temps non bornés, contrairement au cas où la vitesse est non nulle.

Définition 3 [point d'équilibre] *Les points \bar{x} où le champ de vitesse v s'annule sont appelés points critiques, ou points d'équilibre. Ils correspondent à des points fixes du flot : $\phi_t(\bar{x}) = \bar{x}$ pour tout t .*

Un point d'équilibre est une trajectoire particulière. Une autre trajectoire particulière est la trajectoire qui se referme sur elle-même (cf. figure 1.14, page 42).

Définition 4 [orbite périodique] *On appelle cycle, ou trajectoire périodique ou orbite périodique, une trajectoire $\phi_t(x)$ qui n'est pas réduite à un point et telle qu'il existe $T > 0$ vérifiant $\phi_T(x) = x$. Le plus petit réel T strictement positif tel que $\phi_T(x) = x$ est appelé période, il est indépendant du point x pris sur la trajectoire.*

Les points d'équilibre et les orbites périodiques sont des exemples de sous-ensembles de l'espace des phases dit invariants par le flot et dont la définition est donnée ci-dessous.

Définition 5 [ensemble invariant] *Soit A un sous-ensemble de l'espace des phases U . A est dit invariant (resp. positivement invariant) par le flot ϕ_t , si, pour tout t dans \mathbb{R} (resp. dans $[0, +\infty[$), $\phi_t(A)$ est inclus dans A .*

D'autres exemples d'ensembles invariants sont fournis par les hypersurfaces de niveau d'une fonction réelle de l'espace des phases qui reste constante le long des trajectoires, i.e. une intégrale première.

Définition 6 [intégrale première] *On appelle intégrale première, une fonction $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{d}{dt}[h(\phi_t(x))] = 0$ pour tout x dans U et pour tout t . Cette condition est équivalente à $Dh(x)v(x) = 0$ pour tout x dans U (ce qui évite de connaître explicitement le flot). Ainsi les hypersurfaces de niveau, $\{x \in U : h(x) = c\}$ avec c constante réelle, sont invariantes par le flot.*

Une interprétation géométrique (cf. figure 1.15, page 43) de cette définition est que le champ de vitesses v est tangent aux hypersurfaces de niveau ⁴.

⁴En l'absence de point critique de h où $\frac{\partial h}{\partial x}$ s'annule.

Un prototype d'ensemble positivement invariant, très lié aux systèmes dits dissipatifs, est schématisé sur la figure 1.17, page 45. Soit K un sous-ensemble fermé et borné (compact) de U dont le bord ∂K est régulier (morceaux d'hypersurfaces). Si le champ de vitesse v est rentrant dans K , alors K est positivement invariant, i.e. $\phi_t(K)$ est contenu dans K pour tout $t \geq 0$. Il est alors naturel de considérer l'ensemble résiduel, lui aussi invariant, que l'on obtient par le flot à partir de K , $A = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(K)$, lorsque t tend vers $+\infty$.

Ce cas type est à la base de la notion intuitive d'attracteur : ce vers quoi les trajectoires tendent lorsque le temps devient grand. Cette notion est difficile à définir d'une manière mathématiquement rigoureuse. Nous nous contenterons ici de la définition d'ensemble attracteur (ne pas confondre avec la notion plus restrictive d'attracteur, cf. chapitre 4, définition 19, page 132).

Définition 7 [ensemble attracteur] *Un sous-ensemble fermé A de l'espace des phases est un ensemble attracteur s'il existe un ouvert V de l'espace des phases contenant A tel que, pour tout x dans V , $\phi_t(x) \in V$ pour $t \geq 0$ et $\phi_t(x) \rightarrow A$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

Appliqué sur le système dont le portrait de phase est celui de la figure 1.18, page 46, cette définition fournit un ensemble attracteur qui n'est pas en accord avec la notion intuitive et physique d'attracteur [12] : un attracteur A est invariant par le flot et doit correspondre à l'ensemble des points d'accumulation des trajectoires physiques $\phi_t(x)$.

Sur l'exemple de la figure 1.18, page 46, l'attracteur doit correspondre à ce vers quoi tendent les trajectoires physiques, une fois qu'elles sont rentrées dans le compact K : ici les points d'équilibre M ou N . L'attracteur est clairement contenu dans l'ensemble attracteur $A = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(K)$ sans pour autant lui être égal. En particulier, le point d'équilibre instable (col) du milieu ne peut être raisonnablement considéré comme faisant partie de l'attracteur. L'ensemble attracteur tel qu'il est défini ci-dessus ne correspond qu'en première approximation à la notion intuitive et physique d'attracteur.

1.1.6 L'étude qualitative ou le contenu des modèles

Les résultats précédents (existence et unicité des solutions, théorème 2 de redressement) sont de nature locale en espace et en temps. Ils ne disent rien sur le comportement des solutions lorsque le temps devient grand. Comme pour les équations de Lorenz (cf. chapitre 4), il se peut fort bien que l'allure des solutions, sur de grands intervalles de temps, soit très irrégulière. Bien que l'expression du champ de vitesse en fonction de x soit très simple dans ce cas, le comportement asymptotique des trajectoires est d'une complexité surprenante.

Avant d'aborder les cas compliqués (cf. chapitre 4), il est utile et instructif de connaître certains cas simples. Nous abordons maintenant les deux cas "élémentaires" suivants :

- les trajectoires convergent vers un point stationnaire (le régime limite du système est un point stationnaire) ;

- les trajectoires ont toutes tendance à s'enrouler autour d'une orbite périodique (le régime limite du système est un régime périodique dit d'auto-oscillation).

Les développements qui suivent sont limités à quelques outils analytiques caractérisant la stabilité d'un point d'équilibre (valeurs propres du linéarisé tangent) et d'une orbite périodique (multiplicateurs de l'application de Poincaré). A cette occasion, on introduit la notion fondamentale d'hyperbolicité pour un point d'équilibre et une orbite périodique.

1.2 Points d'équilibre

Un point d'équilibre du système continu (1.2) correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité se pose alors en des termes très simples : si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou encore : une petite perturbation, qui éloigne légèrement le système de son régime stationnaire, peut-elle avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps ?

1.2.1 Stabilité au sens de Liapounov

Prenons l'exemple du pendule $\ddot{\theta} = -(g/l) \sin \theta$ avec θ dans S^1 . Tout le monde connaît ses deux positions d'équilibre (figure 1.19, page 47) : celle du bas, $\theta = 0$, est stable (un petit écart n'entraîne que de petits effets) et celle du haut, $\theta = \pi$, est instable (un petit écart entraîne de grands effets). Si l'on tient compte du freinage de l'air, il est clair que l'équilibre du haut reste instable. L'équilibre du bas reste stable mais avec en plus amortissement au cours du temps des petits écarts. On dit alors que l'équilibre du bas est **asymptotiquement stable** : au bout d'un certain temps, qui peut être grand si le freinage de l'air est faible, le pendule devient immobile (physiquement).

Ces questions de stabilité ont été étudiées par A.M. Liapounov qui en a donné une définition assez générale englobant de nombreux systèmes physiques [9].

Définition 8 [stabilité] *Un point d'équilibre \bar{x} de (1.2) est stable au sens de Liapounov si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (dépendant de ε mais indépendant du temps t) tel que, pour tout x vérifiant $\|x - \bar{x}\| \leq \eta$, $\|\phi_t(x) - \bar{x}\| \leq \varepsilon$ pour tout $t > 0$.*

Dans un langage plus imagé : un petit déséquilibre initial n'entraîne qu'un petit déséquilibre au cours du temps, qui peut très bien être permanent.

Définition 9 [stabilité asymptotique] *Un point d'équilibre \bar{x} de (1.2) est asymptotiquement stable au sens de Liapounov s'il est stable au sens de Liapounov (cf. définition 8) et si de plus, pour tout x suffisamment proche de \bar{x} , $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = \bar{x}$.*

Remarquons que ces définitions sont locales en espace : elles concernent uniquement les orbites voisines d'un point d'équilibre.

Revenons à l'exemple du pendule et supposons que le freinage de l'air est proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. La dynamique du pendule est alors décrite par le système du second ordre,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(g/l) \sin \theta - \alpha \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.4)$$

où $\alpha > 0$ est le coefficient de frottement avec l'air divisé par la masse du pendule. L'énergie mécanique du pendule est proportionnelle à la fonction $V(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta}^2/2 - (g/l)(\cos \theta - 1)$ (l'énergie mécanique de l'équilibre du bas $(\theta, \dot{\theta}) = 0$ est prise égale à 0). La présence de frottement implique physiquement dissipation d'énergie. Elle se traduit ici par le fait que V décroît le long des trajectoires :

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha \dot{\theta}^2 \leq 0.$$

V est appelé fonction de Liapounov du système. L'intérêt d'une telle fonction est qu'il n'est pas nécessaire de résoudre explicitement l'équation différentielle (1.4) pour en déduire la stabilité de l'équilibre d'en bas : en effet, comme l'énergie V est positive et décroît au cours du temps, elle converge. Intuitivement, \dot{V} doit tendre vers 0. Ceci implique que, comme $\alpha \neq 0$, $\dot{\theta} \rightarrow 0$ et $\ddot{\theta} \rightarrow 0$ pour les temps très grands. Mais alors, (1.4) indique que $\theta \rightarrow 0$ ou $\theta \rightarrow \pi$. Ainsi quelque soit la condition initiale, les trajectoires tendent soit vers l'équilibre du haut soit vers l'équilibre du bas.

Cependant, il convient de distinguer ces deux équilibres. Contenu du fait que

$$V(\theta, \dot{\theta}) \approx \dot{\theta}^2 + (g/2l)\theta^2$$

pour $(\theta, \dot{\theta})$ proche de 0, les ensembles $\{(\theta, \dot{\theta}) : V(\theta, \dot{\theta}) \leq \varepsilon\}$, avec $\varepsilon > 0$ petit, s'emboîtent les uns dans les autres autour de 0. La relation $\dot{V} \leq 0$ signifie géométriquement que le champ de vecteurs vitesse des phases,

$$(\theta, \omega) \longrightarrow \begin{pmatrix} \omega \\ -g/l \sin \theta - \alpha \omega \end{pmatrix},$$

est rentrant dans cette famille d'ensembles emboîtés. On obtient ainsi la figure 1.20, page 48, qui montre clairement que l'équilibre inférieur est asymptotiquement stable au sens de Liapounov. On peut montrer, de façon similaire, que l'équilibre du haut n'est pas stable au sens de Liapounov.

Les développements des deux paragraphes précédents peuvent être rendus parfaitement rigoureux et correspondent à ce que l'on appelle première méthode de Liapounov. Ils s'appuient sur les deux résultats généraux suivants (démonstration dans [9]).

Théorème 3 Soient (1.2) avec $U = \mathbb{R}^n$ (pour simplifier) et une fonction C^1 , $V : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$, telle que :

- si $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini en norme, $V(x)$ tend aussi vers l'infini ;

- V décroît le long de toutes les trajectoires, $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

Alors, toutes les trajectoires sont définies au moins sur $[0, +\infty[$ et convergent asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant (cf. définition 5) contenu l'ensemble défini par $DV(x)v(x) = 0$ ($DV(x)$ désigne la matrice jacobienne de V en x).

De ce théorème, on déduit un résultat plus spécifique au point d'équilibre.

Théorème 4 Si \bar{x} est un point d'équilibre de (1.2) et si la fonction C^1 , $V : U \rightarrow [0, +\infty[$, est telle que :

- $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq \bar{x}$;
- V décroît le long de toutes les trajectoires ($\frac{dV}{dt} \leq 0$).

Alors \bar{x} est stable au sens de Liapounov. Si l'on suppose en plus que $\frac{dV}{dt} < 0$ si $x \neq \bar{x}$, alors \bar{x} est asymptotiquement stable au sens de Liapounov. Si l'on suppose encore en plus que $V(x)$ tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini, toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de \bar{x} , tendent vers \bar{x} : on dit alors que le point \bar{x} est globalement asymptotiquement stable.

Ces deux théorèmes restent valables même si la fonction de Liapounov V n'est pas aussi régulière. Par exemple V peut être supposée continue et uniquement dérivable par morceaux. Pour de plus amples détails voir [9].

Une autre méthode, dite indirecte ou seconde méthode de Liapounov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre \bar{x} , consiste à étudier le système linéarisé tangent :

$$\frac{d\Delta x}{dt} = Dv(\bar{x}) \Delta x.$$

On a alors les deux résultats suivants.

Théorème 5 Soit \bar{x} un point d'équilibre de (1.2). Si les valeurs propres de $Dv(\bar{x})$ sont toutes à partie réelle **strictement** négative, alors \bar{x} est un équilibre asymptotiquement stable au sens de Liapounov.

Cette condition suffisante sur les valeurs propres du linéarisé tangent n'est pas une condition nécessaire comme le montre l'équation scalaire $\frac{dx}{dt} = -x^3$ dont les solutions $t \rightarrow \pm \sqrt{1/(t-a)}$ convergent toutes vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

De façon très similaire, on a la condition suffisante (mais non nécessaire) d'instabilité suivante.

Théorème 6 Soit \bar{x} un point d'équilibre de (1.2). Si l'une des valeurs propres de $Dv(\bar{x})$ possède une partie réelle **strictement** positive alors \bar{x} n'est pas un équilibre stable au sens de Liapounov.

Pour conclure, noter que l'absence de stabilité au sens de Liapounov n'implique nullement que les trajectoires, qui démarrent près de \bar{x} , ne convergent pas, quand t tend vers $+\infty$, vers \bar{x} (cf. figure 1.16, page 44).

1.2.2 Le théorème de Grobman-Hartman

Le théorème de redressement montre que le premier terme $v(x^0)$ du développement en série de v autour de \bar{x} ,

$$v(x) = v(\bar{x}) + Dv(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots,$$

est suffisant pour avoir l'allure du portrait de phases autour de \bar{x} si $v(\bar{x}) \neq 0$.

Pour un point d'équilibre, le premier terme de cette série est nul ($v(\bar{x}) = 0$), il est alors naturel de considérer le second terme, c'est à dire le système linéarisé tangent au point stationnaire :

$$\frac{d\Delta x}{dt} = Dv(\bar{x}) \Delta x$$

avec $\Delta x = x - \bar{x}$. Des résultats précédents sur la stabilité d'un point d'équilibre, il ressort que, même si la matrice $Dv(\bar{x})$ est inversible, on ne peut rien dire, en général sur le portrait de phases autour de \bar{x} (i.e. des trajectoires qui démarrent près de \bar{x}).

Remarquons cependant que les valeurs propres du linéarisé tangent en \bar{x} ne dépendent pas des coordonnées locales autour de \bar{x} . En effet, si $y = g(x)$ est un difféomorphisme local en \bar{x} , alors (1.2) s'écrit, dans les coordonnées y ,

$$\frac{dy}{dt} = Dg(g^{-1}(y)) v(g^{-1}(y)).$$

Un calcul simple montre que la matrice du linéarisé tangent en $\bar{y} = g(\bar{x})$ est semblable à celle de (1.2) en \bar{x} . Donc les valeurs propres sont les mêmes.

Définition 10 [exposants caractéristiques] Soit \bar{x} un point stationnaire de (1.2), $v(\bar{x}) = 0$. Les valeurs propres de $Dv(\bar{x})$ sont appelées *exposants caractéristiques* du point d'équilibre \bar{x} . Le point d'équilibre \bar{x} est dit *hyperbolique* si tous ses exposants caractéristiques sont à partie réelle non nulle.

La motivation de cette définition repose aussi et surtout sur le résultat fondamental suivant.

Théorème 7 [Grobman-Hartman] Soit \bar{x} un point d'équilibre hyperbolique de (1.2). Notons $\{\phi_t\}$ le flot de (1.2) et $\{\Delta\phi_t\}$ le flot du linéarisé tangent,

$$\frac{d\Delta x}{dt} = Dv(\bar{x}) \Delta x$$

avec $\Delta x = x - \bar{x}$. Alors il existe un homéomorphisme h (une application bijective continue et d'inverse continue) autour de \bar{x} qui envoie les orbites de ϕ_t voisines de \bar{x} sur celles de $\Delta\phi_t$ voisines de 0. C'est à dire, pour tout x proche de \bar{x} ,

$$\phi_t(x) = h^{-1}(\Delta\phi_t(h(x))).$$

Ce résultat, connu sous le nom de théorème de Grobman-Hartman, signifie la chose suivante. Pour un point fixe hyperbolique, il y a équivalence topologique entre les orbites du système non linéaire et celles de son linéarisé tangent, comme l'illustre la figure 1.21, page 49. En revanche, cette équivalence n'est pas nécessairement plus fine : en général h n'est pas dérivable. Le manque de régularité de h est lié à des problèmes de résonances entre les exposants caractéristiques (cf. définition 17, page 80). Ces questions sont abordées dans le chapitre 2.

En pratique, cela implique que, pour des études de stabilité de nature purement topologique, le linéarisé tangent peut être suffisant. En revanche pour des études de nature plus fine où intervient la différentiabilité, le linéarisé tangent peut ne plus être une approximation suffisante même localement. Autrement dit, l'approximation d'un système autour d'un point fixe hyperbolique par son linéarisé tangent n'est, en général, que très grossière.

1.2.3 Les systèmes linéaires

Cette sous-section ne comporte que le strict minimum sur les systèmes linéaires. Pour un exposé complet avec démonstration, nous renvoyons à [8].

Dans toute cette sous-section nous considérons le système linéaire

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1.5)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ une matrice constante.

L'exponentielle d'une matrice

$\exp(tA)$ est la matrice dépendant du temps définie par la série absolument convergente

$$\exp(tA) = \left[I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots \right] \quad (1.6)$$

où I est la matrice identité. Toute solution de (1.5) passant par x à $t = 0$ s'exprime sous la forme

$$\exp(tA) x = \phi_t(x).$$

Voici les principales propriétés de l'exponentielle :

$$\exp(tA) \exp(sA) = \exp((t+s)A)$$

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A \exp(tA)$$

$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$$

$$\exp(A) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(I + \frac{A}{m} \right)^m$$

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$$

où t et s sont des réels, P est une matrice inversible, “det” désigne le déterminant et “tr” désigne la trace.

Portrait de phases

Nous allons considérer maintenant les cas les plus intéressants, principalement les cas génériques (i.e. stables par petites perturbations des éléments de A), que l'on peut rencontrer en dimensions $n = 2$ et $n = 3$.

Dimension $n = 2$ Les principaux cas sont résumés sur les figures 1.22, page 50, et 1.23, page 51. λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A (distinctes ou non, réelles ou complexes conjuguées), ξ_1 et ξ_2 sont les vecteurs propres réels associés quand ils existent.

Dimension $n = 3$ La figure 1.24, page 52, montre, sur un exemple, comment, à partir des portraits de phases en dimension 2, on construit, dans les cas génériques, le portrait de phases en dimension 3 : il suffit de décomposer \mathbb{R}^3 en somme d'espaces propres invariants de dimension 1 ou 2.

Forme de Jordan et calcul de l'exponentielle

Le calcul de $\exp(tA)$ peut être simplifié en faisant intervenir une transformation P inversible qui diagonalise A , lorsque c'est possible, ou qui transforme A en une matrice diagonale par bloc dite matrice de Jordan (cf. [8]). En dimension 2, on peut ainsi toujours se ramener aux trois formes normales de Jordan suivantes :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad \exp(tA) = P \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad \exp(tA) = \exp(\alpha t) P \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad \exp(tA) = \exp(\lambda t) P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En dimension 3, une matrice A possède toujours une valeur propre réelle λ et un vecteur propre réel. Si l'on suppose que λ n'est pas une valeur propre de multiplicité 3, ce qui est très exceptionnel, on a

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec P matrice d'ordre 3 inversible et λ, a, b, c et d réels. On se ramène ainsi à la dimension 2.

Espaces vectoriels rentrant et sortant

La décomposition de Jordan de A permet de calculer $\exp(tA)$, d'obtenir directement le flot $\phi_t(x) = \exp(tA)x$ et d'avoir des informations très précises sur le portrait de phases, trop précises pour pouvoir être étendues au non linéaire. Si les valeurs propres de A sont à partie réelle non nulle (on dit souvent, pour abrégé, que A est hyperbolique), une décomposition plus grossière et de nature essentiellement topologique de A peut être étendue sans ambiguïté au non linéaire. Cette décomposition est la suivante.

Considérons le système linéaire (1.5). Nous supposons, jusqu'à la fin de cette sous-section, que A est hyperbolique, i.e. toutes ses valeurs propres sont à partie réelle non nulle. Soit m_s le nombre de valeurs propres stables (à partie réelle < 0) et m_i le nombre de valeurs propres instables (à partie réelle > 0). Puisque A est hyperbolique, $m_s + m_i = n$. A partir de la décomposition de Jordan de A , il est alors immédiat de voir qu'à la partie stable du spectre de A est associé un sous-espace vectoriel E^s de \mathbb{R}^n de dimension m_s et qu'à la partie instable est associé un sous-espace vectoriel E^i complémentaire de E^s et de dimension m_i : $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^i$. De plus, E^s et E^i sont stables par A : $A(E^s) \subset E^s$ et $A(E^i) \subset E^i$. Donc ils sont invariants par le flot : $\exp(tA)E^s \subset E^s$ et $\exp(tA)E^i \subset E^i$.

On a alors les comportements asymptotiques suivants (cf. figure 1.25, page 53) :

- si $x \in E^s$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tA)x = 0$;
- si $x \in E^i$ alors $\lim_{t \rightarrow -\infty} \exp(tA)x = 0$.

C'est pourquoi, E^s est appelé espace propre rentrant ou espace propre stable et E^i est appelé espace propre sortant ou espace propre instable. Dans le sous-espace E^s , le flot $\exp(tA)$ est contractant : les trajectoires se rapprochent les unes des autres. Dans le sous-espace E^i , le flot est par contre dilatant : les trajectoires s'éloignent les unes des autres. On a alors le théorème suivant, dit de classification topologique des systèmes linéaires continus hyperboliques (démonstration dans [2]).

Théorème 8 [classification topologique des systèmes linéaires] *Soient deux systèmes linéaires, $\frac{dx}{dt} = Ax$ et $\frac{dx}{dt} = Bx$, avec A et B des matrices d'ordre n et dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle non nulle. Ces systèmes sont topologiquement équivalents, i.e. il existe h un homéomorphisme de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\exp(tA)x = h(\exp(tB)h^{-1}(x))$, si et seulement si le nombre des valeurs propres de A à partie réelle positive est égal à celui de B .*

1.2.4 Espaces rentrant et sortant, portrait de phases

Avec le théorème 7 de Grobman-Hartman, on déduit du résultat précédent que, autour d'un point fixe hyperbolique, les trajectoires d'un système non linéaire sont entièrement caractérisées, d'un point de vue topologique, par la dimension des espaces vectoriels propres rentrant et sortant du linéarisé tangent.

Ces espaces vectoriels propres possèdent, en fait, un “prolongement” unique sur le système non linéaire comme l’illustre par la figure 1.26, page 54. Ces espaces vectoriels sont en fait les espaces tangents aux espaces (sous-variétés différentiables) rentrant $W_{loc}^s(\bar{x})$ et sortant $W_{loc}^i(\bar{x})$ définis par le résultat suivant.

Théorème 9 [sous-variétés stable et instable] *Supposons que (1.2) possède un point fixe hyperbolique \bar{x} dans U . Soit V un petit voisinage de \bar{x} dans U . Alors, localement autour de \bar{x} , le sous-espace rentrant (on dit aussi stable) $W_{loc}^s(\bar{x})$ défini par*

$$W_{loc}^s = \left\{ x \in v \quad : \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \geq 0 \phi_t(x) \in V \right\}$$

possède une structure de sous-variété différentiable dont l’espace vectoriel tangent en \bar{x} est le sous-espace propre rentrant E^s du linéarisé tangent en \bar{x} . De même, localement autour de \bar{x} , le sous-espace sortant (on dit aussi instable) $W_{loc}^i(\bar{x})$ défini par

$$W_{loc}^i = \left\{ x \in U \quad : \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \leq 0 \phi_t(x) \in V \right\}$$

possède une structure de sous-variété différentiable dont l’espace vectoriel tangent en \bar{x} est le sous-espace propre sortant E^i du linéarisé tangent en \bar{x} .

Remarquer que W_{loc}^s (resp. W_{loc}^i) est positivement (resp. négativement) invariant par le flot :

$$\forall t \geq 0 \phi_t(W_{loc}^s) \subset W_{loc}^s \quad \text{et} \quad \forall t \leq 0 \phi_t(W_{loc}^i) \subset W_{loc}^i.$$

Ces deux espaces sont d’un intérêt capital pour la compréhension locale du flot autour d’un point critique \bar{x} . Définis localement autour de \bar{x} , ils peuvent être prolongés en W^s et W^i loin de \bar{x} ,

$$W^s = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s) \quad \text{et} \quad W^i = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^i),$$

pour devenir invariants pour tout t . La géométrie des variétés⁵ W^s et W^i est souvent déterminante pour l’étude globale du flot loin de \bar{x} . Comme le montrent les figures 1.27, page 55, et 1.28, page 56, loin de \bar{x} , les effets non linéaires peuvent contraindre ces espaces, par exemple, soit à revenir sur \bar{x} (orbite homocline), soit à s’accumuler en des points ou des zones de l’espace des phases éloignés de \bar{x} . Des illustrations plus complètes, qui mettent clairement en lumière les rôles que peuvent jouer ces espaces stable et instable, se trouvent dans [1]. Par ailleurs, nous verrons au chapitre 4 un exemple où l’utilisation de ces espaces permet d’analyser ce qui se passe loin de l’équilibre (bifurcation homocline dans le modèle de Lorentz).

⁵En gnral W^i et W^s ne sont pas des sous varits : elles peuvent s’accumuler en certains endroits de l’espace des phases.

1.3 Orbites périodiques

Considérons une orbite périodique γ d'un système dans le plan (cf. figure 1.14, page 42) et supposons que γ attire les trajectoires qui lui sont proches. Cela signifie que, d'un tour sur l'autre, les trajectoires se rapprochent de plus en plus de γ .

Cette constatation élémentaire peut être affinée ainsi. Considérons un point p sur γ et un petit segment Σ transverse à γ et passant par p (cf. figure 1.29, page 57). La trajectoire passant par un point q sur Σ proche de p recoupera, au bout d'un temps proche de la période de γ , cette même section Σ en un point noté $P(q)$. L'application P est appelée application de Poincaré et le petit segment Σ , section de Poincaré. P envoie un voisinage de p dans Σ vers un autre voisinage de p dans Σ et admet pour point fixe $p = P(p)$. La trajectoire issue de q aura tendance à s'enrouler autour de γ si les itérations de P en q , $P^k(q)$, tendent vers p lorsque le nombre d'itérations k tend vers $+\infty$. Comme le montrent les diagrammes de Lamerey de la figure 1.29, page 57, on a génériquement les deux cas suivants :

- soit $DP(p) > 1$ et alors, d'un tour sur l'autre, les trajectoires voisines de γ s'en éloignent selon un écart qui croît régulièrement selon la progression de la suite géométrique de raison $DP(p)$;
- soit $0 \leq DP(p) < 1$ (comme on est dans le plan (surface orientable) $DP(p)$ est nécessairement ≥ 0 ici) et alors, d'un tour sur l'autre, les trajectoires voisines de γ s'en rapprochent avec un écart qui décroît régulièrement selon la progression de la suite géométrique de raison $DP(p)$.

En résumé, si l'application de Poincaré est strictement contractante, i.e. $|DP(p)| < 1$, alors l'orbite périodique γ est asymptotiquement stable. Si P est strictement dilatante, i.e. $|DP(p)| > 1$, alors γ n'est pas asymptotiquement stable. Si $|DP(p)| = 1$, on ne peut pas conclure ; il faut étudier plus finement P au voisinage de p et en particulier considérer $D^2P(p)$ (cf. chapitre 2).

1.3.1 Stabilité asymptotique

La méthode précédente d'analyse de la stabilité autour d'une trajectoire périodique est tout à fait générale. Donnons tout d'abord une définition de la stabilité asymptotique d'une orbite périodique.

Définition 11 [stabilité asymptotique d'une orbite périodique] *Supposons que le système (1.2), dont le flot est noté $\{\phi_t\}$, possède une trajectoire périodique γ . γ est dite asymptotiquement stable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- pour tout ouvert V de l'espace des phases U contenant γ , il existe un ouvert W dans U contenant γ tel que $\phi_t(W)$ soit contenu dans V pour tout $t \geq 0$;
- pour tout point x proche de γ , $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(x), \gamma) = 0$ où $d(z, \gamma)$ désigne la distance minimale d'un point z à γ .

La première condition est l'équivalent de la stabilité au sens de Liapounov pour un point : si la condition initiale est proche de γ alors la trajectoire qu'elle engendre pour les temps positifs reste proche de γ .

L'application de Poincaré associée à l'orbite périodique γ se construit comme le montre la figure 1.30, page 58. Soient p un point de γ et Σ un petit morceau d'hypersurface (section de Poincaré de dimension $n - 1$) contenant p et transverse à γ en p . On peut alors choisir un petit voisinage V de p dans Σ de sorte que l'application $P : V \rightarrow \Sigma$ de premier retour soit définie pour tout point q dans V par

$$P(q) = \phi_{\tau_q}(q)$$

où $\tau(q) > 0$ est le temps mis par la trajectoire issue de q pour revenir couper Σ . $\tau(q)$ est voisin de la période $T = \tau_p$ de γ et $\tau(q) \rightarrow T$ lorsque $q \rightarrow p$. p est un point fixe de P , $P(p) = p$. On a alors le critère suffisant de stabilité asymptotique (démonstration dans [8]).

Théorème 10 *Supposons que le système (1.2) possède une trajectoire périodique γ . Considérons un point p de γ et l'application P de premier retour associée à une section Σ . Si les $n - 1$ valeurs propres de la matrice jacobienne de P en p , $DP(p)$, sont toutes de module inférieur à 1 strictement, alors γ est asymptotiquement stable.*

On peut montrer que les valeurs propres de $DP(p)$ ne dépendent ni du point p choisi sur γ ni de la section Σ transverse à γ [8]. Ces $n - 1$ nombres complexes sont appelés **multiplicateurs caractéristiques** de l'orbite périodique γ .

Calcul des multiplicateurs caractéristiques Comme pour les exposants caractéristiques d'un point d'équilibre, le calcul des multiplicateurs caractéristiques s'effectue par une opération de linéarisation. Ici, il ne s'agit plus de linéariser (1.2) autour d'un point stationnaire, mais autour de l'orbite périodique γ . On procède ainsi. Notons $\bar{x}(t)$ une courbe intégrale sur γ . En notant T la période, on a $\bar{x}(t) = \bar{x}(t + T)$ pour tout t . L'écart $\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ entre une trajectoire $x(t)$ voisine de γ et γ ($d(x(t), \gamma)$ petit) obéit, en première approximation, à l'équation linéaire suivante, à coefficients périodiques en temps :

$$\frac{d\Delta x}{dt} = Dv(\bar{x}(t)) \Delta x. \quad (1.7)$$

La théorie de Floquet (voir [8]) montre que les solutions de (1.7) sont de la forme

$$\Delta x(t) = Z(t) \exp(tR) \Delta x^0$$

où $Z(t)$ est une matrice $n \times n$ périodique en temps, de période T avec $Z(0) = Z(T) = I$, R est une matrice constante $n \times n$ et Δx^0 la valeur initiale de Δx . Comme

$$\frac{dv(\bar{x}(t))}{dt} = Dv(\bar{x}(t))v(\bar{x}(t))$$

(dérivation de fonctions composées), $v(\bar{x}(t))$ est solution de (1.7) et donc

$$v(\bar{x}(T)) = v(\bar{x}(0)) = \exp(TR)v(\bar{x}(0)).$$

Il est alors clair que $\exp(TR)$ admet au moins une valeur propre égale à 1 qui correspond à l'absence de variation, sur une période, des petits écarts le long de la trajectoire γ . Les multiplicateurs caractéristiques sont alors donnés par la proposition suivante.

Proposition 3 *Les $n - 1$ multiplicateurs caractéristiques de l'orbite périodique γ correspondent à l'ensemble des $n - 1$ valeurs propres de l'opérateur linéaire $\exp(TR)$ comptées avec leurs multiplicités et auxquelles on enlève la valeur propre 1.*

Ainsi l'obtention des multiplicateurs caractéristiques nécessite la connaissance de $\bar{x}(t)$ et l'intégration de l'équation différentielle (1.7). En pratique, il est en général impossible de connaître explicitement un paramétrage de γ sous la forme $\bar{x}(t)$ et de résoudre analytiquement (1.7). Contrairement au calcul des exposants caractéristiques, le calcul analytique des multiplicateurs caractéristiques s'avère nettement plus ardu. En revanche, les calculs numériques sont possibles et peu compliqués dès que l'on connaît γ même numériquement.

1.3.2 Systèmes dynamiques discrets

L'étude de la stabilité des solutions périodiques, grâce à l'application de Poincaré et aux multiplicateurs caractéristiques, permet d'entrevoir l'importance des systèmes dynamiques discrets, ou, dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes. Un système dynamique discret est de la forme

$$x_{k+1} = G(x_k) \tag{1.8}$$

où G est une application régulière (un difféomorphisme en général) d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans lui-même. Le système continu (1.2) peut être étudié comme un système discret si, au lieu de considérer son flot continu ϕ_t , on considère $\tau > 0$ ("sorte" de période d'échantillonnage) et l'application associée

$$\begin{aligned} G : U &\rightarrow U \\ x &\rightarrow G(x) = \phi_\tau(x) \end{aligned} .$$

Comme $\phi_\tau \circ \phi_\tau = \phi_{2\tau}$, il est clair que l'étude de ϕ_t lorsque $t \rightarrow +\infty$ et celle de

$$G^k = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k \text{ fois}}$$

lorsque l'entier k tend vers $+\infty$ doivent être très similaires.

Nous rappelons ici, succinctement, comment les notions et résultats précédents, introduits pour les systèmes continus, se transposent aux les systèmes discrets.

Point fixe et stabilité

Définition 12 [point fixe et multiplicateurs caractéristiques] Soit le système discret (1.8). Un point fixe \bar{x} est défini par la relation $G(\bar{x}) = \bar{x}$. Les valeurs propres du jacobien de G en \bar{x} , $DG(\bar{x})$, sont appelées multiplicateurs caractéristiques de G en \bar{x} . Le point fixe \bar{x} est dit hyperbolique si aucun de ces multiplicateurs caractéristiques n'est de module égal à 1.

La figure 1.31, page 59, illustre comment l'exponentielle complexe permet de passer des exposants caractéristiques aux multiplicateurs caractéristiques, et justifie après coup la terminologie.

Définition 13 [stabilité] Un point fixe \bar{x} de (1.8) est stable au sens de Liapounov si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (dépendant de ε mais indépendant du nombre d'itérations k) tel que, pour tout x vérifiant $\|x - \bar{x}\| \leq \eta$, $\|G^k(x) - \bar{x}\| \leq \varepsilon$ pour tout entier $k > 0$.

Définition 14 [stabilité asymptotique] Un point fixe \bar{x} de (1.8) est asymptotiquement stable au sens de Liapounov s'il est stable au sens de Liapounov et si, de plus, pour tout x suffisamment proche de \bar{x} , $\lim_{k \rightarrow +\infty} G^k(x) = \bar{x}$.

Pour étudier la stabilité autour d'un point fixe \bar{x} , il est souvent utile d'étudier le système linéarisé tangent :

$$\Delta x_{k+1} = DG(\bar{x}) \Delta x_k$$

où $\Delta x = x - \bar{x}$ correspond à un petit écart par rapport à \bar{x} . On a alors les deux résultats suivants.

Proposition 4 Soit \bar{x} un point fixe de (1.8). Si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1, alors \bar{x} est asymptotiquement stable au sens de Liapounov.

Cette condition de stabilité sur les multiplicateurs caractéristiques n'est pas nécessaire. Elle n'est que suffisante. On a aussi la condition suffisante (mais non nécessaire) d'instabilité suivante.

Proposition 5 Soit \bar{x} un point fixe de (1.8). Si l'un des multiplicateurs caractéristiques de \bar{x} est de module strictement supérieur à 1, alors \bar{x} n'est pas stable au sens de Liapounov.

Le théorème de Grobman-Hartman

La motivation de la définition d'un point fixe hyperbolique repose surtout sur le théorème suivant dit de Grobman-Hartman.

Théorème 11 [Grobman-Hartman] *Si le système discret (1.8) admet un point fixe \bar{x} dans U hyperbolique, alors il existe un homéomorphisme h (application continue bijective et d'inverse continue) défini localement autour de \bar{x} tel que*

$$G(x) = h^{-1}(DG(\bar{x})h(x)).$$

Les systèmes linéaires discrets

Nous considérons ici le système linéaire discret suivant

$$x_{k+1} = Bx_k \tag{1.9}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ constant. L'étude des comportements asymptotiques de la suite récurrente x_k repose sur le calcul des puissances successives de B . Comme pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants, il est commode d'utiliser la décomposition en blocs de Jordan.

En dimension 2, on a uniquement les 3 cas suivants ($(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \theta)$ réels, P matrice 2×2 inversible) :

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad B^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$B = \alpha P \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad B^k = \alpha^k P \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad B^k = P \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En dimension 3, on se ramène, sauf cas exceptionnel, à la dimension 2 par la décomposition de B suivante :

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec P matrice d'ordre 3 inversible et λ, a, b, c et d réels.

A partir des calculs précédents, il est assez simple de dessiner l'allure des trajectoires, i.e. les portraits de phases, $(B^k(x))^{k \geq 0}$, dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Les figures 1.32, page 60, et 1.33, page 61, en donnent quelques uns.

Revenons au cas général. En utilisant la décomposition en blocs de Jordan, on peut montrer que, dans le cas hyperbolique, l'espace \mathbb{R}^n est somme directe de deux sous-espaces vectoriels E^s et E^i , stables par B ($B(E^s) \subset E^s$ et $B(E^i) \subset E^i$), de dimension respective m^s et m^i où m^s (resp. m^i) est le nombre de multiplicateurs de module < 1 (resp. > 1). Comme l'illustre la figure 1.34, page 62, si $x \in E^s$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k(x) = 0$

et si $x \in E^i$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^{-k}(x) = 0$ ($B|_{E^i}$ est bijectif car injectif ; il est donc licite de considérer B^{-1} sur E^i). C'est pourquoi on appelle E^s et E^i les espaces vectoriels rentrant et sortant (on dit aussi contractant ou stable et dilatant ou instable) de l'opérateur B .

Espaces rentrant et sortant en non linéaire

Ces espaces vectoriels possèdent, en fait, un "prolongement" unique sur le système non linéaire comme l'illustre par la figure 1.35, page 63. Ces espaces vectoriels sont en fait les espaces tangents aux espaces (sous-variétés différentiables) rentrant W_{loc}^s et sortant W_{loc}^i définis par le résultat ci-dessous.

Théorème 12 [sous-variétés stable et instable] *Supposons que le difféomorphisme G de (1.8) possède un point fixe hyperbolique \bar{x} dans U . Soit V un petit voisinage de \bar{x} dans U . Alors, localement autour de \bar{x} , le sous-espace rentrant (on dit aussi stable) W_{loc}^s , défini par*

$$W_{loc}^s = \left\{ x \in V \quad : \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} G^k(x) = \bar{x} \text{ et } \forall k \geq 0 \ G^k(x) \in V \right\},$$

possède une structure de sous-variété différentiable dont l'espace vectoriel tangent en \bar{x} est le sous-espace vectoriel rentrant E^s du linéarisé tangent en \bar{x} . De même, localement autour de \bar{x} , le sous-espace sortant (on dit aussi instable) W_{loc}^i , défini par

$$W_{loc}^i = \left\{ x \in V \quad : \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} G^{-k}(x) = \bar{x} \text{ et } \forall k \geq 0 \ G^k(x) \in V \right\},$$

possède une structure de sous-variété différentiable dont l'espace vectoriel tangent en \bar{x} est le sous-espace sortant E^i du linéarisé tangent en \bar{x} .

Remarquons que W_{loc}^s (resp. W_{loc}^i) sont invariants par G et G^{-1} respectivement :

$$G(W_{loc}^s) \subset W_{loc}^s \quad \text{et} \quad G^{-1}(W_{loc}^i) \subset W_{loc}^i.$$

Définis localement autour de \bar{x} , W_{loc}^s et W_{loc}^i peuvent être prolongés en W^s et W^i loin de \bar{x} :

$$W^s = \bigcup_{k \geq 0} G^{-k}(W_{loc}^s) \quad \text{et} \quad W^i = \bigcup_{k \geq 0} G^k(W_{loc}^i).$$

Alors la géométrie des espaces rentrant globaux W^s et W^i s'avère être d'un intérêt capital pour l'étude du G^k lorsque $k \rightarrow +\infty$. Comme le montre la figure 1.36, page 64, les effets non linéaires peuvent, par exemple, contraindre ces espaces prolongés à se couper loin de \bar{x} en un point q dit homoclinique. Une telle intersection en implique une infinité d'autres de plus en plus proches de \bar{x} . Elle implique aussi un comportement très irrégulier et chaotique pour les orbites de G autour de \bar{x} .

Orbites périodiques

Définition 15 Une orbite $(G^k(x))^{k \geq 0}$ du système (1.8) est dite périodique si $G(x) \neq x$ et s'il existe $k \geq 2$ tel que $G^k(x) = x$. Le plus petit entier $k \geq 2$ tel que $G^k(x) = x$ est alors appelé période.

Comme pour les cycles limites, on peut définir une notion de stabilité (asymptotiquement) autour d'une orbite périodique. Ici, en fait, c'est encore plus simple : pour étudier la stabilité d'une orbite périodique issue de x et de période k , il suffit de considérer G^k pour se ramener à l'étude de la stabilité d'un point fixe.

1.4 Cas des flots de dimension 2

1.4.1 Flots dans le plan

Nous avons étudié deux types de régimes asymptotiques :

- les trajectoires convergent toutes uniformément vers un point de l'espace des phases ;
- les trajectoires s'enroulent asymptotiquement autour d'une orbite périodique.

Pour les systèmes continus dans le plan, le théorème de Poincaré-Bendixon, énoncé ci-dessous et démontré dans [8], affirme qu'en plus de ces deux régimes asymptotiques, qu'il en existe seulement un troisième où la trajectoire s'enroule autour d'une courbe fermée du plan comportant des points d'équilibre (cf. exemple de la figure 1.37, page 65).

Théorème 13 [Poincaré-Bendixon] Soient le système $\frac{dx}{dt} = v(x)$ dans le plan \mathbb{R}^2 et la trajectoire issue de x , $\phi_t(x)$, définie pour $t \geq 0$. Si la trajectoire reste bornée (i.e. $\|\phi_t(x)\| \leq K < +\infty$, pour tout $t > 0$) alors, nécessairement,

- soit $\phi_t(x)$ converge vers un point d'équilibre \bar{x} ($v(\bar{x}) = 0$) lorsque t tend vers $+\infty$;
- soit $\phi_t(x)$ s'enroule autour d'une orbite périodique γ , i.e. la distance minimale entre $\phi_t(x)$ et γ , $d(\phi_t(x), \gamma)$, tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$;
- soit $\phi_t(x)$ s'enroule autour d'une courbe fermée, composée de points d'équilibre et de trajectoires particulières les joignant.

Ce résultat est de nature topologique. Pour s'en convaincre, il est très instructif d'essayer de construire, en restant dans le plan, des trajectoires ayant des comportements plus compliqués (par exemple s'enroulant autour de deux orbites périodiques distinctes). On prend alors nettement conscience du fait que, pour que des régimes asymptotiques plus compliqués soient possibles, la trajectoire est nécessairement obligée de se recouper elle-même et donc est une orbite périodique. Cela vient du fait que toute courbe fermée du plan découpe ce dernier en 2 parties disjointes : l'intérieur et l'extérieur.

Rappelons enfin le critère suivant, dit de Bendixon, qui permet de montrer l'absence d'orbite périodique lorsque la divergence du champ de vecteurs est de signe constant.

Théorème 14 [critère de Bendixon] Soit le système $\frac{dx}{dt} = v(x)$ dans le plan \mathbb{R}^2 . Si, en tout point, la divergence de v ,

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2},$$

est soit > 0 soit < 0 , alors le flot de v n'admet pas d'orbite périodique.

Preuve Elle repose sur la formule classique qui relie le flux sortant à l'intégrale de la divergence :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_{\partial\Omega} w \cdot n \, ds$$

où Ω est un domaine du plan, $\partial\Omega$ son bord supposé régulier (n la normale extérieure, s l'abscisse curviligne), $w(x) = \begin{pmatrix} w_1(x_1, x_2) \\ w_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs C^1 du plan.

Il suffit de considérer une trajectoire fermée $\gamma = \partial\Omega$, son intérieur Ω et $w(x) = v(x)$, pour obtenir une contradiction. ■

1.4.2 Influence de la topologie de l'espace des phases

On reste en dimension 2, mais on suppose que l'espace des phases n'est plus le plan mais le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ (cf. figure 1.11, page 39). Localement, autour de chacun des points de T^2 , on peut identifier une petite portion (ouvert) de T^2 à une petite portion du plan, mais globalement c'est impossible. Cette impossibilité est de nature topologique. Nous allons voir qu'il est possible de construire sur le tore, simplement à partir de deux oscillateurs, un système dynamique avec des trajectoires partout denses. Il est alors clair que, dans ce cas, le régime asymptotique du système n'est ni un point ni un cycle limite, mais plutôt un balayage au cours du temps de tout l'espace des phases. Nous reviendrons sur ce point à la fin de cette section.

L'utilisation de T^2 comme espace des phases est parfaitement naturelle lorsque l'on considère le système formé de deux oscillateurs linéaires découplés de pulsations ω_1 et ω_2 ,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \omega_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\omega_1 x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = \omega_2 x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = -\omega_2 x_3, \end{cases} \quad (1.10)$$

compte tenu de l'existence des deux intégrales premières

$$h_1 = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{et} \quad h_2 = x_3^2 + x_4^2$$

qui définissent le tore T^2 (variété) plongé dans \mathbb{R}^4 (sous-variété) (pour plus de détails, sur les distinctions entre sous-variétés et variétés, il est fortement conseillé de lire le chapitre 5 de [2]). Il est alors intéressant de considérer (cf. figure 1.38, page 66) les coordonnées angulaires, $(\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1 = T^2$ et de poser

$$\begin{cases} x_1 = R_1 \cos \theta_1 \\ x_2 = R_1 \sin \theta_1 \\ x_3 = R_2 \cos \theta_2 \\ x_4 = R_2 \sin \theta_2. \end{cases}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, le système devient

$$\begin{cases} \frac{dR_1}{dt} = 0 \\ \frac{dR_2}{dt} = 0 \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2. \end{cases}$$

Ainsi, pour des valeurs initiales > 0 de R_1 et R_2 , les orbites du flot de (1.10) vérifient l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

sur le tore T^2 et sont des hélices tracées sur ce tore, cf. figure 1.38, page 66.

On a alors la proposition suivante (démonstration dans [2], page 215)

Proposition 6 *Si ω_1 et ω_2 sont rationnellement indépendants ($\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est un nombre irrationnel), alors les orbites du flot de (1.11) sont partout denses sur le tore. Si, au contraire, ω_1 et ω_2 sont rationnellement dépendants ($\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est un nombre rationnel), alors les orbites du flot de (1.11) sont fermées.*

Dans le cas où les fréquences sont rationnellement indépendantes, les trajectoires jouissent d'une propriété remarquable : elles sont uniformément réparties sur le tore. Cela veut dire la chose suivante. Si l'on considère une portion du tore, notée Σ , et une trajectoire de (1.11) $g(t) = (\theta_1^0 + \omega_1 t, \theta_2^0 + \omega_2 t)$, alors la fraction moyenne de temps que la trajectoire $g(t)$ passe dans Σ est proportionnelle à l'aire de Σ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{T_\Sigma(t)}{t} = \frac{1}{A} \int \int_\Sigma d\sigma$$

où $T_\Sigma(t)$ est le temps total que la trajectoire g passe dans Σ entre les instants 0 et t , $d\sigma$ est l'élément d'aire sur le tore et A l'aire totale du tore. On est ainsi conduit à décrire le comportement, sur de longs intervalles de temps, d'un tel système par des moyennes et des outils probabilistes.

1.5 Conclusion

1.5.1 Théorie ergodique des systèmes dynamiques

L'exemple du système à deux fréquences incommensurables sur le tore, montre que, même dans des cas simples, les trajectoires d'un système dynamique déterministe peuvent avoir des comportements asymptotiques très différents de la convergence vers un point ou une orbite périodique, et relèvent alors d'une description probabiliste.

La théorie ergodique constitue le cadre naturel pour décrire de façon générale le comportement asymptotique d'un système dynamique [6, 12]. Cette description s'appuie sur les deux notions suivantes :

- la notion d'attracteur (sous-ensemble non nécessairement régulier de l'espace des phases, de dimension non nécessairement entière⁶) vers lequel convergent toutes les trajectoires et sur lequel les trajectoires sont partout denses ;
- la notion de mesure asymptotique (mesure de Kolmogorov), dont le support est l'attracteur, qui permet de calculer la fraction moyenne du temps passé dans une zone de l'attracteur par le système (les zones visitées plus fréquemment que d'autres par les trajectoires sont alors de mesure plus grande) ; une telle mesure permet de remplacer les moyennes temporelles par des moyennes spatiales dans l'espace des phases (ce passage de moyennes temporelles à des moyennes spatiales est souvent postulé a priori et appelé hypothèse ergodique ou ergodicité) ;

Si l'attracteur est réduit à un point, la mesure asymptotique n'est autre que la mesure de Dirac en ce point. Si l'attracteur est une orbite périodique γ , la mesure asymptotique est caractérisée par la densité linéique $m(s)$,

$$m(s) = \frac{1}{T\|v(x(s))\|}$$

où s est l'abscisse curviligne sur γ et T la période de γ . En effet, le temps de séjour sur une portion de longueur ds en un point $x(s)$ appartenant à γ est inversement proportionnelle à la longueur du vecteur vitesse $v(x(s))$.

1.5.2 Stabilité structurelle

Dans ce chapitre d'introduction, nous n'avons pas abordé une question centrale : la stabilité structurelle. Un système dynamique est dit structurellement stable si et seule-

⁶Voir le chapitre 4.

ment si les portraits de phases de tous les systèmes “voisins” sont topologiquement équivalents. Deux systèmes sont dits topologiquement équivalents si et seulement s’il existe un homéomorphisme entre les espaces des phases qui transforment les orbites de l’un en les orbites de l’autre, en préservant le sens des flèches sur les orbites⁷

Par exemple, si un système structurellement stable admet un seul point d’équilibre asymptotiquement stable \bar{x} hyperbolique, alors, tout système “voisin” admet aussi un seul point d’équilibre, proche de \bar{x} , asymptotiquement stable et hyperbolique.

Il convient bien sûr de définir ce qu’est un système “voisin” : le plus simple consiste à perturber le champ de vitesse $v(x)$ par addition d’un champ $\delta v(x)$ petit en norme (la norme peut aussi porter sur les dérivées en espace, $D(\delta v), \dots$) et à considérer alors le système dynamique $v(x) + \delta v(x)$ comme système voisin.

Il est clair que cette question possède des motivations physiques importantes. En effet, toute modélisation est une approximation. Il est donc normal de s’intéresser aux systèmes voisins du système dynamique de modélisation. En particulier, il apparait important de savoir si les comportements asymptotiques contenus dans le système issu de la modélisation sont persistants et stables (Arnol’d [2] dit “opiniâtre”) aux petites perturbations des équations, i.e. du champ des vitesses. D’où le nom de stabilité structurelle (à ne pas confondre avec la stabilité asymptotique) donné à ces questions.

Par exemple, un système $\frac{dx}{dt} = v(x)$ qui admet un point stationnaire \bar{x} dont l’un des exposants caractéristiques est à partie réelle nulle, n’est pas structurellement stable par rapport aux systèmes voisins. En effet, de petites perturbations δv du champ des vitesses v induisent sur la matrice $Dv(\bar{x})$, ainsi que sur ses valeurs propres (les exposants caractéristiques), des perturbations dans toutes les directions. Or, nous avons vu que le nombre d’exposants caractéristiques à partie réelle positive (resp. négatives) est un invariant topologique. Donc, nécessairement, un tel système ne peut pas être structurellement stable pour des perturbations aussi générales. En revanche, il peut très bien le rester pour des perturbations plus spécifiques, i.e. une topologie plus fine qui restreint la classe des systèmes voisins possibles.

La mise en forme des idées évoquées ci-dessus nécessite l’utilisation de notions mathématiques assez élaborées qui débordent largement le cadre de cet exposé d’introduction. Un lecteur intéressé pourra consulter d’abord [1], et pour en savoir encore plus [4, 15, ?].

1.6 Figures

⁷Il n’est pas possible de conserver la paramétrisation en temps car alors les périodes des orbites périodiques de deux systèmes topologiquement équivalents seraient rigoureusement égales. Ce qui est beaucoup trop contraignant.

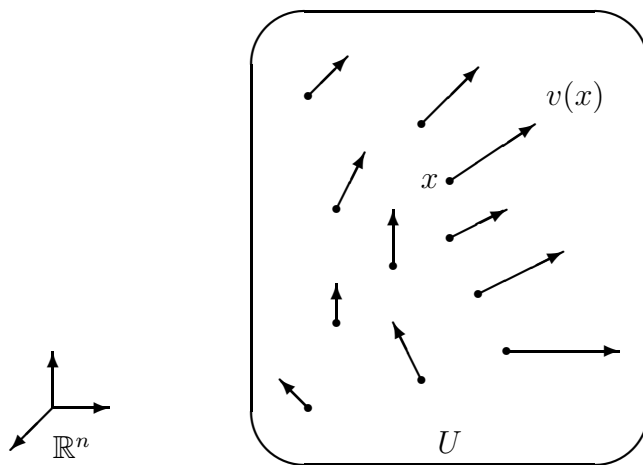


FIG. 1.1 –
champ de vecteurs vitesse $v(x)$ sur un domaine U contenu dans \mathbb{R}^n .

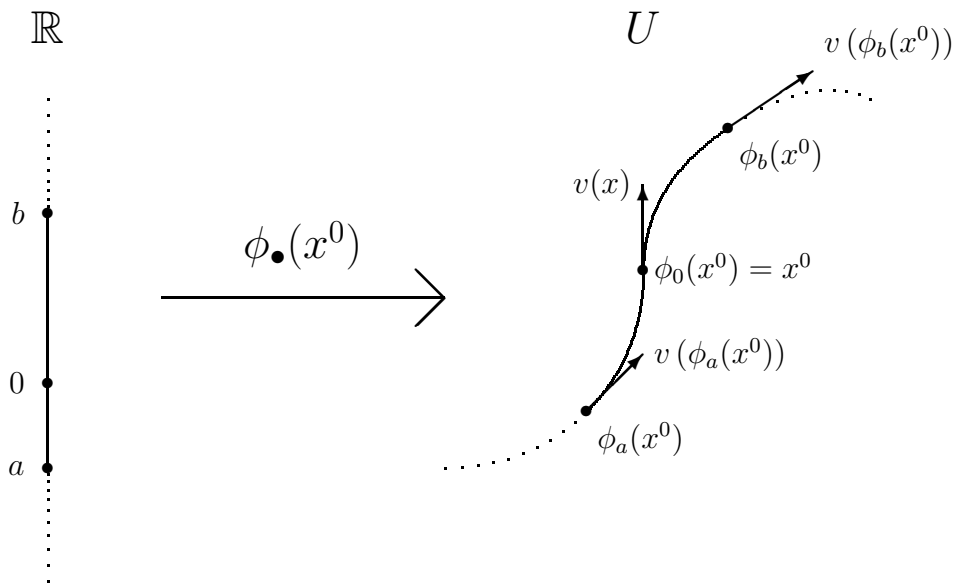


FIG. 1.2 –
 solution dans U , $\phi_t(x^0)$, de $\frac{dx}{dt} = v(x)$ sur $[a, b]$ passant par x^0 à $t = 0$.

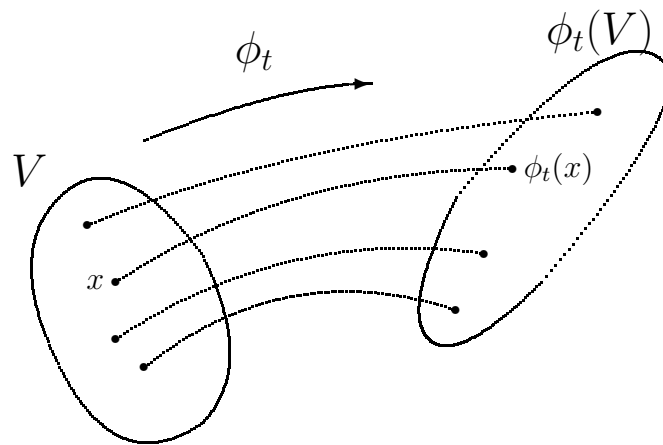


FIG. 1.3 –
transport d'un ensemble V par le flot ϕ_t

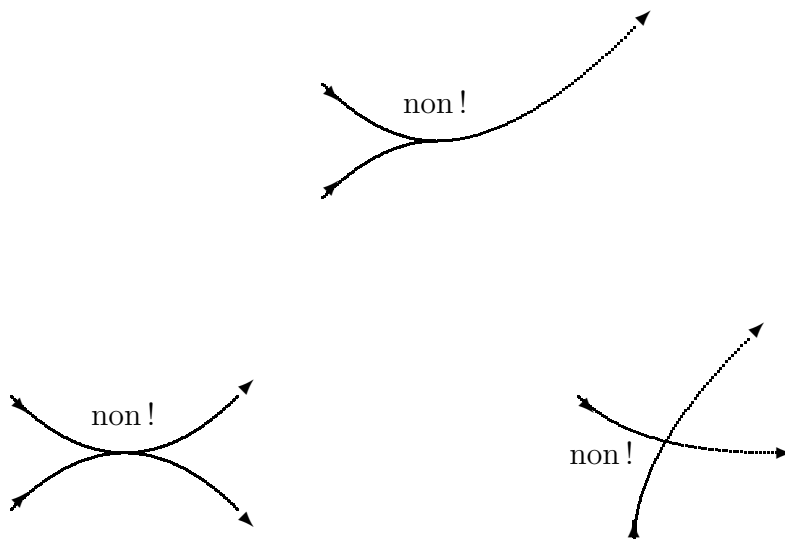


FIG. 1.4 –

les jonction, tangence et intersection entre deux trajectoires différentes sont impossibles.

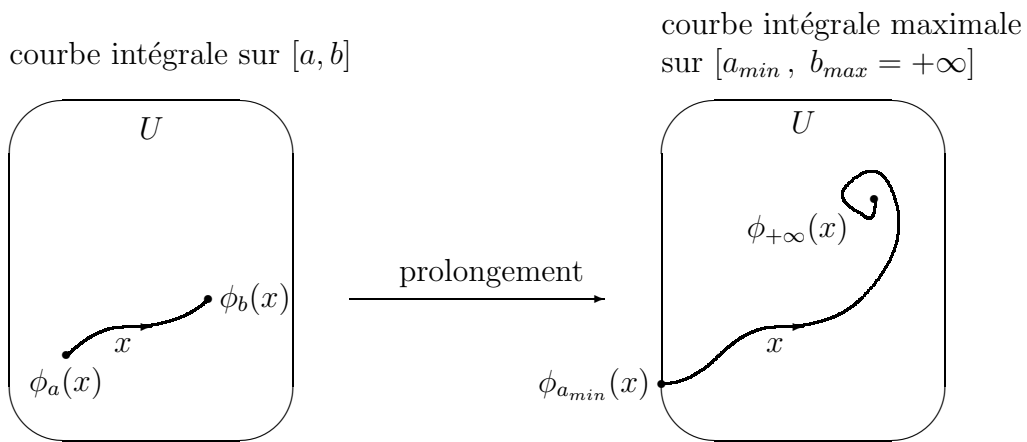


FIG. 1.5 –

prolongement maximum dans le passé ($-\infty \leq a_{min} \leq a < 0$) et dans le futur ($0 < b \leq b_{max} \leq +\infty$) d'une courbe intégrale définie sur $[a, b]$ et passant par x à $t = 0$.

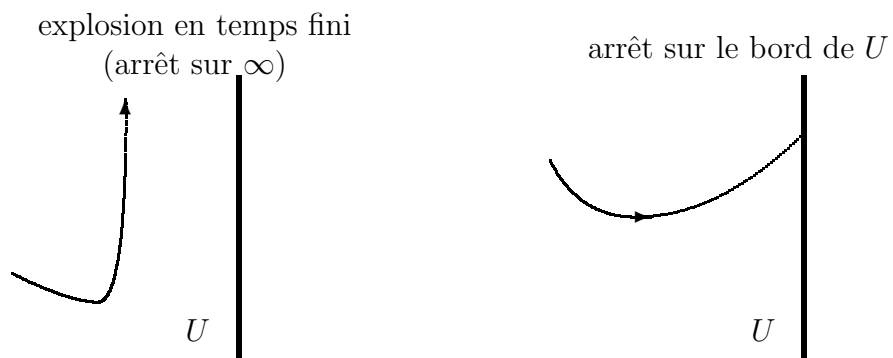
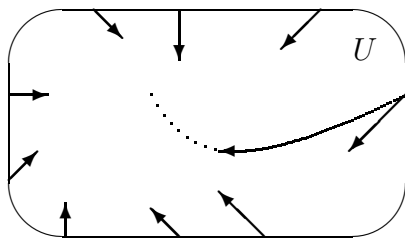
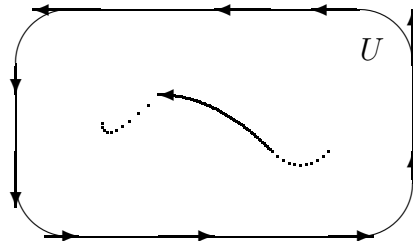


FIG. 1.6 –
les deux cas d'arrêt en temps fini d'une trajectoire.



trajectoire sur $[0, +\infty[$



trajectoire sur $] - \infty, +\infty[$

FIG. 1.7 –
courbes intégrales sur des intervalles de temps infinis.

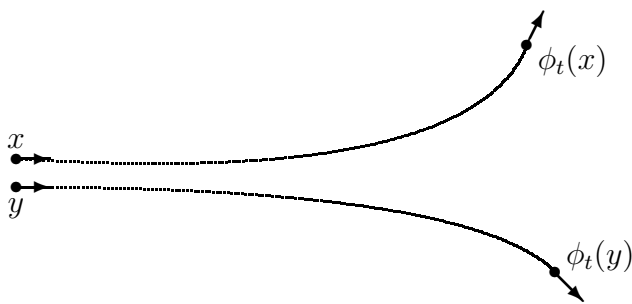


FIG. 1.8 –
sensibilité aux conditions initiales du flot $\{\phi_t\}$.

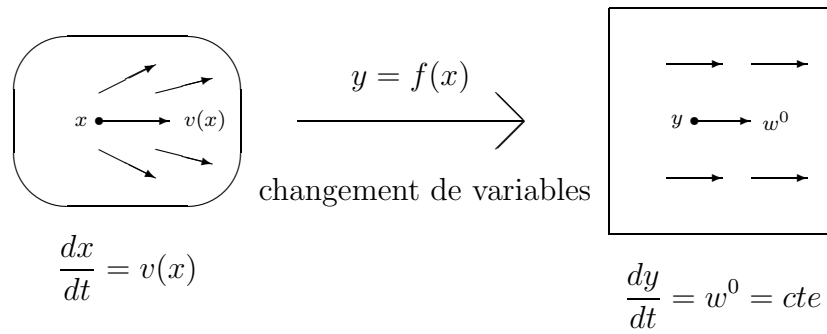


FIG. 1.9 –
structure locale du flot là où le champ des vitesses est non nul.

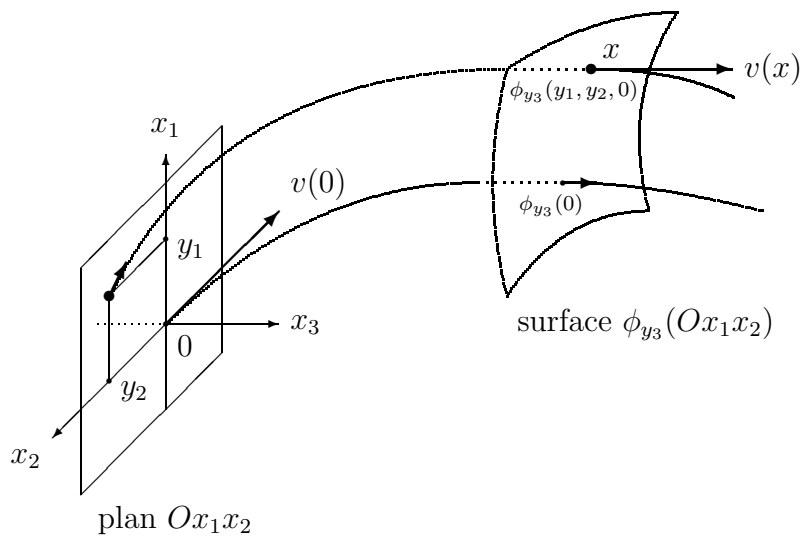


FIG. 1.10 –

preuve du théorème de redressement dans \mathbb{R}^3 ; le changement de coordonnées, $x \rightarrow y$, défini par $x = (x_1, x_2, x_3) = \phi_{y^3}(y_1, y_2, 0)$, transforme le champ v en un champ constant.

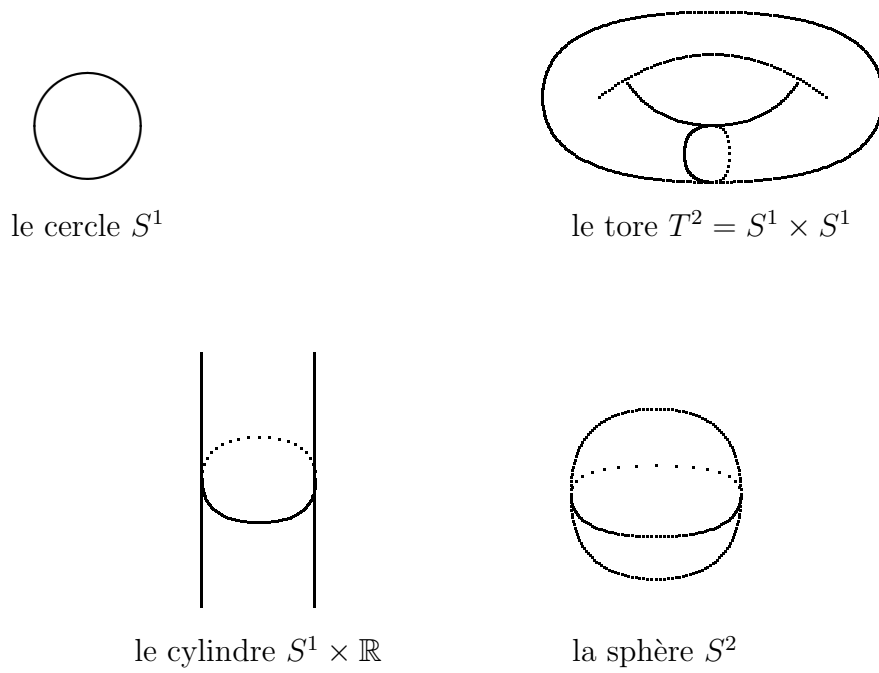


FIG. 1.11 –
espaces des phases les plus courants qui ne sont pas des ouverts sans trous
(i.e. simplement connexes) de la droite \mathbb{R} ou du plan \mathbb{R}^2 .

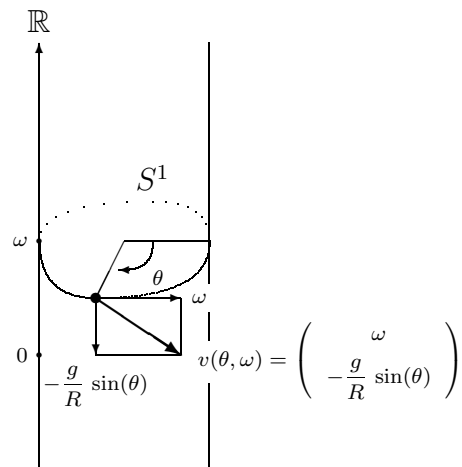


FIG. 1.12 –
 l'espace des phases du pendule est le cylindre, $(\theta, \dot{\theta} = \omega) \in S^1 \times \mathbb{R}$, et le vecteur vitesse $v(\theta, \omega)$ est tangent au cylindre.

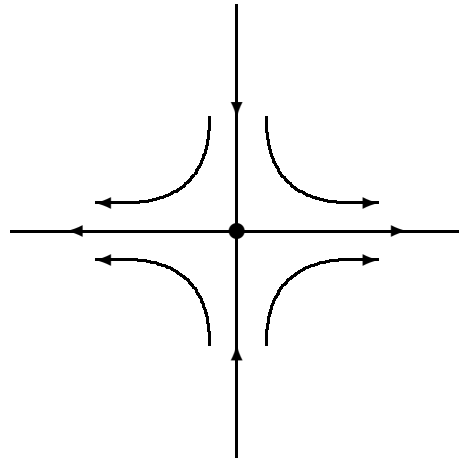


FIG. 1.13 –
exemple de point d'équilibre, le col.

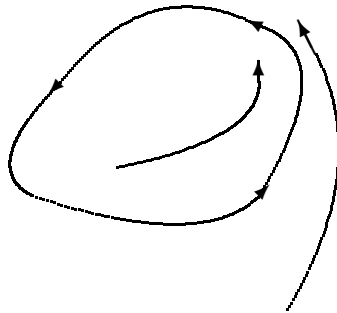


FIG. 1.14 –

le cycle limite attracteur.

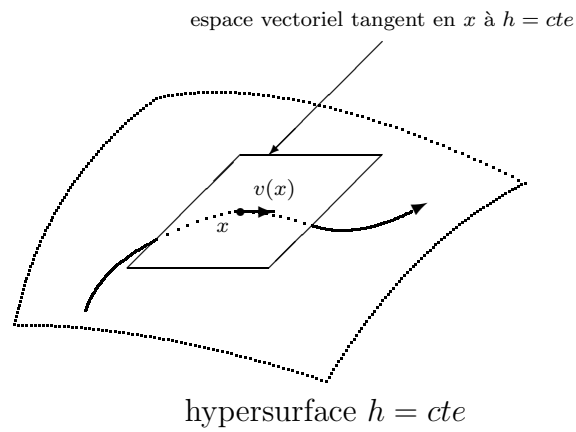


FIG. 1.15 –
 h est une intégrale première de $\frac{dx}{dt} = v(x)$ lorsque le vecteur $v(x)$ est tangent aux hypersurfaces de niveau $h = cte$.

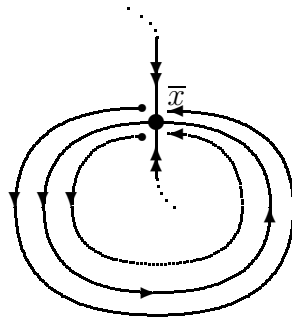


FIG. 1.16 –
exemple de point d'équilibre \bar{x} , instable au sens de Liapounov, mais dont toutes les trajectoires, initialement proches de \bar{x} , convergent vers \bar{x} lorsque $t \rightarrow +\infty$.

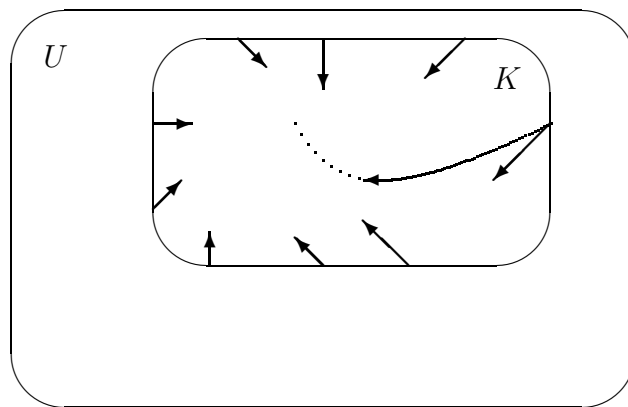


FIG. 1.17 –
exemple d'ensemble invariant K pour les temps positifs.

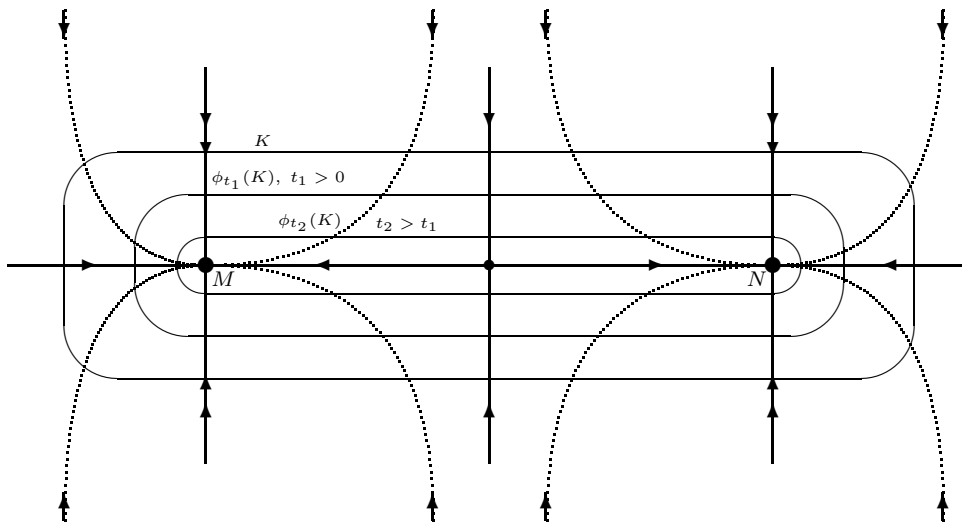


FIG. 1.18 –

le segment MN est égal à $\bigcap_{t>0} \phi_t(K)$ ($\{\phi_t\}$ est le flot) alors que presque toutes les trajectoires convergent soit vers le point M , soit vers le point N .

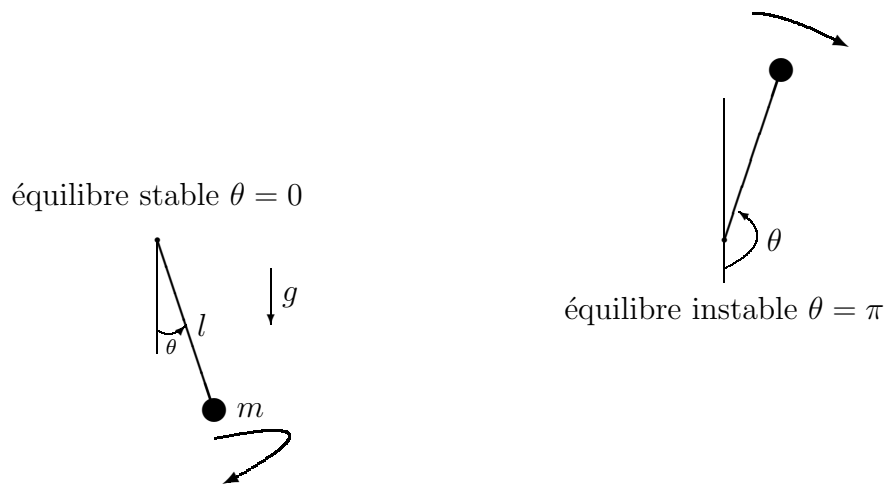


FIG. 1.19 –
les deux positions d'équilibre du pendule.

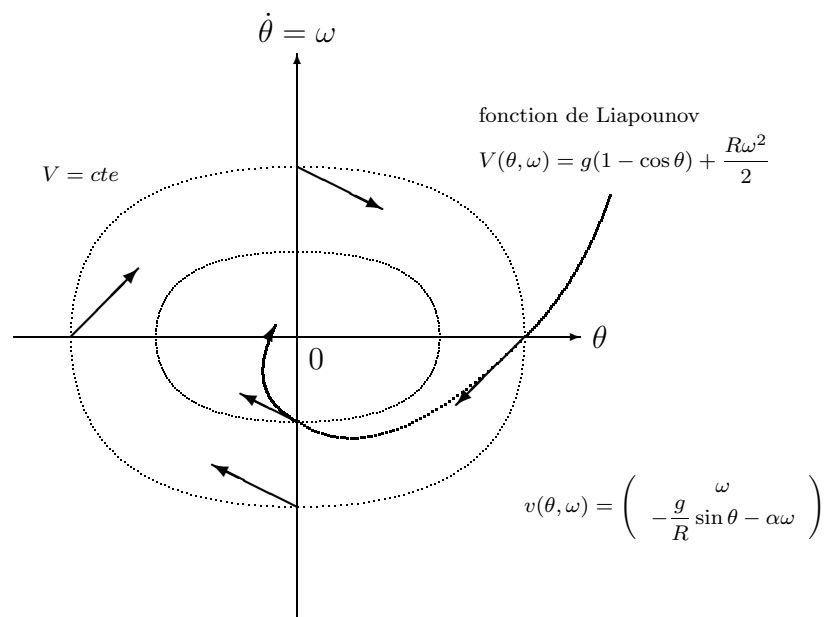


FIG. 1.20 –
 stabilité asymptotique de l'équilibre du bas ($\theta = 0$, $\omega = 0$) du pendule en présence de frottement (portrait de phases local).

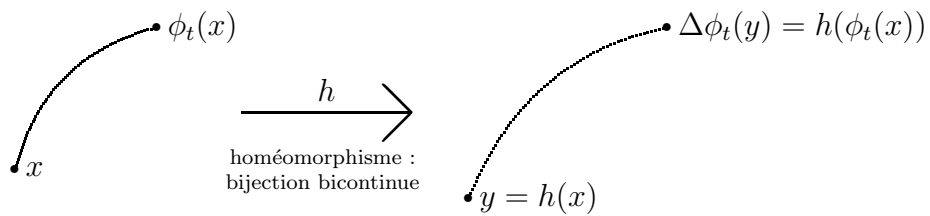


FIG. 1.21 –

équivalence topologique (avec, en plus, conservation du paramétrage en temps), autour d'un point d'équilibre hyperbolique \bar{x} , entre le système non linéaire $\frac{dx}{dt} = v(x)$ (flot $\{\phi_t\}$) et son linéarisé tangent $\frac{d\Delta x}{dt} = Dv(\bar{x}) \Delta x$ (flot $\{\Delta\phi_t\}$).

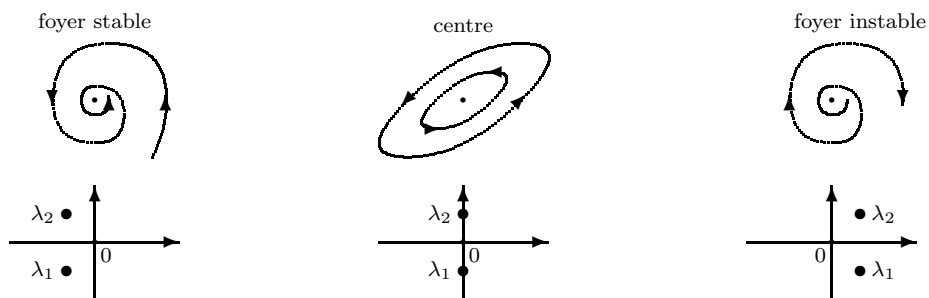


FIG. 1.22 –
portraits de phases plans et linéaires lorsque les deux exposants caractéristiques, λ_1 et λ_2 , ont une partie imaginaire non nulle.

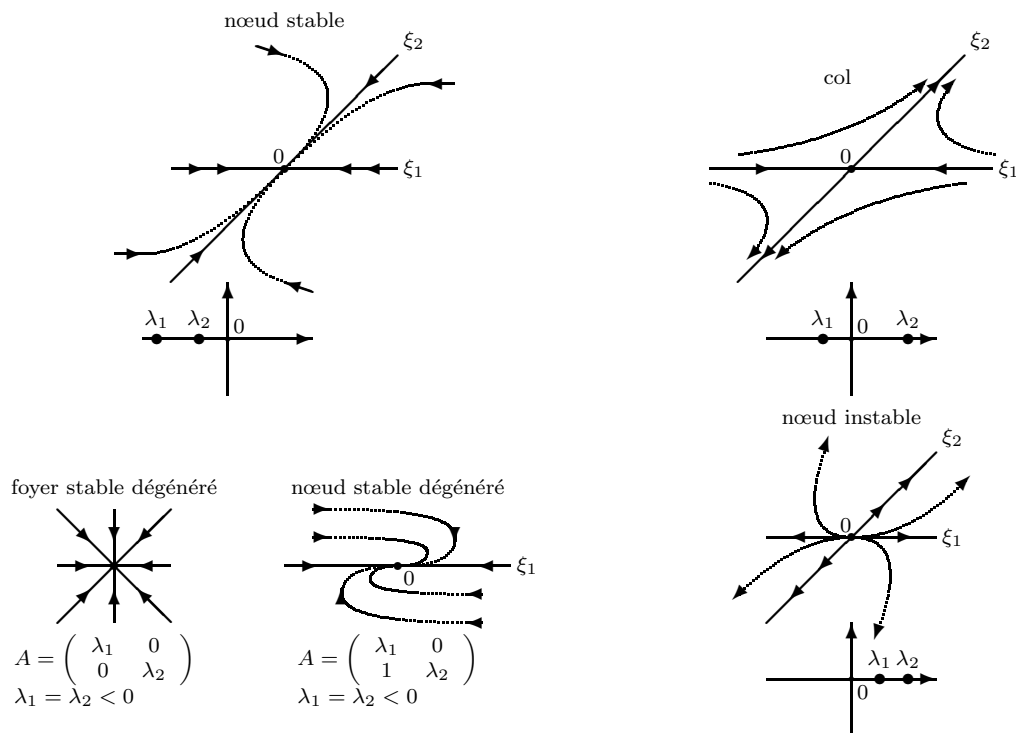


FIG. 1.23 –

portraits de phases plans et linéaires, $\dot{x} = Ax$, lorsque les exposants caractéristiques, λ_1 et λ_2 , sont réels (ξ_1 et ξ_2 vecteurs propres de A , lorsqu'ils existent).

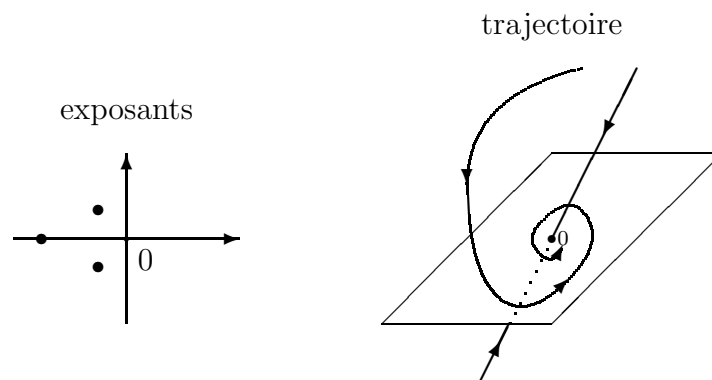


FIG. 1.24 –
exemple de portrait de phases d'un système linéaire de dimension 3 en fonction
de ses exposants caractéristiques.

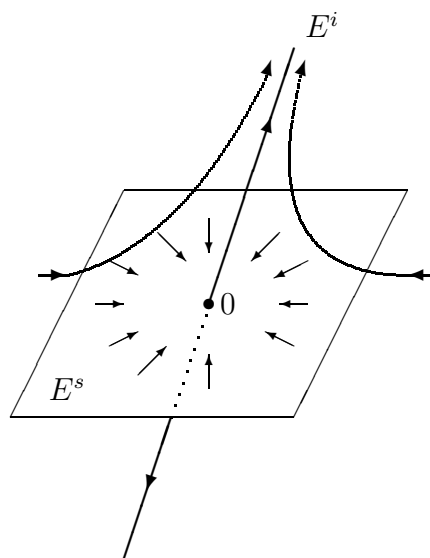


FIG. 1.25 –
 portrait de phases d'un système linéaire hyperbolique, $\frac{dx}{dt} = Ax$, de dimension 3
 à partir des espaces vectoriels rentrant E^s et sortant E^i .

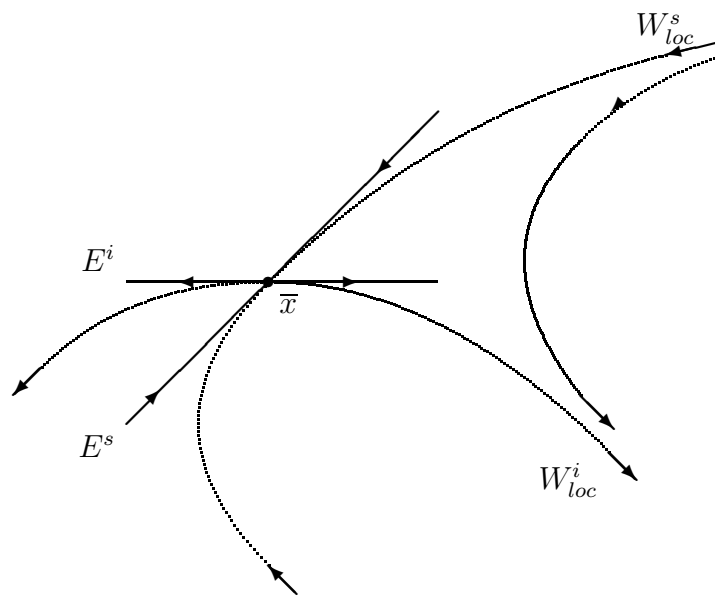


FIG. 1.26 –

portrait de phases, autour d'un point d'équilibre hyperbolique \bar{x} , du système $\frac{dx}{dt} = v(x)$ à partir de la décomposition en sous-variétés stable W_{loc}^s et instable W_{loc}^i .

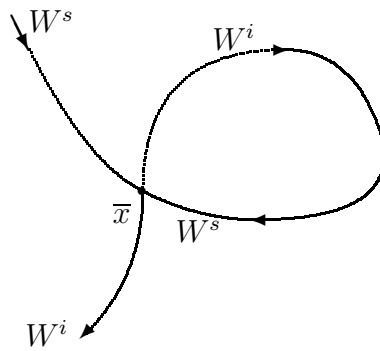


FIG. 1.27 –
orbite homocline dans le plan

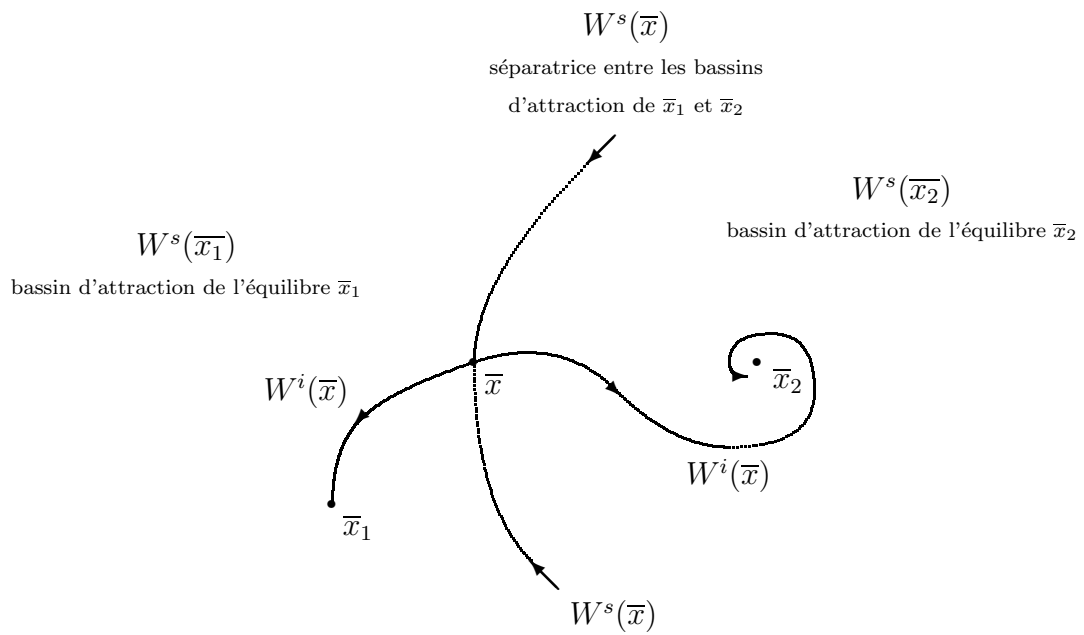


FIG. 1.28 –
importance des espaces prolongés W^s et W^i pour la construction du portrait de phases global.

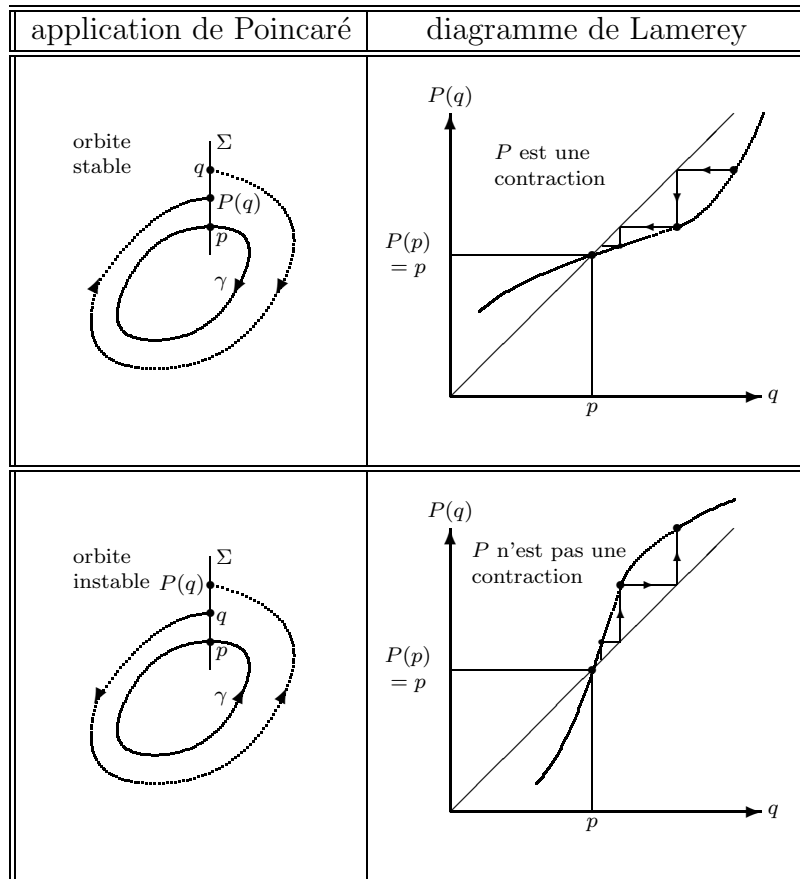


FIG. 1.29 –
orbite périodique γ dans le plan, applications de Poincaré P et diagrammes de Lamerey correspondants.

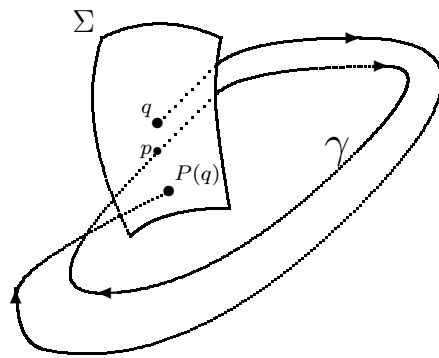


FIG. 1.30 –
section Σ et application de premier retour P de Poincaré pour l'orbite
périodique γ .

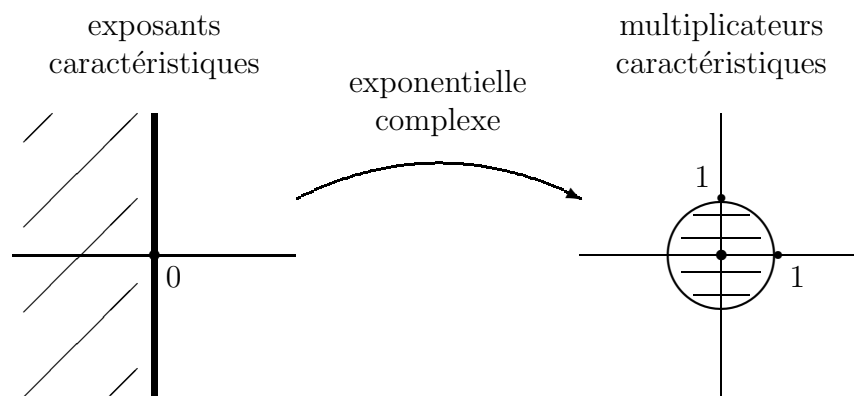


FIG. 1.31 –
la fonction exponentielle envoie le demi-plan des complexes à partie réelle négative dans l'intérieur du cercle unité.

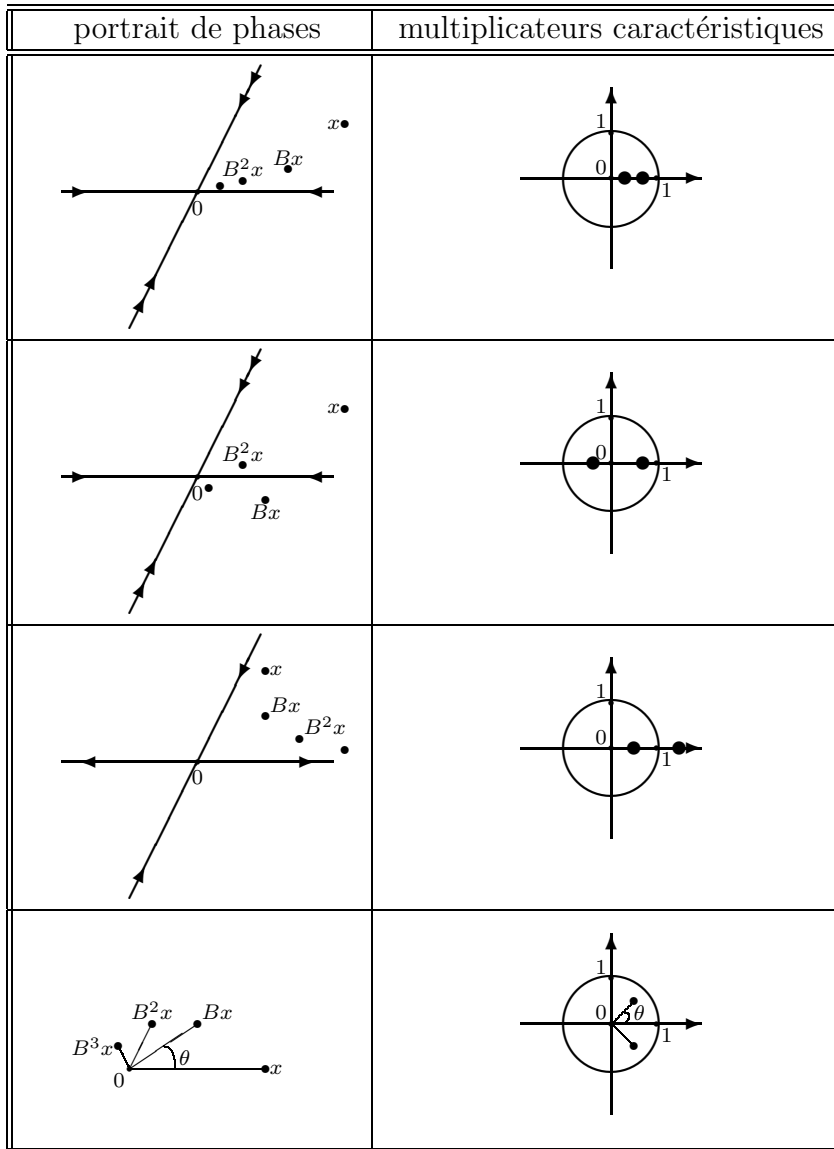


FIG. 1.32 –
portraits de phases de systèmes linéaires plan, $x_{k+1} = Bx_k$, en fonction de leurs multiplicateurs caractéristiques

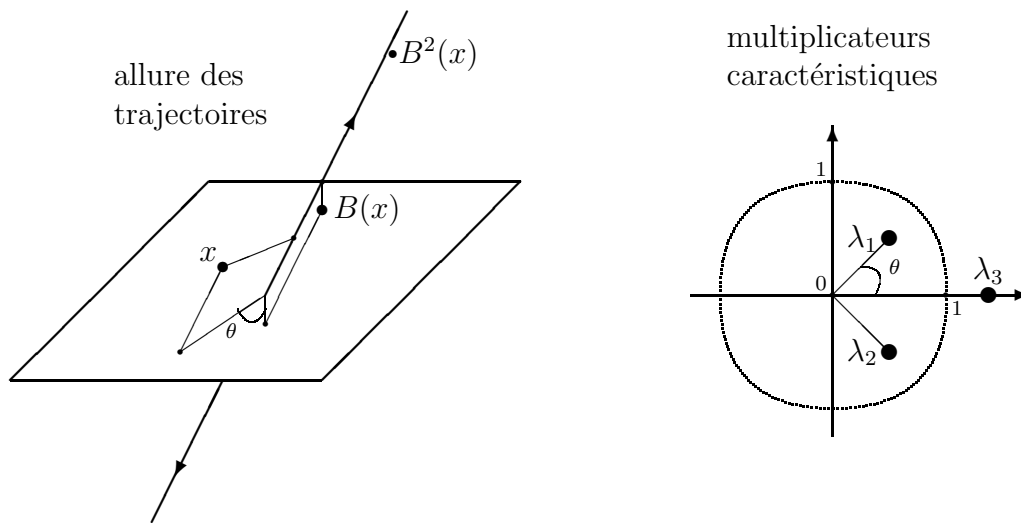


FIG. 1.33 –
 exemple de système linéaire discret, $x_{k+1} = Bx_k$, de dimension 3 hyperbolique.

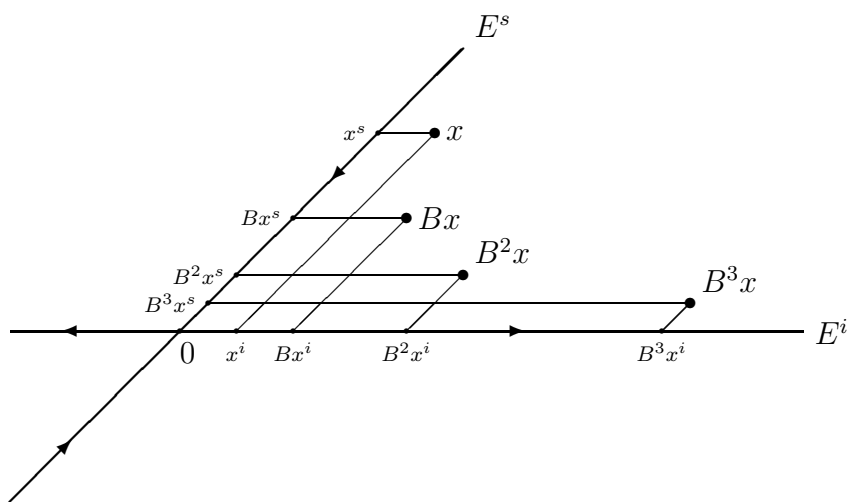


FIG. 1.34 –

portrait de phases d'un système linéaire discret hyperbolique, $x_{n+1} = Bx_n$, à partir de sa décomposition en espaces vectoriels stable E^s et instable E^i .

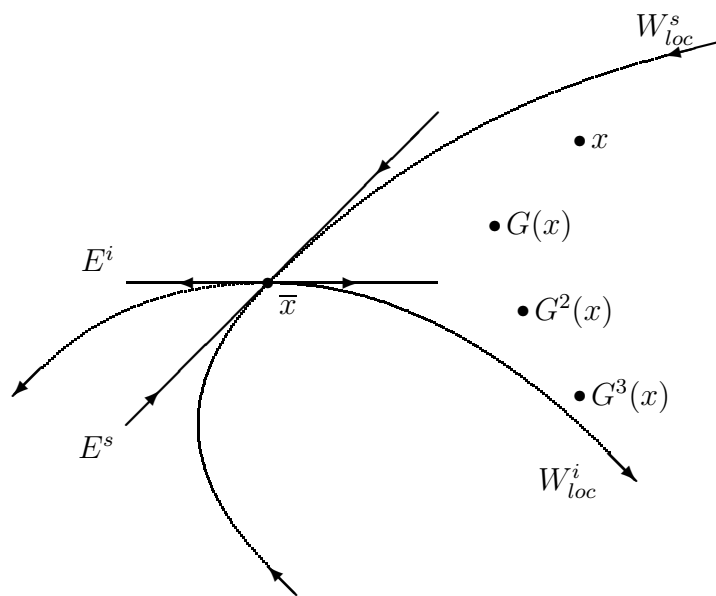


FIG. 1.35 –

portrait de phases, autour d'un point fixe hyperbolique \bar{x} , du système discret $x_{n+1} = G(x_n)$ à partir de la décomposition en sous-variétés stable W_{loc}^s et instable W_{loc}^i .

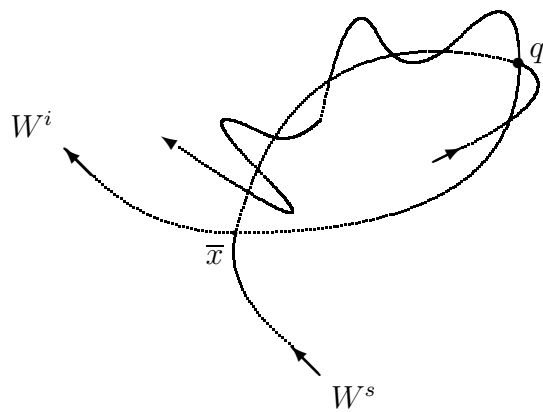


FIG. 1.36 –

enchevêtrement des variétés stable W^s et instable W^i lorsqu'elles se coupent en q , loin du point fixe \bar{x} de $x_{n+1} = G(x_n)$; les itérés de q , $\{G^k(q) : k \geq 0\}$, sont alors nécessairement contenus dans $W^s \cap W^i$ et convergent vers \bar{x} .

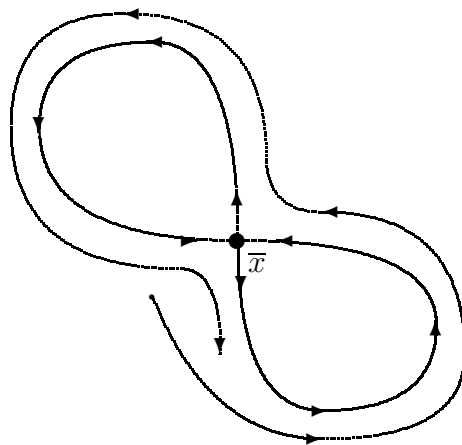


FIG. 1.37 –

exemple où les trajectoires, d'un système continu dans le plan, s'enroulent autour d'une courbe fermée, composée d'un point d'équilibre \bar{x} et de deux orbites homoclines, qui n'est pas une orbite périodique.

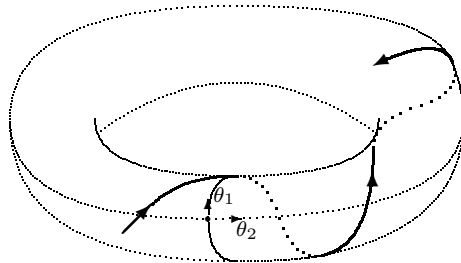


FIG. 1.38 –
les trajectoires de $\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1$, $\theta_1 \in S^1$ et $\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2$, $\theta_2 \in S^1$ sont des hélices tracées sur un tore paramétré par les deux angles, latitude et longitude, θ_1 et θ_2 .

Chapitre 2

Bifurcations locales

On s'intéresse ici aux changements qualitatifs du portrait de phases d'un système dynamique dépendant de paramètres. De tels changements sont appelés bifurcations. Pour les systèmes continus dérivant d'un potentiel¹, le mathématicien René Thom emploie, au lieu de bifurcation, le terme catastrophe, terme qui a connu une fortune médiatique importante.

Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés. Nous nous intéressons ici aux bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre d'un système continu ou à un point fixe d'un système discret. L'étude de ce type de bifurcations repose sur deux méthodes importantes, présentées dans ce chapitre et qui se ramènent à l'utilisation de bonnes coordonnées :

1. la méthode de la sous-variété centrale qui permet d'isoler la partie non hyperbolique, dite centrale, du système ;
2. la méthode des formes normales de Poincaré où ne subsistent que les vraies non linéarités, i.e. celles que l'on ne peut pas faire disparaître par changement régulier de coordonnées.

Toutes les figures sont regroupées dans une section spéciale en fin de ce chapitre.

2.1 Introduction

La théorie des bifurcations s'intéresse aux familles d'équations différentielles dépendant de paramètres μ :

$$\frac{dx}{dt} = v_\mu(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^k \text{ constant.} \quad (2.1)$$

¹On dit qu'un système dérive d'un potentiel lorsqu'il s'écrit sous la forme $\frac{dx}{dt} = -\text{grad } V(x)$ où $V(x)$ est une fonction scalaire, le potentiel.

Le terme bifurcation a été introduit pour la première fois par H. Poincaré pour décrire l'apparition ou la disparition, pour certaines valeurs du paramètres μ , de points d'équilibre du système (2.1).

Prenons l'exemple du système mono-dimensionnel suivant,

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3, \quad (2.2)$$

dépendant du paramètre scalaire μ . Pour $\mu < 0$, (2.2) possède un seul point d'équilibre $x = 0$, asymptotiquement stable et d'exposant caractéristique μ . Pour $\mu > 0$, c'est un peu plus compliqué. (2.2) possède alors 3 points d'équilibre, $x = -\sqrt{\mu}$, $x = 0$ et $x = \sqrt{\mu}$, d'exposants caractéristiques $-\sqrt{\mu}$, μ et $-\sqrt{\mu}$, respectivement. La figure 2.1, page 94, dite diagramme de bifurcation, résume la situation dans l'espace, produit cartésien entre l'espace des phases, ici \mathbb{R} , et l'espace des paramètres, ici \mathbb{R} . Lorsque $\mu \rightarrow 0^+$, les 3 points d'équilibre ont tendance à se confondre en un seul et les 3 branches d'équilibre se rejoignent. Ce diagramme de bifurcation correspond à ce que l'on appelle une "bifurcation fourche" pour des raisons évidentes. La valeur $\mu = 0$ est appelée valeur de bifurcation du paramètre μ . Le point $(x = 0, \mu = 0)$ est appelé point de bifurcation du système.

Lorsque μ passe de 0^- à 0^+ le point d'équilibre $x = 0$, perd sa stabilité au profit des deux nouveaux points d'équilibre $x = \pm \sqrt{\mu}$ apparaissant pour $\mu > 0$. La bifurcation en $\mu = 0$ correspond à un changement qualitatif dans le portrait de phases du système. Par petites perturbations du type $\pm \varepsilon x$ du système en $\mu = 0$, on peut faire apparaître ou faire disparaître deux points d'équilibre. Ainsi, en $\mu = 0$ le système n'est pas structurellement stable car de petites perturbations du champ de vitesse peuvent modifier la structure topologique du portrait de phases (cf. la conclusion du chapitre 1). C'est ce qui motive la définition générale suivante d'une bifurcation. ([7], chapitre 3).

Définition 16 [valeur de bifurcation] Une valeur μ_0 du paramètre pour laquelle le système (2.1) n'est pas structurellement stable est appelée valeur de bifurcation de μ .

Il est clair que cette définition est tout à fait générale et ne concerne pas seulement les points d'équilibre d'un système, leur apparition, disparition ou perte de stabilité. Cependant, nous ne considérons ici que ce qui se passe autour d'un point d'équilibre. C'est dans cette optique qu'il convient de comprendre l'intitulé, "bifurcations locales", de ce chapitre.

Sur l'exemple élémentaire précédent, la construction du portrait de phases en $\mu = 0$ ne pose aucune difficulté. En général, une telle étude est loin d'être aussi triviale. En effet, à la valeur de bifurcation μ_0 d'un point d'équilibre, ce dernier n'est plus hyperbolique et le théorème 7 de Grobmann-Hartman donnant la structure topologique du portrait de phases ne s'applique plus : certains exposants caractéristiques sont alors sur l'axe imaginaire et les espaces rentrant et sortant (cf. théorème 9) ne sont plus suffisants pour donner l'allure des trajectoires autour du point d'équilibre. L'objet principal de ce chapitre est de voir comment on peut combler partiellement cette lacune.

2.2 Sous-variété centrale et formes normales

Cette section est consacrée aux méthodes qui permettent d'étudier le portrait de phases autour d'un point d'équilibre, ou d'un point fixe, non hyperbolique. Considérons le système continu $\frac{dx}{dt} = v(x)$ et supposons qu'il admet un point d'équilibre non hyperbolique \bar{x} . Voyons d'abord ce que l'on peut dire sur le linéarisé tangent en \bar{x} et plus généralement sur tout système linéaire non hyperbolique.

Tout système linéaire continu, $\frac{dx}{dt} = Ax$ est décomposable (changement de base sur x lié à la décomposition par blocs de Jordan) de la façon suivante² :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c \\ \frac{dx^h}{dt} = A^h x^h \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $x = (x^c, x^h)$, $A = \begin{pmatrix} A^c & 0 \\ 0 & A^h \end{pmatrix}$ et où A^h correspond aux valeurs propres à partie réelle non nulle (la partie hyperbolique de A) et A^c aux valeurs propres sur l'axe imaginaire (la partie centrale de A). Les ensembles (espaces vectoriels) définis par $x^c = 0$ (resp. $x^h = 0$) sont invariants par le flot de (2.3). L'ensemble $x^c = 0$ n'est autre que la somme directe des espaces vectoriels rentrant et sortant, $E^s \oplus E^i$ (cf. chapitre 1). Sur l'ensemble $x^c = 0$, la dynamique est topologiquement simple : il y a contraction selon E^s et dilatation selon E^i (cf. figure 1.25, page 53). En revanche sur l'ensemble $x^h = 0$, l'espace vectoriel que l'on appelle espace centre, la dynamique peut être topologiquement beaucoup plus complexe et les questions de stabilité doivent être étudiées au cas par cas. Si toutes les valeurs propres de A^h sont à partie réelle négative, alors la stabilité de (2.3) est entièrement conditionnée par celle du sous système central $\frac{dx^c}{dt} = A^c x^c$.

Une telle séparation entre la partie hyperbolique et la partie centrale du linéarisé tangent se prolonge également au non linéaire, de la même façon que les espaces vectoriels stable et instable, E^s et E^i , s'étendent en sous-variétés invariantes stable et instable, W_{loc}^s et W_{loc}^i (cf. théorème 9, page 17, et figure 1.26, page 54). Comme pour le linéaire, si la partie hyperbolique est stable asymptotiquement, la stabilité autour de \bar{x} peut être directement analysée à partir de la dynamique sur une sous-variété (non nécessairement unique comme non le verrons plus loin), appelée sous-variété centrale, dont l'espace tangent en \bar{x} est égal à E^c .

En linéaire, tous les calculs, changement de base et matrices A^c et A^h , sont explicites et reposent sur la décomposition d'une matrice en sa forme de Jordan. En non linéaire, les calculs sont nécessairement approchés et donnent, de manière itérative, les termes des développements limités autour de \bar{x} des équations de la sous-variété centrale et de

²C'est aussi vrai en discret.

la dynamique sur cette sous-variété. En pratique, on arrête les calculs à l'ordre à partir duquel le portrait de phases n'est plus modifié de manière qualitative par les termes d'ordre supérieur. En fait, l'idée maîtresse de cette démarche se résume à faire des changements de coordonnées adaptées, de façon à éliminer la partie hyperbolique dont on connaît bien la structure topologique, et afin de se ramener à un système de taille réduite sur la sous-variété centrale. Tout revient donc à utiliser les "bonnes" coordonnées, encore faut-il les construire. C'est précisément l'objet des deux sous-sections suivantes.

2.2.1 Sous-variété centrale

Nous énonçons d'abord les résultats généraux, dont les démonstrations se trouvent, pour l'essentiel, dans [5]. Puis nous traitons un exemple simple.

Système continu

Le théorème de décomposition en sous-variétés stable et instable autour d'un point d'équilibre hyperbolique (théorème 9, page 17), ainsi que le théorème de Grobman-Hartman se généralise comme suit aux points d'équilibre non hyperboliques (cf. figure 2.2, page 95).

Théorème 15 [Sous-variété centrale pour les systèmes continus] *Soient un champ de vecteurs v sur un ouvert U de \mathbb{R}^n , r fois continûment dérivable s'annulant en $\bar{x} \in U$, et V un petit voisinage de \bar{x} dans U . Notons ϕ_t le flot dont v est le générateur infinitésimal. Considérons E^s , E^c et E^i , les espaces propres généralisés correspondants aux valeurs propres de $Dv(\bar{x})$ à partie réelle strictement négative, nulles et strictement positive, respectivement : E^s , E^c et E^i sont des espaces vectoriels stables par $Dv(\bar{x})$ et $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^i$.*

Alors, les sous-espaces rentrant,

$$W_{loc}^s = \left\{ x \in v \quad : \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \geq 0 \phi_t(x) \in V \right\}$$

et sortant,

$$W_{loc}^i = \left\{ x \in U \quad : \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \leq 0 \phi_t(x) \in V \right\}$$

possèdent des structures de sous-variétés différentiables de classe C^r autour de \bar{x} et admettent pour espaces vectoriels tangents en \bar{x} , E^s et E^i , respectivement. Il existe aussi une sous-variété différentiable de classe C^{r-1} , W_{loc}^c , (non nécessairement unique contrairement à W_{loc}^s et W_{loc}^i), invariante par le flot, et dont l'espace tangent en \bar{x} est égal à E^c . W_{loc}^c est appelée sous-variété centrale. Elle est définie localement autour de \bar{x} .

Soient x^c des coordonnées locales sur W_{loc}^c et $v^c(x^c)$ le champ de vecteurs induit par v sur W_{loc}^c (cela a un sens car v est tangent à W_{loc}^c). Alors $\frac{dx}{dt} = v(x)$ est, autour de \bar{x} ,

topologiquement³ équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = v^c(x^c) \\ \frac{dx^s}{dt} = -x^s \\ \frac{dx^i}{dt} = x^i \end{cases}$$

où les dimensions de x^s et x^i sont égales à celles de E^s et E^i .

L'intérêt de cette décomposition en trois sous-variétés invariantes est alors clair. D'une part, elle permet, au moins topologiquement, i. e. par un changement de variables continu (et pas nécessairement dérivable), de se ramener à des équations découplées, d'éliminer ainsi la partie hyperbolique du flot dont le comportement local autour de \bar{x} est sans ambiguïté, et de focaliser l'étude sur la dynamique centrale et le champ de vecteurs v^c .

En particulier, le théorème précédent implique que, si $Dv(\bar{x})$ n'a pas de valeurs propres à partie réelle strictement positive, la stabilité de \bar{x} est alors conditionnée par celle la dynamique sur la sous-variété centrale, plus précisément :

- si $\frac{dx^c}{dt} = v^c(x^c)$, est stable (resp. asymptotiquement stable) au sens de Liapounov en \bar{x} , alors le système complet $\frac{dx}{dt} = v(x)$ est aussi stable (resp. asymptotiquement stable) au sens de Liapounov ;
- si $\frac{dx^c}{dt} = v^c(x^c)$ n'est pas stable au sens de Liapounov en \bar{x} , alors le système complet $\frac{dx}{dt} = v(x)$ n'est pas stable au sens de Liapounov.

Approximation de la partie centrale Il ne reste plus qu'à compléter les résultats précédents par le calcul de v^c sur la sous-variété centrale. Pour cela, il suffit de connaître les équations de W_{loc}^c , étant donné que le champ de vecteurs v restreint à W_{loc}^c n'est autre que v^c . Il est, en général, impossible d'obtenir les équations exactes définissant W_{loc}^c , d'autant plus que cette sous-variété n'est pas unique. Mais cela n'est pas très gênant. En effet, l'étude est locale autour de \bar{x} et les objectifs poursuivis sont de nature qualitative, par exemple savoir si \bar{x} est stable ou pas. Ainsi, on peut se contenter d'une connaissance approximative, au sens des développements limités, des équations de W_{loc}^c et donc de v^c .

Considérons donc le système régulier (C^∞ par exemple) $\frac{dx}{dt} = v(x)$, pour $x \in U$, ouvert de \mathbb{R}^n et un point d'équilibre \bar{x} . On note $A = Dv(\bar{x})$ la matrice jacobienne de v

³L'équivalence topologique (cf. conclusion du chapitre 1) signifie que les orbites se correspondent par un homéomorphisme h qui préserve le sens de parcours mais pas nécessairement le paramétrage en temps (voir la conclusion du chapitre 1, stabilité structurelle).

en \bar{x} . La décomposition en blocs de Jordan de A conduit à la factorisation suivante

$$A = P \begin{pmatrix} A^c & 0 & 0 \\ 0 & A^s & 0 \\ 0 & 0 & A^i \end{pmatrix} P^{-1},$$

où A^c a ses valeurs propres sur l'axe imaginaire, A^s a ses valeurs propres stables, A^i a ses valeurs propres instables et P est une matrice inversible. Le changement affine de coordonnées,

$$x \longrightarrow P^{-1}(x - \bar{x})$$

permet de se ramener au voisinage de 0 et de découpler le linéarisé tangent. Sans changer de notation, on peut donc supposer que $\frac{dx}{dt} = v(x)$ s'écrit, au voisinage du point d'équilibre $\bar{x} = 0$, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + f^c(x^c, (x^s, x^i)) \\ \frac{dx^s}{dt} = A^s x^s + f^s(x^c, (x^s, x^i)) \\ \frac{dx^i}{dt} = A^i x^i + f^i(x^c, (x^s, x^i)) \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $x = (x^c, x^s, x^i)$ et où f^c , f^s et f^i sont des fonctions régulières de x , nulles ainsi que leurs dérivées en 0. On note $x^h = (x^s, x^i)$ (partie "hyperbolique" de x) et

$$A^h = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & A^i \end{pmatrix}$$

(partie "hyperbolique" de A). (2.4) s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + f^c(x^c, x^h) \\ \frac{dx^h}{dt} = A^h x^h + f^h(x^c, x^h) \end{cases} \quad (2.5)$$

avec $f^h = (f^s, f^i)$.

Comme l'illustre la figure 2.3, page 96, W_{loc}^c est, par définition, tangente en 0 à E^c , l'espace vectoriel d'équation $x^h = 0$. Il est donc normal de chercher une équation de W_{loc}^c sous la forme de $x^h = h(x^c)$ avec $h(0) = 0$ ($0 \in W_{loc}^c$) et $Dh(0) = 0$ (E^c tangente en 0 à W_{loc}^c). La dynamique sur la sous-variété centrale est alors, dans les coordonnées locales x^c , donnée par :

$$\frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + f^c(x^c, h(x^c)) = v^c(x^c).$$

Comme $h(x^c) = O(\|x^c\|^2)$ et $f^c(x^c, x^h) = O(\|x^c\|^2 + \|x^h\|^2)$, on a

$$v^c(x^c) = A^c x^c + f^c(x^c, 0) + O(\|x^c\|^3).$$

Ainsi, la projection de v sur le plan $x^h = 0$ fournit une approximation jusqu'à l'ordre 2 inclus de la dynamique sur la sous-variété centrale. Dans certains cas, cette approximation est suffisante. Si elle ne l'est pas⁴, i.e. si l'ajout de termes d'ordre 3 et plus peut modifier l'allure du portrait de phases en 0, il convient de calculer les termes d'ordre 3, au moins. Pour cela, il est nécessaire de connaître la fonction h avec plus de précision.

C'est le moment d'utiliser une propriété essentielle de la sous-variété centrale, celle d'être invariante par le flot, i.e. le vecteur v est tangent à W_{loc}^c (cf. figure 2.3, page 96). Cette condition de tangence s'exprime par les égalités suivantes où intervient le jacobien Dh de h :

$$\begin{aligned} \frac{dx^h}{dt} &= \frac{d}{dt}(h(x^c)) = Dh(x^c) \frac{dx^c}{dt} = Dh(x^c)(A^c x^c + f^c(x^c, h(x^c))) \\ \frac{dx^h}{dt} &= A^h x^h + f^h(x^c, x^h) = A^h h(x^c) + f^h(x^c, h(x^c)). \end{aligned}$$

Ainsi h vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\mathcal{N}(h(x^c)) = Dh(x^c)(A^c x^c + f^c(x^c, h(x^c))) - A^h h(x^c) - f^h(x^c, h(x^c)) = 0. \quad (2.6)$$

Cette équation aux dérivées partielles ne peut pas, en général, être résolue de manière exacte. En revanche, elle permet de calculer de façon récurrence les termes successifs du développement limité de h en $x^c = 0$ grâce au résultat d'approximation suivant.

Théorème 16 [approximation de la sous-variété centrale] *Si une fonction $\rho(x^c)$, telle que $\rho(0) = 0$ et $D\rho(0) = 0$, est, autour de $x^c = 0$, solution à l'ordre $k > 1$ en x^c de l'équation aux dérivées partielles (2.6),*

$$\mathcal{N}(\rho(x^c)) = O(\|x^c\|^k),$$

alors ρ est également une approximation à l'ordre k de h :

$$h(x^c) = \rho(x^c) + O(\|x^c\|^k).$$

Exemple Comme illustration, considérons le système plan suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + (x_1 + x_2)x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \alpha(x_1 + x_2)^2 \end{cases} \quad (2.7)$$

⁴Typiquement, $v^c = 0 + O(\|x^c\|^3)$.

où α est un paramètre. Quelles sont les conditions sur α pour que le point stationnaire $\bar{x} = 0$ soit stable.

Les deux exposants caractéristiques en $\bar{x} = 0$ sont 0 et -1 . On ne peut donc rien dire sur la stabilité car 0 n'est pas un point d'équilibre hyperbolique. Il convient d'utiliser la méthode de la sous-variété centrale.

Le linéarisé tangent en 0 a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1},$$

dont les colonnes sont les vecteurs propres de A , permet de mettre A sous forme diagonale,

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

et le changement linéaire de variables,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x^c \\ x^h \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

transforme le système dans la forme standard (2.5) suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = x^c x^h \\ \frac{dx^h}{dt} = -x^h + \alpha(x^c)^2. \end{cases}$$

La sous-variété centrale est ici donnée par le graphe d'une fonction $x^h = h(x^c)$. L'équation aux dérivées partielles (2.6) est ici l'équation différentielle implicite en x^c suivante :

$$\frac{dh}{dx^c}(x^c)[x^c h(x^c)] + h(x^c) - \alpha(x^c)^2 = 0$$

avec comme conditions $h(0) = 0$ et $\frac{dh}{dx^c}(0) = 0$. On pose

$$h(x^c) = a(x^c)^2 + b(x^c)^3 + O((x^c)^4);$$

on substitue ce développement dans l'équation différentielle précédente et on identifie les termes de même puissance pour avoir les coefficients a et b . Tous calculs faits, on obtient

$$h(x^c) = \alpha(x^c)^2 + O((x^c)^4).$$

L'approximation de la dynamique sur la sous-variété centrale est alors la suivante :

$$\frac{dx^c}{dt} = \alpha(x^c)^3 + O((x^c)^5).$$

Nous pouvons alors répondre à la question de départ. Si $\alpha < 0$, le système est asymptotiquement stable. Si $\alpha > 0$, le système n'est pas asymptotiquement stable. Si $\alpha = 0$, on a directement $h(x) = 0$ et $\frac{dx^c}{dt} = 0$. donc il y a stabilité sans convergence asymptotique. La situation est résumée par les trois portraits de phases (dans les coordonnées (x^c, x^h)) de la figure 2.4, page 97. Mis bout à bout, ils constituent le diagramme de bifurcation du système autour de 0 en fonction du paramètre $\alpha = 0$.

La structure locale d'un portrait de phases Avec un peu de recul, nous voyons que, pour étudier le portrait de phases (structure du flot) autour de \bar{x} , on essaie toujours d'approximer v par les premiers termes de son développement limité en \bar{x} :

$$v(x) = v(\bar{x}) + Dv(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots$$

Si $v(\bar{x}) \neq 0$, la structure (différentiable) locale du flot est très simple (cf. le théorème de redressement, page 6). Si $v(\bar{x}) = 0$ et si $Dv(\bar{x})$ est une matrice dont les valeurs propres sont toutes à partie réelle non nulle, alors la structure (topologique) locale du flot est donnée par la partie linéaire de v (cf. le théorème de Grobman-Hartman, page 13). Si $v(\bar{x}) = 0$ et si $Dv(\bar{x})$ admet au moins une valeur propre à partie réelle nulle, alors la structure (topologique) locale du flot n'est que partiellement donnée par $Dv(\bar{x})$ (théorème de la sous-variété centrale, page 70) et nécessite l'étude précise du flot sur la sous-variété centrale.

Système discret

Nous n'énonçons pas les résultats mathématiques pour les systèmes discrets car ils sont très similaires à ceux des systèmes continus. Nous nous contentons de présenter la façon de construire les approximations de la sous-variété centrale.

Approximation de la partie centrale La question est la suivante : quelle est la structure topologique du portrait de phases autour du point fixe \bar{x} non hyperbolique du système discret

$$x_{k+1} = G(x_k),$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$ et $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ régulière ? Cette question est pertinente car le théorème de Grobman-Hartman, page 11, ne s'applique plus.

Quitte à faire une translation et une transformation linéaire, on peut toujours supposer que $\bar{x} = 0$ et que le système s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} x_{k+1}^c &= B^c x_k^c + f^c(x_k^c, x_k^h) \\ x_{k+1}^h &= B^h x_k^h + f^h(x_k^c, x_k^h) \end{cases}$$

où B^c est une matrice carrée dont toutes les valeurs propres sont sur le cercle unité (la partie non hyperbolique de $DG(\bar{x})$), B^h est une matrice carrée dont toutes les valeurs propres n'appartiennent pas au cercle unité, f^c et f^h sont des fonctions régulières telles que $f^c(0) = 0$, $f^h(0) = 0$, $Df^c(0) = 0$ et $Df^h(0) = 0$. Comme précédemment, on cherche une équation de la sous-variété centrale W_{loc}^c sous la forme $x^h = h(x^c)$ avec $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 0$. L'invariance de W_{loc}^c par l'application $(G(W_{loc}^c) \subset W_{loc}^c)$ permet alors de caractériser h par

$$\mathcal{N}(h(x^c)) = h[B^c x^c + f^c(x^c, h(x^c))] - B^h h(x^c) - f^h(x^c, h(x^c)) = 0, \quad (2.8)$$

et d'en déduire une approximation polynômiale de h et de la dynamique sur W_{loc}^c dans les coordonnées locales x^c par la relation

$$x_{k+1}^c = B^c x_k^c + f^c(x_k^c, h(x_k^c)) = G^c(x_k).$$

Exemple Soit le système plan suivant :

$$\begin{cases} u_{k+1} &= u_k + (1 - \lambda)v_k + (u_k + v_k)(u_k + 2v_k) \\ v_{k+1} &= \lambda v_k - (u_k + v_k)^2 \end{cases}$$

avec $0 < \lambda < 1$. Le point fixe 0 est-il asymptotiquement stable ?

L'approximation linéaire montre que 0 n'est pas hyperbolique : les valeurs propres de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

sont λ et 1. Pour répondre à la question posée, il convient donc d'utiliser la sous-variété centrale en 0.

B est diagonalisable :

$$B = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1}$$

avec

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{T^{-1}} \begin{pmatrix} x^c = u + v \\ x^h = v \end{pmatrix}$$

conduit à un premier découplage (linéaire) entre la partie hyperbolique (ici contractante) et la partie centrale :

$$\begin{cases} x_{k+1}^c &= x_k^c + x_k^c x_k^h \\ x_{k+1}^h &= \lambda x_k^h - (x_k^c)^2. \end{cases}$$

On cherche alors une équation de la sous-variété centrale W_{loc}^c de la forme $x^h = h(x^c) = a(x^c)^2 + b(x^c)^3 + O((x^c)^4)$. L'invariance de W_{loc}^c implique que, si $x_k^h = h(x_k^c)$, alors $x_{k+1}^h = h(x_{k+1}^c)$. Ce qui se traduit ici par l'équation sur h suivante

$$\lambda h(x_k^c) - (x_k^c)^2 = h[x_k^c + x_k^c h(x_k^c)].$$

On en déduit alors directement que $a = 1/(\lambda - 1)$ et $b = 0$. Ce qui donne l'approximation suivante de la dynamique sur W_{loc}^c :

$$x_{k+1}^c = x_k^c + \frac{(x_k^c)^3}{\lambda - 1} + O(|x_k^c|^5).$$

Puisque $\lambda - 1 < 0$, $x^c = 0$ est un point fixe asymptotiquement stable de l'équation ci-dessus. Ainsi $(u, v) = 0$ est un point fixe asymptotiquement stable du système de départ.

2.2.2 Formes normales

L'étude de la stabilité de la partie centrale de la dynamique repose sur les termes non linéaires. Plus ces derniers font intervenir des puissances d'ordre élevé, moins ils sont importants. Là encore, il est possible d'effectuer des changements de variables de façon à éliminer, jusqu'à un ordre fixé par avance, le maximum de termes non linéaires. Le principe d'élimination est dû à Poincaré. Il consiste à chercher les bonnes coordonnées sous la forme d'une série et à choisir les coefficients de la série de façon à éliminer successivement, quand c'est possible, les termes non linéaires en commençant par les termes d'ordre 2.

Le but poursuivi est de simplifier l'expression analytique de la dynamique. La forme simplifiée est alors appelée forme normale⁵. L'étude des trajectoires à partir la forme normale se révèle être plus facile car cette dernière ne comporte que les vrais effets non linéaires, ceux qui ne peuvent pas être éliminés par de simples changements de variables. La persistance de ces termes est due à un phénomène tout à fait fondamental appelé résonance. Nous traitons ici les systèmes continus et discrets.

Les systèmes continus

Un exemple pour comprendre Considérons le système plan suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 + (x_2)^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

⁵De façon analogue, dans une base adaptée, toute matrice se ramène à une matrice diagonale par blocs : c'est la forme normale, dite de Jordan, d'une matrice.

avec λ_1 et λ_2 les deux exposants caractéristiques en 0. On souhaite par changement de variables sur $x = g(y)$ ($g(0) = 0$),

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, y_2) \\ x_2 = g_2(y_1, y_2), \end{cases}$$

éliminer le terme d'ordre 2, $(x_2)^2$, et ainsi se ramener à une équation différentielle en y où les non linéarités sont d'ordre 3 et plus :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + O(\|y\|^3) \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + O(\|y\|^3). \end{cases}$$

On peut considérer, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, que $Dg(0)$ est la matrice identité. On pose donc $g(y) = y + f(y)$ avec $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$. On a

$$\frac{dy}{dt} = (I + Df(y))^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + f_1(y) \\ y_2 + f_2(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (y_2 + f_2(y))^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On veut que le membre de droite ne comporte plus de termes d'ordre 2. Or $f(y) = O(\|y\|^2)$ et $Df(y) = O(\|y\|)$. Donc ces termes d'ordre 2 sont les premiers termes du développement limité de

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \end{pmatrix} - Df(y) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car $(I + df(y))^{-1} = I - Df(y) + O(\|y\|^2)$. On pose

$$\begin{cases} f_1(y) = a_1 y_1^2 + b_1 y_1 y_2 + c_1 y_2^2 + O(\|y\|^3) \\ f_2(y) = a_2 y_1^2 + b_2 y_1 y_2 + c_2 y_2^2 + O(\|y\|^3) \end{cases}$$

L'annulation des termes d'ordre 2 se traduit par

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(a_1 y_1^2 + b_1 y_1 y_2 + c_1 y_2^2) \\ \lambda_2(a_2 y_1^2 + b_2 y_1 y_2 + c_2 y_2^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\lambda_1 a_1 y_1^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)b_1 y_1 y_2 + 2\lambda_2 c_1 y_2^2 \\ 2\lambda_1 a_2 y_1^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)b_2 y_1 y_2 + 2\lambda_2 c_2 y_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Cela implique $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$. Il ne reste plus que l'équation

$$(\lambda_1 - 2\lambda_2)c_1 = -1$$

qui ne peut être vérifiée que si λ_1 n'est pas le double de λ_2 . Cette condition de nature **arithmétique** sur les exposants caractéristiques λ_1 et λ_2 , $\lambda_1 = 2\lambda_2$, est appelée résonance.

Le terme $\begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est appelé monôme (vectoriel) résonant. C'est à cause de lui qu'apparaît le terme -1 dans le second membre de l'équation précédente.

Le cas général La procédure d'élimination, dite de Poincaré-Dulac, commence par les termes de plus bas degré dans le développement de Taylor du champ de vecteurs autour d'un point d'équilibre. On commence par éliminer le maximum de termes d'ordre 2. puis les termes d'ordre 3, ...

On part du développement de Taylor autour du point d'équilibre 0 jusqu'à l'ordre 3 du champ de vecteurs $v(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + v_2(x) + O(\|x\|^3)$$

où $v_2(x)$ correspond aux termes d'ordre 2 (un polynôme vectoriel homogène de degré 2 dont les composantes sont des combinaisons linéaires de doubles produits de composantes de x).

On commence par un premier changement de variable $x = y + f(y)$ où $f(y)$ est un polynôme vectoriel homogène de degré 2 dans le but d'éliminer un maximum de termes d'ordre 2 contenu dans $v_2(x)$. Comme $x = y + O(\|y\|^2)$, on a

$$\frac{dy}{dt} = (I + Df(y))^{-1} [A(y + f(y)) + v_2(y + f(y))] + O(\|y\|^3).$$

Mais $Df(y) = O(\|y\|)$, donc $(I + Df(y))^{-1} = I - Df(y) + O(\|y\|^2)$. On a aussi $v_2(y + f(y)) = v_2(y) + O(\|y\|^3)$. Donc

$$\frac{dy}{dt} = Ay + v_2(y) - (Df(y)Ay - Af(y)) + O(\|y\|^3).$$

On note H_2 l'espace vectoriel de dimension finie, composé de tous les polynômes vectoriels, de dimension n , homogènes d'ordre 2 en y . Il est facile de voir que, puisque $f(y) \in H_2$, $Df(y)Ay \in H_2$ et $Af(y) \in H_2$. Il apparaît ainsi l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{ccc} H_2 & \longrightarrow & H_2 \\ f(y) & \longrightarrow & Df(y)Ay - Af(y). \end{array}$$

Si $v_2(y)$ appartient à l'image de H_2 par cet opérateur, on peut éliminer tous les termes d'ordre 2 sinon il n'est possible que d'en éliminer une partie.

Cet opérateur est en fait défini dès que $f(y)$ est continûment dérivable. On le note généralement $\text{ad } A$. On remarquera que $\text{ad } A(f)$ n'est autre que le crochet de Lie entre les deux champs de vecteurs $y \rightarrow f(y)$ et $y \rightarrow Ay$. L'équation $\text{ad } A(f) = v$ est appelée équation homologique. Sa résolution repose sur le résultat algébrique suivant. (cf. [4]).

Proposition 7 Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les n valeurs propres d'un endomorphisme A de \mathbb{R}^n . A une fonction $C^1, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on associe la fonction

$$\text{ad } A(f) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y \longrightarrow Df(y)Ay - Af(y) \cdot$$

On note H_r , l'espace des polynômes vectoriels de dimension n homogènes de degré $r \geq 1$. Alors $\text{ad } A(H_r) \subset H_r$ et les valeurs propres de la restriction de $\text{ad } A$ à H_r sont toutes de la forme

$$m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n - \lambda_s$$

où les m_i sont des entiers positifs ou nuls satisfaisant $m_1 + \dots + m_n = r$ et $s \in \{1, \dots, n\}$.

Ce résultat motive la définition suivante.

Définition 17 [exposants caractéristiques résonants] Les exposants caractéristiques $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont résonants s'ils sont reliés par une relation de la forme

$$m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n = \lambda_s$$

où les m_i sont des entiers positifs ou nuls satisfaisant $m_1 + \dots + m_n \geq 2$ et $s \in \{1, \dots, n\}$. Cette relation est appelée résonance et le nombre $m_1 + \dots + m_n$ est l'ordre de la résonance.

La relation $\lambda_1 = 2\lambda_2$ est une résonance d'ordre deux. $2\lambda_1 = 3\lambda_2$ n'est pas une résonance. $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ est une résonance d'ordre 3 car, par exemple, $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$.

Nous avons tous les éléments pour terminer l'élimination des termes dits non résonants. Si les valeurs propres de A n'admettent pas de résonance d'ordre 2, il est possible d'éliminer tous les termes de degré 2 (par la proposition 7, $\text{ad } A|_{H_2}$ est injectif donc bijectif). Dans tous les cas, on pose $H_2 = \text{ad } A(H_2) \oplus G_2$ où G_2 est un espace vectoriel complémentaire de $\text{ad } A(H_2)$ dans H_2 . La dimension de G_2 est égale au nombre des résonances d'ordre 2. On décompose alors $v_2(y)$ selon cette somme directe : $v_2 = \text{ad } A(f_2) + w_2$. On obtient pour les coordonnées y définies par $x = y + f_2(y)$

$$\frac{dy}{dt} = Ay + w_2(y) + O(\|y\|^3).$$

$w_2(y)$ est composé de monômes vectoriels dits résonants. Si les termes d'ordre 2 sont suffisants pour en déduire le portrait de phases on s'arrête ici. Sinon, il faut prendre en compte les ordres supérieurs.

On suppose maintenant que l'on a traité tous les termes d'ordre inférieur strictement à $r \geq 3$:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + w_2(x) + \dots + w_{r-1}(x) + v_r(x) + O(\|x\|^{r+1}).$$

Pour des raisons évidentes de clarté dans l'exposé, on est revenu à la notation x . Il est bien évident que ces coordonnées x sont, a priori, différentes des coordonnées x du système de départ. Le passage des unes aux autres nécessite la composition des $r - 2$ changements de coordonnées correspondants à l'élimination des termes non résonants d'ordre $< r$. $w_i \in H_i$ est dit résonant car, s'il est différent de 0, il n'appartient pas à $\text{ad } A(H_i)$. $v_r(x)$ est le terme d'ordre r du développement de Taylor dans les nouvelles coordonnées x du champ

de vecteurs. Il est alors simple de transposer les calculs faits pour l'ordre 2 à l'ordre r car les termes résonants w_i n'interviennent pas. On pose $x = y + f(y)$ avec $f(y) \in H_r$. On a

$$\frac{dy}{dt} = Ay + w_2(y) + \dots + w_{r-1}(y) + v_r(y) - \text{ad } A(f(y)) + O(\|y\|^{r+1})$$

(Utiliser $w_i(y + f(y)) = w_i(y) + O(\|y\|^{r+1})$, $Df(y) = O(\|y\|^{r-1})$ et $(I + Df(y))^{-1} = I - Df(y) + O(\|y\|^{2r-2})$). On pose $H_r = \text{ad } A(H_r) \oplus G_r$ et $v_r = \text{ad } A(f_r) + w_r$. La dimension du sous-espace supplémentaire G_r est égale au nombre de résonances d'ordre r . On obtient finalement, pour les coordonnées y définies par $x = y + f_r(y)$,

$$\frac{dy}{dt} = Ay + w_2(y) + \dots + w_{r-1}(y) + w_r(y) + O(\|y\|^{r+1}).$$

Dynamique centrale de dimensions 1, 2 et 3 Nous allons voir, sur quelques cas simples, quelles informations il est possible d'obtenir de la méthode d'élimination de Poincaré-Dulac pour l'étude de la dynamique sur la sous-variété centrale.

Si la sous-variété centrale est de dimension $n = 1$, alors $A = 0$ et $\lambda_1 = 0$. Tous les termes x^k sont résonants. Cependant, comme on est en dimension 1, la stabilité et le portrait de phases sont donnés de façon triviale par le premier terme non nul du développement en série du champ de vecteurs.

Les choses commencent à se compliquer nettement pour une sous-variété centrale de dimension $n = 2$. Les exposants caractéristiques possibles sont :

- ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$) et tous les termes sont résonants ; il est impossible de simplifier les équations par un changement régulier de coordonnées ; l'étude peut néanmoins se poursuivre par un changement de variables **singulier** au point d'équilibre (sorte de loupe),

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1/x_2 \end{pmatrix},$$

que l'on appelle σ -processus ; pour plus de renseignements sur ce type de méthode, appelée éclatement des singularités, voir [4], page 20 ;

- ($\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$) ($\omega \neq 0$) ; les résonances les plus basses sont d'ordre 3 et au nombre de 2 ($\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_2 = 2\lambda_2 + \lambda_1$) ; ainsi, on se ramène à une système avec des monômes résonants d'ordre 3 et plus ; comme il n'y a que deux résonances, il ne peut y avoir dans la forme normale que deux monômes résonants d'ordre 3 indépendants donc deux coefficients qu'il convient de calculer à partir du champ de vecteurs de départ ; par exemple, le système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + O(\|x\|^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + O(\|x\|^2) \end{cases}$$

peut toujours s'écrire dans les bonnes coordonnées y

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2 + (\alpha y_1 - \beta y_2)(y_1^2 + y_2^2) + O(\|y\|^4) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 + (\alpha y_1 + \beta y_2)(y_1^2 + y_2^2) + O(\|y\|^4) \end{cases}$$

où les deux paramètres α et β dépendent des termes d'ordre 2 et 3 du système de départ en x ; ce résultat joue un rôle important dans l'analyse de la bifurcation de Hopf (voir plus loin).

Lorsque la sous-variété centrale est de dimension $n = 3$, les choses se compliquent énormément car le nombre de résonances devient important. Les 3 exposants caractéristiques possibles sont alors

- $(0, 0, 0)$; tous les termes non linéaires sont résonants ;
- $(0, i\omega, -i\omega)$; il y a 2 résonances d'ordre 2 ($0 = i\omega + (-i\omega)$ et $0 = 2 \times 0$) et 4 résonances d'ordre 3 ($0 = 3 \times 0$, $0 = 0 + i\omega - i\omega$, $i\omega = 2(i\omega) + (-i\omega)$, et $-i\omega = 2(-i\omega) + i\omega$). Aucune étude systématique et complète (bifurcation de codimension 2) n'existe actuellement.

Les difficultés de la linéarisation Le phénomène de résonances peut très bien avoir lieu pour des points d'équilibre hyperboliques. La méthode d'élimination de Poincaré-Dulac montre alors qu'il est impossible d'éliminer les termes résonances d'ordre 2, s'ils existent, par un changement de coordonnées C^1 . En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas, sauf pour certains systèmes de dimension 2, de fonction f continûment dérivable telle que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ et $Df(y)Ay - Af(y) = w_2(y)$, dès que les valeurs propres de la matrice A admettent des résonances d'ordre 2 et dès que $w_2(y)$ n'appartient pas à $\text{ad } A(H_2)$. Il est donc normal que le théorème de Grobman-Hartman ne porte que sur des équivalences topologiques. Pour avoir des résultats sur des équivalences plus fines, il convient d'adjoindre à l'hypothèse d'hyperbolicité, des hypothèses de non résonance (théorèmes de Sternberg, voir par exemple [?]).

Les systèmes discrets

Ce qui vient d'être fait pour les systèmes continus peut être directement transposé aux systèmes discrets. On considère une approximation à l'ordre 3,

$$x_{k+1} = Bx_k + G_2(x_k) + O(\|x_k\|^3), \quad x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}^n,$$

($G_2(0) = 0$ et $DG_2(0) = 0$) d'un système discret qui admet $\bar{x} = 0$ comme point fixe. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n multiplicateurs caractéristiques en 0, i.e. les valeurs propres de la matrice B . On effectue un premier changement de variable $x = y + F(y)$ avec $F \in H_2$, l'ensemble des polynômes vectoriels de dimension n homogènes et de degré 2. On a

$$y_{k+1} + F(y_{k+1}) = B(y_k + F(y_k)) + G_2(y_k + F(y_k)) + O(\|y_k + F(y_k)\|^3).$$

Ainsi $y_{k+1} = By_k + O(\|y_k\|^2)$ et donc

$$y_{k+1} = B(y_k) + G_2(y_k) - (F(By_k) - BF(y_k)) + O(\|y_k\|^3).$$

On voit ainsi apparaître l'opérateur linéaire $F(y) \rightarrow F(By) - BF(y)$ dont l'étude conduit au résultat algébrique suivant. (cf. [4]).

Proposition 8 *Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les n valeurs propres d'un endomorphisme B de \mathbb{R}^n . A une fonction C^1 , $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on associe la fonction*

$$\begin{aligned} \text{ad } B(F) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\longrightarrow F(By) - BF(y) \end{aligned}$$

On note H_r , l'espace des polynômes vectoriels de dimension n homogènes de degré $r \geq 1$. Alors $\text{ad } B(H_r) \subset H_r$ et les valeurs propres de la restriction de $\text{ad } B$ à H_r sont toutes de la forme

$$\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n} - \lambda_s$$

où les m_i sont des entiers positifs ou nuls satisfaisant $m_1 + \dots + m_n = r$ et $s \in \{1, \dots, n\}$.

Définition 18 [multiplicateurs caractéristiques résonants] *Les multiplicateurs caractéristiques $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont résonants s'ils sont reliés par une relation de la forme*

$$\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n} = \lambda_s$$

où les m_i sont des entiers positifs ou nuls satisfaisant $m_1 + \dots + m_n \geq 2$ et $s \in \{1, \dots, n\}$. Cette relation est appelée résonance et le nombre $m_1 + \dots + m_n$ est l'ordre de la résonance.

Nous pouvons maintenant poursuivre l'élimination des termes d'ordre 2. On pose $H_2 = \text{ad } B(H_2) \oplus K_2$ où K_2 est un espace vectoriel complémentaire de $\text{ad } B(H_2)$ dans H_2 . La dimension de K_2 est égale au nombre des résonances d'ordre 2. On décompose alors $G_2(y)$ selon cette somme directe : $G_2 = \text{ad } B(F_2) + R_2$. Dans les coordonnées y définies par $x = y + F_2(y)$ on a

$$y_{k+1} = By_k + R_2(y_k) + O(\|y_k\|^3).$$

Si les termes d'ordre 2 sont suffisants pour en déduire le portrait de phases on s'arrête ici. Sinon, il faut prendre en compte les ordres supérieurs.

On suppose maintenant que l'on a traité tous les termes d'ordre inférieur strictement à $r \geq 3$:

$$x_{k+1} = Bx_k + R_2(x_k) + \dots + R_{r-1}(x_k) + G_r(x_k) + O(\|x_k\|^{r+1}).$$

$R_i \in H_i$ est résonant car, s'il est différent de 0, il n'appartient pas à $\text{ad } B(H_i)$. $G_r(x)$ est le terme d'ordre r du développement de Taylor du champ de vecteurs, dans les dernières coordonnées obtenues x . On pose $x = y + F(y)$ avec $F(y) \in H_r$. On a

$$y_{k+1} = By_k + R_2(y_k) + \dots + R_{r-1}(y_k) + G_r(y_k) - \text{ad } B(F(y_k)) + O(\|y_k\|^{r+1})$$

On pose $H_r = \text{ad } B(H_r) \oplus K_r$ et $G_r = \text{ad } B(F_r) + R_r$. La dimension du sous-espace supplémentaire K_r est égale au nombre de résonances d'ordre r . Dans les coordonnées y définies par $x = y + F_r(y)$

$$y_{k+1} = By_k + R_2(y_k) + \dots + R_{r-1}(y_k) + R_r(y_k) + O(\|y_k\|^{r+1}).$$

Dynamique centrale de dimensions 1 et 2 Comme pour le cas continu, nous allons voir rapidement ce que l'on peut déduire de cette méthode d'élimination pour l'étude de la dynamique centrale. Des différences notables existent entre les systèmes discrets et continus. Elles montrent clairement que le cas discret est plus compliqué que le cas continu.

Si la partie centrale est de dimension 1, alors deux possibilités existent pour le multiplicateur caractéristique soit 1 soit -1 . Pour 1, le premier terme résonant est d'ordre 2 ($1 = 1^2$), pour -1 il est d'ordre 3 ($-1 = (-1)^3$).

Pour une partie centrale de dimension 2, les multiplicateurs caractéristiques possibles sont :

- ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$) et tous les termes non linéaires de n'importe quel ordre sont résonants ;
- ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$) avec 3 résonances d'ordre 2 ($\lambda_1 = \lambda_1^2$, $\lambda_1 = \lambda_2^2$ et $\lambda_2 = \lambda_1\lambda_2$) ;
- ($\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$) tous les termes d'ordre 3 sont résonants (il y en a 8) ;
- ($\lambda_1 = \exp(2i\pi\theta)$, $\lambda_2 = \exp(-2i\pi\theta)$) avec $\theta \in]0, 1[$ et $\theta \neq 1/2$; si $\theta \neq 1/3$ et $\theta \neq 1/4$, les premières résonances sont d'ordre 3 et au nombre de 2 ($\lambda_1 = \lambda_1^2\lambda_2$ et $\lambda_2 = \lambda_1\lambda_2^2$) ; si $\theta = 1/3$, il y a deux résonances d'ordre 2 ($\lambda_2 = \lambda_1^2$ et $\lambda_1 = \lambda_2^2$) ; si $\theta = 1/4$, les premières résonances sont certes d'ordre 3 mais au nombre de 4 ($\lambda_1 = \lambda_1^2\lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_1\lambda_2^2$, $\lambda_2 = \lambda_1^3$, et $\lambda_1 = \lambda_2^3$).

Pour une dynamique centrale de même dimension, les nombres de cas et de résonances sont plus nombreux pour les systèmes discrets que pour les systèmes continus. On doit donc s'attendre à plus de complexité pour les systèmes discrets que pour les systèmes continus. C'est effectivement le cas (cf. [7, 4]).

2.2.3 Utilisation en théorie des bifurcations

Avec la sous-variété centrale et les formes normales de Poincaré, on simplifie grandement l'étude du portrait de phases de $\frac{dx}{dt} = v_\mu(x)$ pour la valeur de bifurcation $\mu = \bar{\mu}$ et autour du point d'équilibre \bar{x} . Il est aussi intéressant d'avoir le portrait de phases pour μ voisin de $\bar{\mu}$. Pour cela, il suffit de se placer dans un espace des phases élargi, produit cartésien de l'espace des phases et de l'espace des paramètres, de considérer le système étendu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_\mu(x) \\ \frac{d\mu}{dt} = 0 \end{cases}$$

et d'utiliser la sous-variété centrale en $(\bar{x}, \bar{\mu})$. En reprenant les calculs, on voit que tout se passe comme si μ était un paramètre. Plus précisément, la partie hyperbolique représentée par x^h reste inchangée tandis que la partie centrale devient (x^c, μ) . L'équation de la sous-variété centrale (sous-variété de l'espace des phases élargi) devient $x^h = h(x^c, \mu)$ et les coefficients des termes (monômes) résonants dépendent du paramètre μ . Comme $\frac{d\mu}{dt} = 0$, la sous-variété centrale se découpe en sous-variétés invariantes qui correspondent à différentes valeurs du paramètre μ , proche de $\bar{\mu}$ (cf. figure 2.5, page 98).

Pour les systèmes discrets, c'est la même chose. Il suffit de considérer le système élargi

$$\begin{cases} x_{k+1} &= G_{\mu_k}(x_k) \\ \mu_{k+1} &= \mu_k \end{cases}$$

pour se rendre compte que tous les calculs précédents (sous-variété centrale et formes normales) peuvent être repris avec μ comme paramètre.

2.3 Bifurcations classiques de point d'équilibre

La réduction à la partie centrale et l'élimination des termes non résonants permettent de simplifier l'étude du portrait de phases en un point d'équilibre (ou en un point fixe) non hyperbolique. Ces deux techniques ne constituent pas une réponse définitive à l'étude locale du portrait de phases. En particulier, l'analyse de la partie non hyperbolique de la dynamique, même écrite sur forme normale, peut s'avérer très ardue. Cependant dans de nombreux cas, qui apparaissent fréquemment lors de l'étude de systèmes physiques dépendant de paramètres, ces deux techniques se révèlent être suffisantes. Nous donnons ici une liste des bifurcations, les plus courantes et aussi les plus simples⁶, pour les points d'équilibre d'un système continu. Dans le cas d'un système discret, les choses sont notablement plus complexes. Aussi nous ne traitons pas ce cas et nous renvoyons le lecteur intéressé à [7] et à [4].

2.3.1 Les deux bifurcations locales génériques à un paramètre

On suppose, dans cette section, que le système continu $\frac{dx}{dt} = v_\mu(x)$ ne dépend que d'un seul paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et que cette dépendance est générale, on dit aussi générique. Nous allons voir, de façon très intuitive, ce que l'on entend par dépendance générale.

On suppose qu'en $\mu = 0$, le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ n'est pas hyperbolique. Sous les hypothèses précédentes, on ne peut avoir que deux types de bifurcations : la bifurcation col-noeud (figure 2.6, page 99) et la bifurcation de Hopf (figure 2.7, page 100).

⁶C'est peut-être aussi parce qu'elles sont simples qu'elles sont les plus couramment rappelées dans les ouvrages sur ce sujet.

En effet, comme la dépendance par rapport à μ est générique, on ne peut avoir que les deux cas suivants (cf. figure 2.8, page 101) :

- soit un seul exposant caractéristique s’annule en $\mu = 0$;
- soit deux exposants caractéristiques, et deux seulement, complexes conjugués à partie imaginaire non nulle, traversent l’axe imaginaire en $\mu = 0$.

Notion de généricité et de codimension Une explication intuitive et non parfaitement rigoureuse est la suivante. Supposons que deux exposants caractéristiques s’annulent pour la même valeur $\mu = 0$. Cela entraîne que, sur les coefficients du jacobien $Dv_\mu(0)$, on impose deux conditions scalaires, chacune étant relative à l’annulation d’une seule valeur propre. Or, ces deux conditions sont fonctionnellement indépendantes dans le sens où, pour des matrices dépendant du même paramètre scalaire μ et très proche de $Dv_\mu(0)$, on n’a pas, en général, annulation des valeurs propres pour **exactement** la même valeur de μ . Plus prosaïquement, on a deux équations (les conditions d’annulation de deux valeurs propres distinctes) et une seule inconnue, le paramètre scalaire μ . Il est alors clair que ces deux équations seront vérifiées pour la même valeur de μ que dans des cas bien particuliers où la dépendance de $Dv_\mu(0)$ par rapport à μ est telle que le système à deux équations et une inconnue admet une solution. Dans le cas général, un tel système rectangulaire n’admet pas de solution. Ainsi, pour un champ de vecteurs générique $v_\mu(x)$ à un seul paramètre, deux exposants caractéristiques ne peuvent s’annuler pour une même valeur du paramètre μ .

Contrairement aux apparences, la traversée par un couple d’exposants caractéristiques de l’axe imaginaire, correspond en fait à une seule condition scalaire sur les coefficients de $Dv_\mu(0)$: l’annulation de la partie réelle associée à un couple de valeurs propres complexes conjuguées (si la partie réelle de l’un des deux exposants caractéristiques s’annule, automatiquement celle de l’exposant caractéristique conjugué du premier s’annule également).

Le raisonnement très approximatif précédent montre que, si le nombre de paramètres μ est égal à 2, il est alors possible d’avoir, de façon générique, l’annulation de deux valeurs propres en même temps : on impose autant de contraintes que de paramètres pour réaliser ces contraintes, à savoir 2.

Néanmoins, nous mettons le lecteur en garde contre ce genre de raisonnement très approximatif, dont l’intérêt principal est de faire comprendre intuitivement la notion de généricité et de codimension : savoir si une situation est générique ou pas en fonction du nombre de paramètres dont on dispose, i.e. la codimension du problème. On peut être conduit assez rapidement à des erreurs car la notion de généricité comporte des pièges difficiles à voir. Deux conditions peuvent sembler fonctionnellement indépendantes alors qu’en fait l’une implique l’autre (cf. ce qui précède sur les deux exposants caractéristiques complexes conjugués et l’annulation de leur partie réelle).

Une présentation rigoureuse de la notion de généricité et de codimension repose sur des résultats établis par R. Thom en topologie différentielle et qui portent le nom de

théorèmes de transversalité. Des exposés assez abordables se trouvent dans [?] et dans [4].

Bifurcation col-nœud

La dynamique de la partie centrale est de dimension 1 et un exposant caractéristique s'annule, les autres exposants restent à partie réelle non nulle. Elle peut donc s'écrire localement ainsi :

$$\frac{dx}{dt} = f_\mu(x)$$

avec $f_0(0) = 0$, $\frac{\partial f_0}{\partial x}(0) = 0$. Comme on a affaire à une bifurcation générique à un paramètre, les deux conditions suivantes, dites de transversalité, sont vérifiées :

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial f_\mu(x)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}(0) \neq 0.$$

Quitte à changer de paramètre $\mu \rightarrow \psi(\mu)$ ($\frac{d\psi}{d\mu}(0) \neq 0$), à changer d'état $x \rightarrow k_\mu(x)$ ($\frac{\partial k_0}{\partial x}(0) \neq 0$), à changer le sens et l'échelle du temps $t \rightarrow \lambda t$ ($\lambda \neq 0$), on se ramène à la forme suivante, dite forme normale :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 + O(|x|^3). \quad (2.9)$$

On voit clairement que les termes d'ordre ≥ 3 ne modifient pas le comportement qualitatif local : pour $\mu < 0$, il n'y a pas de point d'équilibre ; pour $\mu > 0$, il y a deux points d'équilibre, l'un stable, l'autre instable.

Ainsi, la bifurcation col-nœud, pour laquelle un seul exposant caractéristique s'annule, correspond à l'annihilation d'un col et d'un nœud (cf. figure 2.6, page 99). Selon la position du paramètre scalaire de bifurcation μ par rapport à sa valeur de bifurcation, le système admet, ou n'admet pas, deux points stationnaires supplémentaires, l'un stable (si la partie hyperbolique est stable) et l'autre instable dans tous les cas.

Bifurcation de Hopf

La dynamique de la partie centrale est de dimension 2 et un couple d'exposants caractéristiques complexes conjugués traversent l'axe imaginaire, tous les autres exposants caractéristiques restent à partie réelle non nulle. Par le théorème des fonctions implicites, il ne peut y avoir ni apparition ni disparition d'un autre point stationnaire : le point stationnaire dépend régulièrement du paramètre. Nous allons voir qu'en général, un cycle limite apparaît ou disparaît.

On peut toujours écrire la dynamique centrale sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\Omega(\mu)x_2 + f_1(x_1, x_2, \mu) \\ \frac{dx_2}{dt} = \Omega(\mu)x_1 + f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases}$$

où $f_1(0, 0, \mu) = 0 = f_2(0, 0, \mu)$ ⁷, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0, 0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0, 0, 0) = 0$. Il suffit alors d'éliminer (les calculs sont assez fastidieux mais ils peuvent être condensés en utilisant les nombres complexes [7]) les termes d'ordre 2 en (x_1, x_2) , pour obtenir la forme normale suivante (on ne change par de notation sur x)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= [d\mu + a(x_1^2 + x_2^2)]x_1 - [\omega + c\mu + b(x_1^2 + x_2^2)]x_2 + O(\|x\|^4) \\ \frac{dx_2}{dt} &= [\omega + c\mu + b(x_1^2 + x_2^2)]x_1 + [d\mu + a(x_1^2 + x_2^2)]x_2 + O(\|x\|^4) \end{aligned} \quad (2.10)$$

ou en coordonnées polaires $x_1 = r \cos \theta$ et $x_2 = r \sin \theta$

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = (d\mu + ar^2)r + O(r^4) \\ \frac{d\theta}{dt} = (\omega + c\mu + br^2) + O(r^3) \end{cases} \quad (2.11)$$

où $\omega = \Omega(0)$ et a, b, c et d sont des constantes qui dépendent des dérivées successives de f_1 et f_2 en $(0, 0, 0)$.

Il est facile de voir sur les formules précédentes que $d = \left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0}$ où $(\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu))$ est le couple d'exposants caractéristiques complexes conjugués traversant l'axe imaginaire en $\mu = 0$:

$$d = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial \mu}(0, 0, 0) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial \mu}(0, 0, 0) \right]$$

Par ailleurs, un calcul direct montre que

$$a = \frac{f_{1,111} + f_{1,122} + f_{2,112} + f_{2,222}}{16} + \frac{f_{1,12}(f_{1,11} + f_{1,22}) - f_{2,12}(f_{2,11} + f_{2,22}) - f_{1,11}f_{2,11} + f_{1,22}f_{2,22}}{16\omega}$$

où $f_{i,jk}$ (resp. $f_{i,jkl}$) désigne la valeur en $(x_1, x_2, \mu) = 0$ de $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ (resp. $\frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}$).

Dans les coordonnées polaires, on voit directement que si $a \neq 0$ et $d \neq 0$ (conditions dites de transversalité), les termes en r d'ordre supérieur à 4 ne peuvent pas modifier le portrait de phases. En effet, supposons (cf. figure 2.7, page 100) $a < 0$ et $d > 0$:

⁷Le point d'équilibre est 0 et, par translation, peut être supposé indépendant de μ .

- pour $\mu < 0$, toutes les trajectoires convergent en spirale vers le point d'équilibre (foyer asymptotiquement stable) avec une décroissance exponentielle, $r(t) \sim \exp(d\mu t)$;
- pour $\mu = 0$ toutes les trajectoires convergent vers le point d'équilibre mais la décroissance du rayon n'est plus exponentielle, $r(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$;
- pour $\mu > 0$ le point d'équilibre permet sa stabilité au profit d'un cycle limite donné approximativement par l'équation $r = \sqrt{-d\mu/a} + O(\mu)$; ce cycle limite est asymptotiquement stable et de multiplicateur caractéristique $\exp\left(-\frac{2\pi d\mu}{\omega} + O(\mu^2)\right)$.

Les autres cas portant sur les signes de a et d s'obtiennent par changement $\mu \rightarrow -\mu$ et $t \rightarrow -t$.

Comme conséquence remarquable, on a l'existence, au moins pour μ proche de 0, d'un cycle limite, i.e. d'une trajectoire fermée. Il est en général non trivial de montrer, à partir de la donnée d'un champ de vecteurs, l'existence d'orbites périodiques, tout particulièrement lorsque la dimension de l'espace des phases excède 2. La bifurcation de Hopf est de ce fait très intéressante : le petit cycle limite qui prend naissance en $\mu = 0$ aura tendance à grossir lorsque le paramètre s'éloignera de 0. Il ne pourra disparaître que par une nouvelle bifurcation où l'un de ses multiplicateurs caractéristiques traversera le cercle unité (conséquence du théorème des fonctions implicites sur l'application de Poincaré).

2.3.2 Deux autres bifurcations classiques

La notion précédente de généricité repose implicitement sur l'hypothèse que l'on ne connaît le système qu'approximativement et que de petites déformations dans **toutes les directions** du champ de vecteurs sont possibles. Cependant, il arrive souvent que les équations issues de la modélisation doivent respecter rigoureusement certaines contraintes, comme par exemple des symétries, contraintes qui découlent de propriétés physiques dont on connaît a priori la justesse. Dans ce cas, les perturbations admissibles doivent respecter ces contraintes rigoureusement et donc ne peuvent plus être selon toutes les directions. Les bifurcations génériques qui en résultent sont alors différentes des bifurcations génériques où aucune information a priori sur la nature des perturbations admissibles est utilisée.

Nous allons étudier deux cas qui correspondent, pour une famille à une paramètre, à l'annulation d'un seul exposant caractéristique en $\mu = 0$ pour un point stationnaire $\bar{x} = 0$. Par la réduction à la sous-variété centrale, on se ramène à un espace des phases de dimension 1. Autour de 0, la dynamique centrale admet alors le développement limité suivant :

$$\frac{dx}{dt} = a_0(\mu) + a_1(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + \dots \quad (2.12)$$

où $a_0(0) = 0$.

Echange de stabilité

On suppose ici que 0 reste toujours point d'équilibre. Donc, nécessairement, $a_0(\mu) \equiv 0$. Sauf pour des systèmes très particuliers, $\frac{da_1}{d\mu}(0) \neq 0$ et $a_2(0) \neq 0$. Donc, quitte à faire des changements de variables sur x et μ et à inverser le sens du temps, (2.12) se ramène à

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 + O(|x|^3).$$

Les termes d'ordres ≥ 3 ne sont pas gênants. Comme le montre le diagramme de bifurcation de la figure 2.9, page 102, il y a échange de stabilité, lorsque μ passe par 0, entre les deux branches de points stationnaires $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = \mu$.

Fourche

On suppose ici que le champ de vecteurs est une fonction impaire de x . Ceci implique que tous les termes d'ordre pairs du développement limité (2.12) sont nuls : $a_0(\mu) \equiv 0$ et $a_2(\mu) \equiv 0$. Sauf pour des familles bien particulières, on a $\frac{da_1(\mu)}{d\mu}(0) \neq 0$ et $a_3(0) \neq 0$. Quitte à faire des changements de variables et à remplacer t par $-t$, on se ramène à la forme normale suivante

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 + O(|x|^5).$$

Les termes d'ordre ≥ 5 sont alors négligeables et l'on retrouve l'équation (2.2) et la bifurcation fourche étudiée dans l'introduction de ce chapitre.

2.4 Conclusion

2.4.1 Classification des bifurcations par codimension

S'il y a changement qualitatif dans le comportement du système, il y a nécessairement bifurcation. En revanche, s'il y a bifurcation au sens de la définition 16, il n'y a pas nécessairement changement qualitatif : par exemple le système $\frac{dx}{dt} = -\mu^2 x - x^3$ admet une bifurcation en $\mu = 0$ mais ne change pas de comportement qualitatif⁸. Cependant, en $\mu = 0$, on est sur le point de voir surgir d'autres équilibres, mais la dépendance du système par rapport à μ est trop particulière pour que de nouveaux équilibres apparaissent effectivement. En effet, si on considère la famille perturbée $\frac{dx}{dt} = (\varepsilon - \mu^2)x - x^3$ avec $\varepsilon > 0$ petit, alors pour $\mu \in]-\sqrt{\varepsilon}, +\sqrt{\varepsilon}[$ trois points d'équilibre sont présents. Remarquer que

⁸Pour tout μ , le système conserve un seul point d'équilibre globalement attracteur.

cette perturbation préserve la symétrie, i.e. le fait que le champ des vitesses est une fonction impaire de x .

Revenons au système $\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3$. D'autres perturbations, encore plus générales que la précédente et ne respectant plus cette symétrie, comme l'ajout d'une petite constante négative $-\varepsilon$, conduisent alors au diagramme de bifurcation de la figure 2.10, page 103, topologiquement différent du diagramme de la figure 2.1, page 94. En effet, au lieu d'avoir un point d'équilibre qui donne naissance, lorsque μ franchit 0, à trois points d'équilibre distincts, on observe, pour le système perturbé, la naissance de deux points d'équilibre (l'un stable, l'autre instable), à partir de rien, lorsque μ franchit la valeur critique $3(\varepsilon/2)^{2/3}$. C'est une bifurcation col-noeud.

Nous avons vu, pour la famille à un paramètre $\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3$, que, si l'on impose aux perturbations d'être des fonctions impaires de x , alors le diagramme de bifurcation du système perturbé est topologiquement équivalent à celui du système non perturbé. Ce qui veut dire, en termes plus concrets, que la succession des changements qualitatifs, que l'on observe lorsque μ croit, reste invariante d'un système à l'autre.

Par contre, si l'on considère des perturbations générales dans toutes les directions, alors la bifurcation fourche se décompose en une bifurcation plus simple, stable selon toutes perturbations, la bifurcation col-noeud, dont le représentant caractéristique est constitué par la famille $\frac{dx}{dt} = x^2 - \mu$.

L'idée qui consiste à étudier les bifurcations structurellement stables, i.e. persistantes par rapport à des petites perturbations des équations, perturbations admettant ou non certaines symétries imposées par la physique du système, est à la base de la classification des bifurcations en fonction du nombre minimal des paramètres nécessaires à la persistance de la bifurcation. Ce nombre minimal de paramètres est appelé codimension de la bifurcation. Plus une bifurcation est "simple", plus sa codimension est basse. Ainsi, les bifurcations, sans symétrie, de codimension 1 de points d'équilibre sont aux nombres de deux : la bifurcation col-noeud et la bifurcation de Hopf.

Pour les bifurcations de codimension 2, les résultats sont partiels et incomplets car les choses se compliquent notablement, même pour les points d'équilibre d'un système continu. La raison est la suivante. Avec deux paramètres, 2 couples de valeurs propres complexes conjuguées, peuvent traverser en même temps l'axe imaginaire. Cela conduit à une sous-variété centrale de dimension 4 et donc à étudier un système dégénéré dans un espace des phases de dimension 4 avec de nombreuses résonances, i.e. avec de nombreux effets non linéaires irréductibles. De plus, lorsque l'espace des phases est de dimension ≥ 3 , les comportements asymptotiques des trajectoires peuvent devenir très complexes.

2.4.2 Retard à la bifurcation, bifurcation dynamique

Les valeurs de bifurcation des paramètres sont, d'un point de vue physique, des grandeurs importantes. Supposons que, pour le paramètre scalaire $\mu < \mu_0$, le système $\frac{dx}{dt} = v_\mu(x)$ admette un point d'équilibre \bar{x}_μ , dépendant régulièrement de μ et asymptotiquement stable, et que, pour $\mu > \mu_0$, le point d'équilibre \bar{x}_μ soit instable. Savoir à partir de quelle valeur μ_0 du paramètre scalaire μ le point d'équilibre \bar{x}_μ perd sa stabilité est une information utile en pratique. Il semble qu'expérimentalement une telle valeur critique μ_0 soit facile à obtenir. Une expérience simple consiste à faire varier lentement μ jusqu'à ce que le système s'écarte notable du point stationnaire \bar{x}_μ . La valeur μ_0^{exp} ainsi observée doit être une bonne approximation de la vraie valeur de **bifurcation statique** μ_0 . En fait, il n'en est rien. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la courbe intégrale du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x \\ \frac{d\mu}{dt} = \varepsilon \end{cases}$$

($0 < \varepsilon \ll 1$) passant par $x = x_0 \neq 0$ et $\mu = -1$:

$$t \longrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \exp[t(\varepsilon t/2 - 1)] \\ \varepsilon t - 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que l'on repasse par la même valeur x_0 au temps $t = 2/\varepsilon$ pour lequel $\mu = 1$. Ceci signifie qu'expérimentalement (cf. figure 2.11, page 104), tout se passe comme si, même avec une évolution très lente du paramètre μ , la valeur μ_0^{exp} de μ , à partir de laquelle on voit expérimentalement $x(t)$ s'éloigner de 0, reste proche de 1 alors que l'étude de la bifurcation statique ($\varepsilon = 0$) donne $\mu_0 = 0$.

Ce décalage entre μ_0 et μ_0^{exp} , que l'on appelle **retard à la bifurcation**, s'observe de façon analogue pour la bifurcation de Hopf lorsque qu'un point d'équilibre perd sa stabilité au profit d'un cycle limite pour la valeur critique μ_0 : lors d'une augmentation lente du paramètre μ , le système ne se met pas à osciller avec des amplitudes qui croissent lentement au cours du temps, dès que $\mu(t)$ franchit le seuil de bifurcation statique μ_0 ; il existe toute une plage de méta-stabilité, correspondant à $\mu(t) \in [\mu_0, \mu_0^{\text{exp}}]$, pour laquelle, bien que $\mu(t) > \mu_0$, le système reste proche de son point stationnaire ; dès que $\mu(t)$ franchit μ_0^{exp} , il y a apparition brutale d'un régime périodique d'amplitude finie.

Pour obtenir expérimentalement la valeur de bifurcation statique μ_0 , il est donc préférable de procéder différemment. Par exemple, pour une valeur fixée du paramètre μ , on éloigne le système de son point d'équilibre : si le système y revient $\mu < \mu_0$, sinon $\mu > \mu_0$. Ainsi, il est possible d'encadrer μ_0 .

Ce type de situation correspond aux **bifurcations dites dynamiques**, par opposition aux bifurcations classiques, que l'on peut qualifier de statiques et où $\frac{d\mu}{dt} = 0$. La

différence entre bifurcations statiques et dynamiques est principalement la suivante. Si μ varie lentement avec une vitesse constante mais petite ε , on doit étudier les trajectoires du système élargi

$$(\Sigma_\varepsilon) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_\mu(x) \\ \frac{d\mu}{dt} = \varepsilon, \end{cases}$$

alors que les bifurcations statiques sont données par l'étude de

$$(\Sigma_0) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_\mu(x) \\ \frac{d\mu}{dt} = 0. \end{cases}$$

Sur des intervalles de temps **fini**, on peut toujours approximer une trajectoire de Σ_ε par une trajectoire de Σ_0 pour ε suffisamment petit. En revanche, sur des intervalles de temps infinis, ce n'est plus possible : pour que le paramètre μ varie d'une unité avec une vitesse constante ε , il faut un intervalle de temps d'une durée égale à $1/\varepsilon$; comme $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on est forcément obligé de considérer des intervalles de temps non bornés.

2.5 Figures

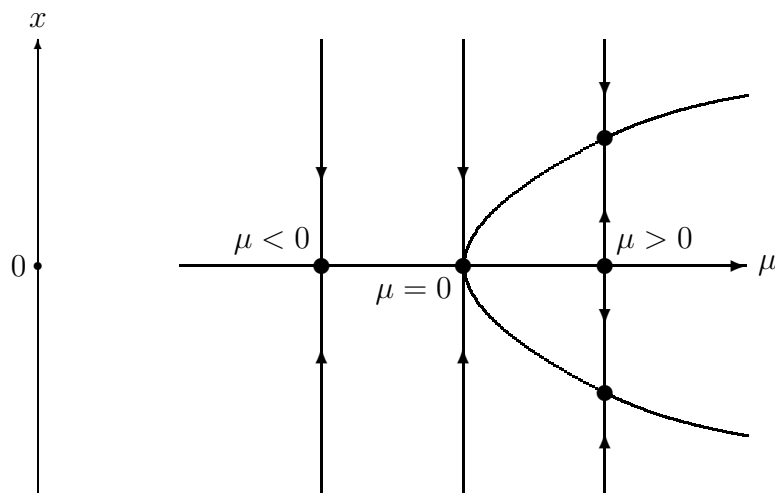


FIG. 2.1 -
diagramme de bifurcation fourche ; $\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3$.

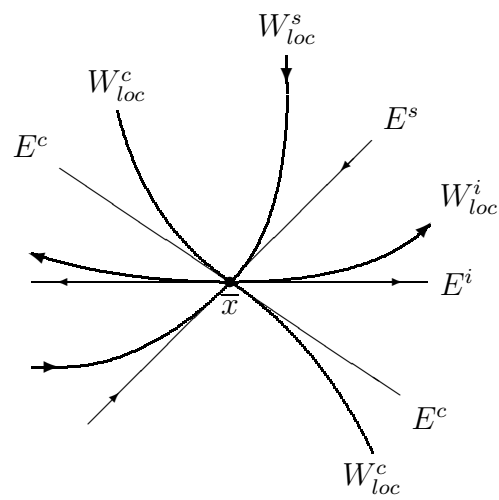
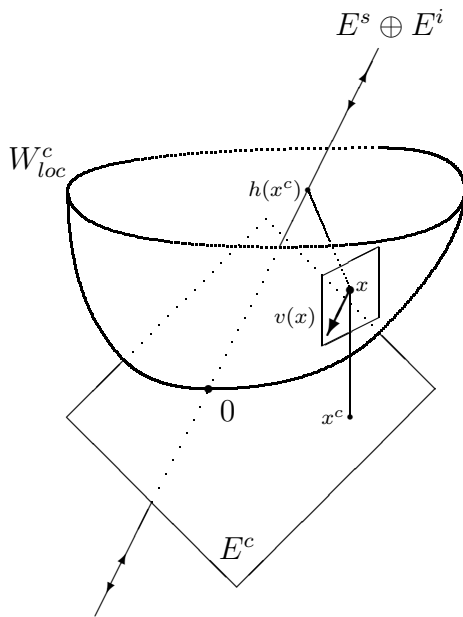


FIG. 2.2 –

les 3 sous-variétés invariantes autour du point d'équilibre \bar{x} ; W_{loc}^s et W_{loc}^i les sous-variétés stable et instable et W_{loc}^c la sous-variété centrale.



W_{loc}^c d'équation $(x^i, x^s) = h(x^c)$ avec :

- 1- $h(0) = 0$ ($0 \in W_{loc}^c$)
- 2- $Dh(0) = 0$ (E^c tangent à W_{loc}^c)
- 3- $v(x)$ tangent à W_{loc}^c .

FIG. 2.3 –

les 3 conditions définissant une sous-variété centrale W_{loc}^c pour le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ de $\frac{dx}{dt} = v(x)$.

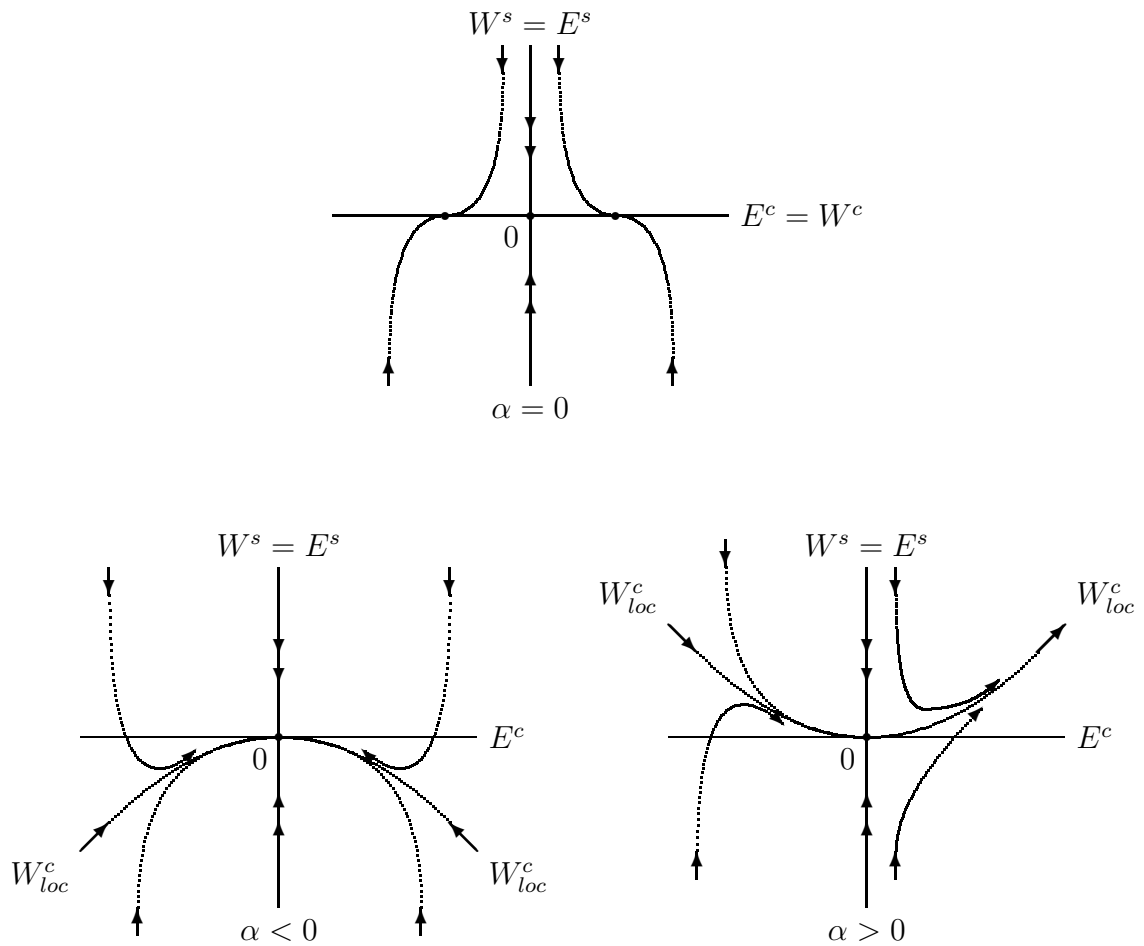


FIG. 2.4 –
 diagramme de bifurcation autour de $\alpha = 0$ du système plan $\frac{dx^c}{dt} = x^c x^s$, $\frac{dx^s}{dt} = -x^s + \alpha(x^c)^2$.

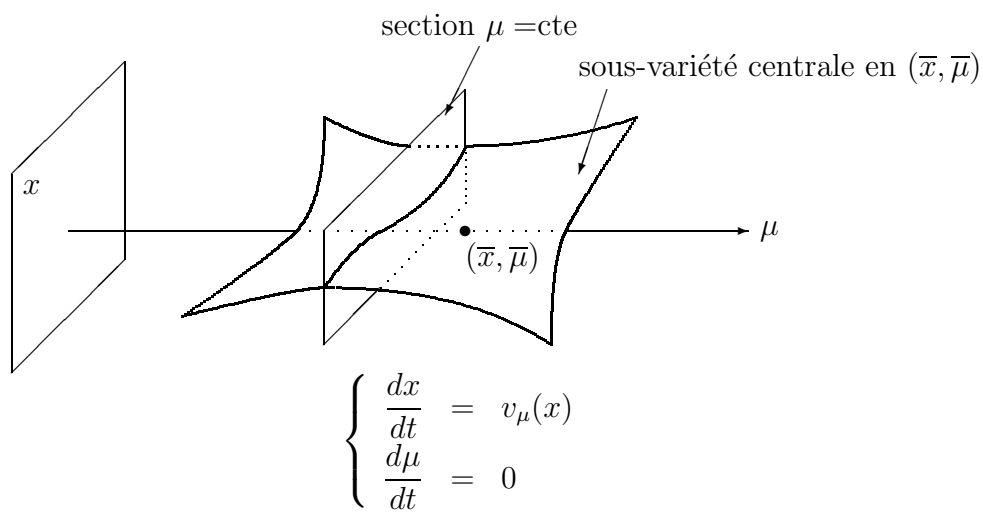


FIG. 2.5 –
la sous-variété centrale dans l'espace étendu, produit cartésien de l'espace des phases x et de l'espace des paramètres μ .

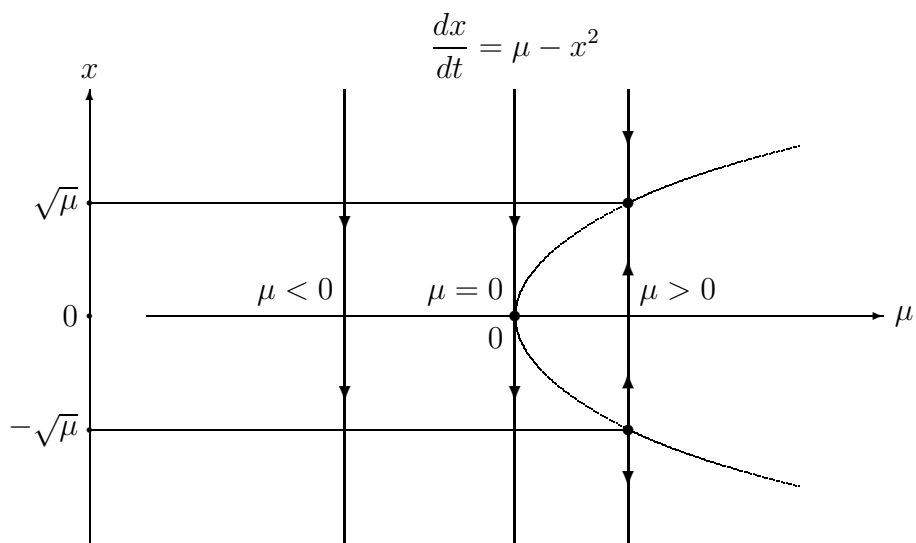


FIG. 2.6 –
 bifurcation col-noeud ; lorsque μ franchit 0, un point d'équilibre stable (noeud)
 et un point d'équilibre instable (col) apparaissent simultanément.

Equations en coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [d\mu + a(x_1^2 + x_2^2)]x_1 - [\omega + c\mu + b(x_1^2 + x_2^2)]x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = [\omega + c\mu + b(x_1^2 + x_2^2)]x_1 + [d\mu + a(x_1^2 + x_2^2)]x_2 \end{cases}$$

Equations en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = (d\mu + ar^2)r \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega + c\mu + br^2 \end{cases}$$

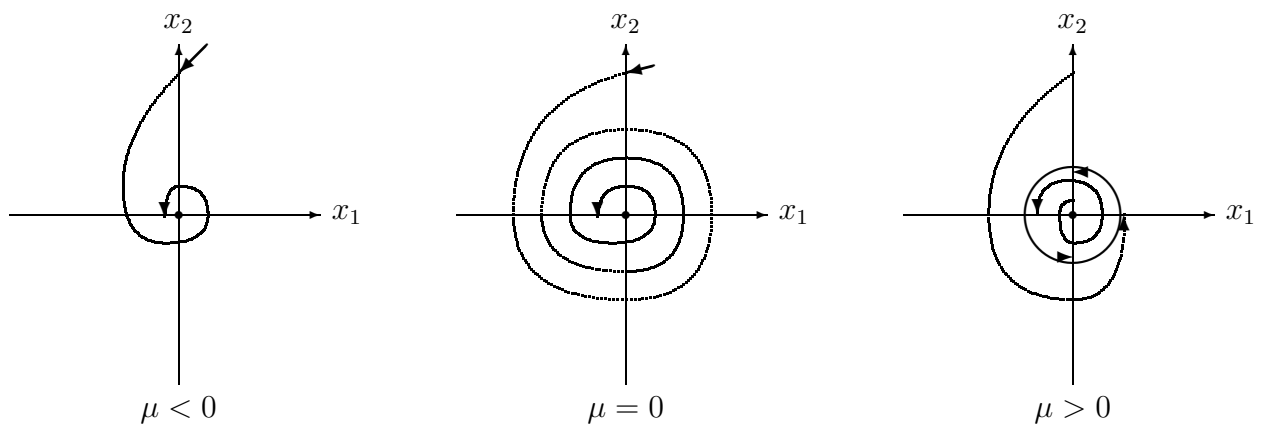


FIG. 2.7 –

bifurcation de Hopf avec $a < 0$, $d > 0$ et $\omega > 0$; lorsque μ franchit 0, le foyer stable perd sa stabilité au profit d'un cycle limite.

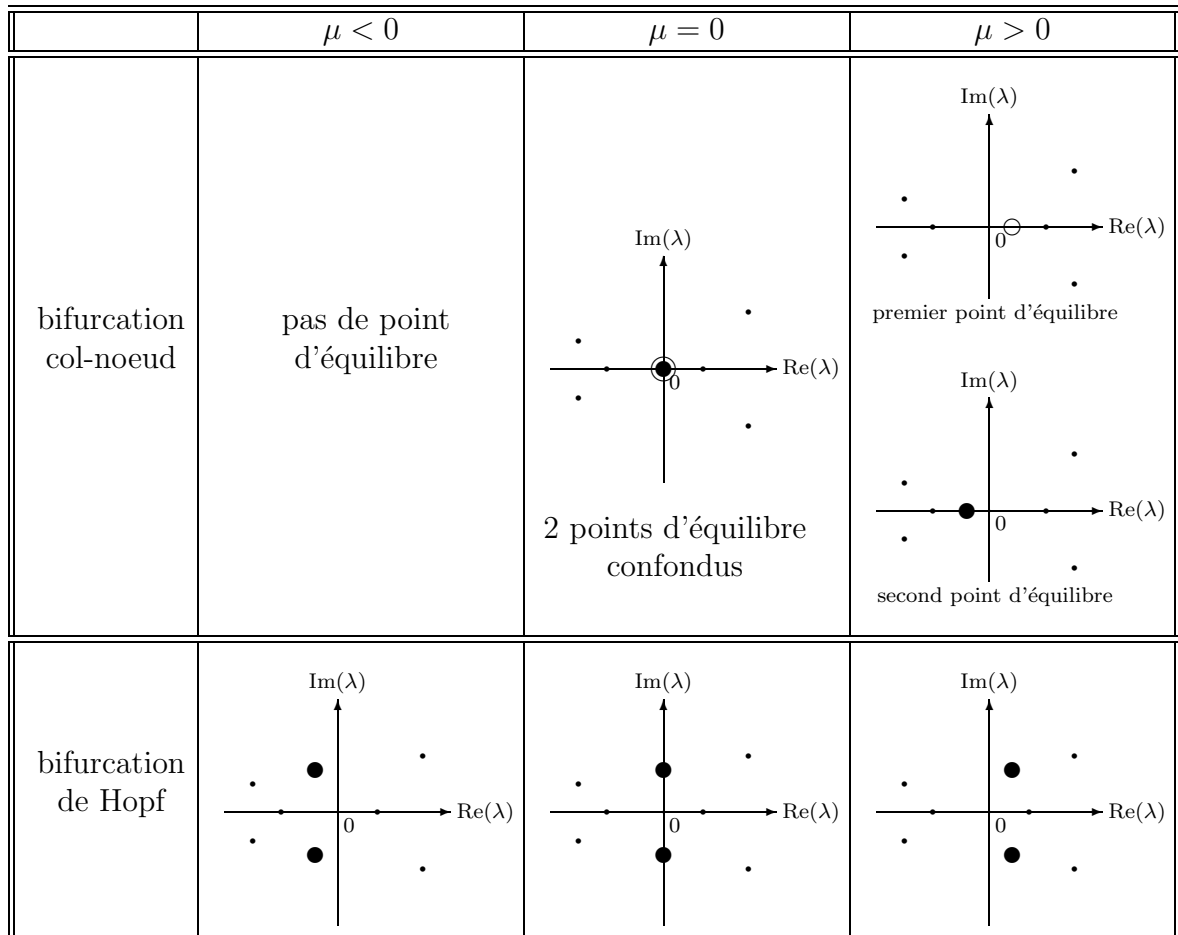


FIG. 2.8 –

exposants caractéristiques des deux bifurcations génériques à un seul paramètre μ de point d'équilibre, bifurcations dites de codimension 1.

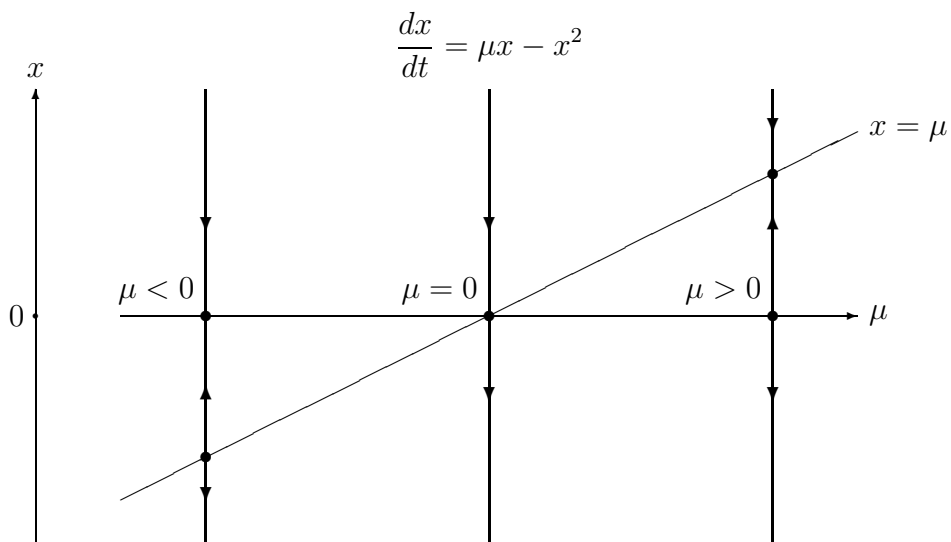


FIG. 2.9 –

bifurcation avec échange de stabilité ; lorsque μ franchit 0, le point stationnaire $x = 0$ perd sa stabilité au profit de l'autre point stationnaire $x = \mu$.

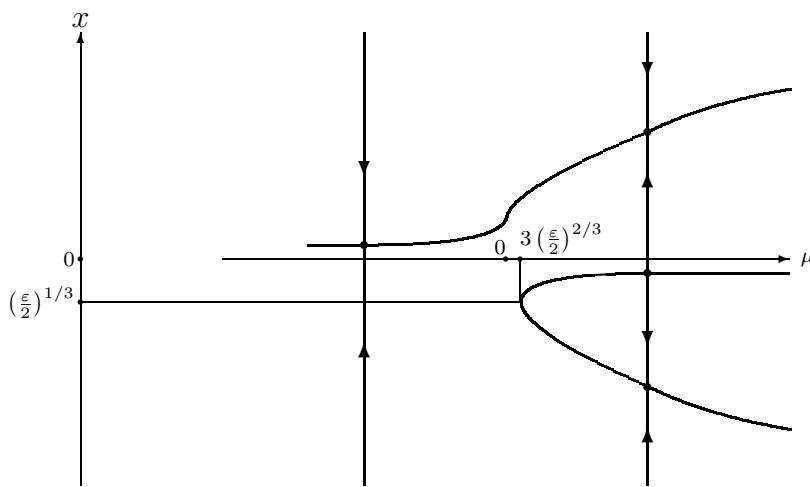


FIG. 2.10 –
 influence d'une perturbation ε non impaire sur le diagramme de bifurcation
 (fourche) de la famille à un paramètre μ : $\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ petit).

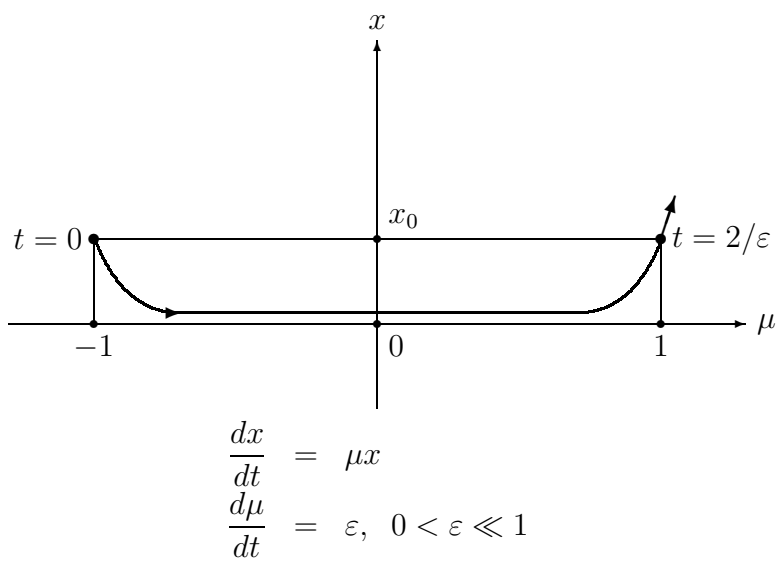


FIG. 2.11 –

retard à la bifurcation lors d'une évolution quasi-statique du paramètre ; bien que le paramètre μ ait dépassé largement le seuil de stabilité 0, l'instabilité ne commence à être visible que pour $\mu \approx 1$.

Chapitre 3

Théorie des perturbations

La théorie des perturbations permet de prendre en compte l'influence de faibles modifications des équations sur le comportement des trajectoires. Plus précisément, cette théorie fournit un ensemble de techniques pour approximer un système perturbé, en éliminant les effets à court terme et en ne conservant que les effets à long terme. Ainsi, la théorie des perturbations constitue un guide précieux pour l'étude d'un système dynamique et de **son approximation par un système de taille plus petite**, c'est à dire pour la construction de modèles réduits qui résument l'essentiel des comportements qualitatifs.

Il s'agit d'éliminer les transitoires rapides et de conserver uniquement les transitoires lents. Classiquement, on distingue deux cas illustrés par la figure 3.1, page 106 :

- les effets rapides se stabilisent très vite et on parle alors de perturbations singulières et d'approximation quasi-statique ;
- les effets rapides ne sont pas asymptotiquement stable mais restent d'amplitude bornée ; ils sont donc oscillants et l'on parle alors de moyennisation.

Bien que ces deux cas puissent être regroupés, au moins théoriquement, en un seul (cf. conclusion de ce chapitre), ils sont traités séparément et font l'objet des deux principales sections de ce chapitre.

On considère les systèmes continus (une analyse similaire peut être conduite pour les systèmes discrets) du type :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \ll 1$ un petit paramètre, F et G des fonctions régulières. x correspondra, en général, aux variables dont l'évolution est a priori lente (variation significative sur une durée de l'ordre $1/\varepsilon$) et y aux variables dont l'évolution est a priori rapide (variation significative sur une durée de l'ordre de 1). $t \approx 1$ correspond à l'échelle de temps rapide et $t \approx 1/\varepsilon$ à l'échelle de temps lente.

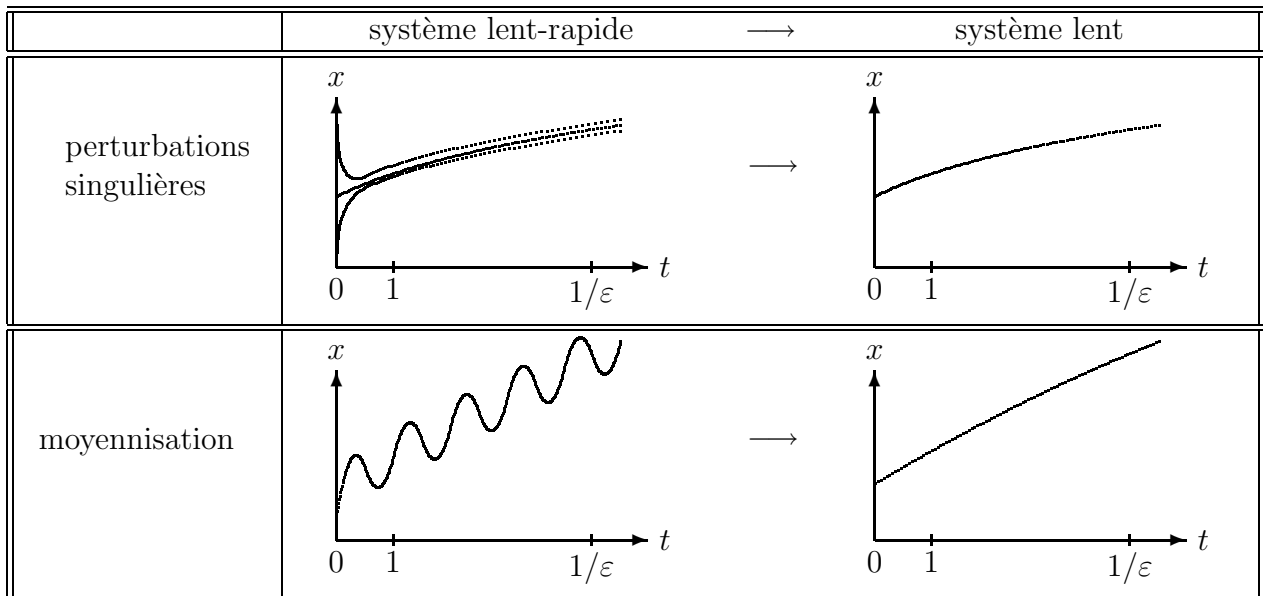


FIG. 3.1 –

La théorie des perturbations consiste à éliminer les effets à court terme, $t \sim 1$, qu'ils soient asymptotiquement stables ou oscillants, afin de ne conserver que les effets à long terme, $t \sim 1/\varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$).

3.1 Les perturbations singulières

On suppose ici que les effets rapides sont asymptotiquement stables. Comme exemple caractéristique citons la cinétique chimique où les constantes de vitesses de certaines réactions peuvent être nettement plus grandes que d'autres (réactions limitantes et réactions quasi-instantanées).

3.1.1 Approximation sur des temps $t \sim 1/\varepsilon$

On a le premier résultat général suivant (démonstration dans [16])

Théorème 17 [Tikhonov] *Soit le système (3.1). Supposons que*

H1 $F(x, y, \varepsilon) = \varepsilon f(x, y, \varepsilon)$ avec f régulière ;

H2 l'équation $G(x, y, 0) = 0$ admet une solution, $y = \bar{h}(x)$, avec \bar{h} fonction régulière de x et

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, \bar{h}(x), 0)$$

est une matrice dont toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative ;

H3 le système réduit

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(x, \bar{h}(x), 0) \\ x_{(\tau=0)} = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $\tau = \varepsilon t$ admet une solution $x^0(\tau)$ pour $\tau \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Alors, pour ε suffisamment proche de 0, le système complet

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(x, y, \varepsilon) & x(0) = x_0 \\ \varepsilon \frac{dy}{d\tau} = G(x, y, \varepsilon) & y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une solution $(x^\varepsilon(\tau), y^\varepsilon(\tau))$ sur $[0, T]$ dès que y_0 appartient au bassin d'attraction du point d'équilibre $\bar{h}(x_0)$ du sous système rapide

$$\frac{d\ddagger}{dt} = G(x_0, \ddagger, 0).$$

De plus on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x^\varepsilon(t) = x^0(t) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y^\varepsilon(t) = y^0(t)$$

uniformément en temps sur tout intervalle fermé contenu dans $[0, T]$ et ne contenant par 0.

L'hypothèse **H1** traduit le fait que x est une variable lente et que y est une variable rapide :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y, \varepsilon) \ll \frac{dy}{dt} = G(x, y, \varepsilon).$$

L'hypothèse **H2** signifie que, à x fixé, la dynamique de \ddagger

$$\frac{d\ddagger}{dt} = G(x, \ddagger, 0).$$

est asymptotiquement stable autour du point d'équilibre $\bar{\ddagger} = h(x)$. La conclusion du théorème signifie que, pour ε petit, les trajectoires du système complet, dit lent-rapide,

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dy}{d\tau} = G(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

sont proches de celles du système réduit obtenu en faisant $\varepsilon = 0$ (sous-système lent),

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(x, y, 0) \\ 0 = G(x, y, 0). \end{cases}$$

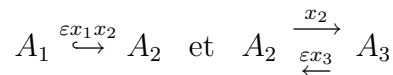
Cependant, sans hypothèses supplémentaires, cette approximation n'est valable, en général, que sur des intervalles de temps rapides t de longueur T/ε , i.e sur **des intervalles de temps lents τ de longueur bornée T** . L'hypothèse supplémentaire, qu'il convient alors d'utiliser pour avoir une bonne approximation pour tous les temps positifs, concerne le comportement asymptotique du système réduit : si ce dernier admet un point d'équilibre hyperbolique et asymptotiquement stable, l'approximation est alors valable pour tous les temps positifs, pourvu que les conditions initiales soient proches de cet équilibre (cf. les résultats qui suivent).

Ainsi, dans de nombreux cas, l'approximation obtenue peut être prolongée sans perte de précision pour les temps positifs quelconques. Cependant, pour certains systèmes, comme celui considéré ci-dessous, un tel prolongement n'est pas possible, bien que le système comporte, de manière évidente physiquement, deux échelles de temps très distinctes.

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\varepsilon x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \varepsilon x_1 x_2 - x_2 + \varepsilon x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 - \varepsilon x_3 \end{cases} \quad (3.3)$$

correspondant à un réacteur parfaitement agité fermé où les réactions chimiques suivantes apparaissent :



(x_i est la concentration de l'espèce chimique A_i , $i = 1, 2, 3$). En introduisant $\sigma = x_1 + x_2 + x_3$, on se ramène à la forme standard du théorème de Tikhonov en posant $x = (x_1, \sigma)$, $y = x_2$,

$$f(x, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(x, y, \varepsilon) = \varepsilon(x_1 x_2 + \sigma - x_1 - x_2) - x_2.$$

On vérifie aisément que toutes les conditions d'application du théorème de Tikhonov sont remplies. Le sous-système lent est alors :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

Il est assez facile de montrer que, pour le système complet (3.3), si $\varepsilon > 0$ et si $x_1(t=0) > 0$, $x_2(t=0) > 0$ et $x_3(t=0) \geq 0$, alors $x_1(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. L'approximation par le sous-système lent est donc insuffisante. Cette approximation est valable pour $t \leq 1/\varepsilon$. Mais, dès que le temps t dépasse largement $1/\varepsilon$, elle devient très mauvaise.

3.1.2 Approximation sur des temps t non bornés

Ce genre de difficulté peut être évité si l'on utilise une variante de la méthode de la sous-variété centrale (cf. chapitre 2). Dans [5] sont démontrés les deux résultats suivants.

Théorème 18 [sous-variété lente pour les perturbations singulières] *Supposons que le système (3.1) s'écrive de la manière suivante*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + \varepsilon f(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy}{dt} &= By + \varepsilon g(x, y, \varepsilon)\end{aligned}$$

où A est une matrice dont toutes les valeurs propres sont sur l'axe imaginaire et B est une matrice dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle non nulle.

Pour tout $M > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $\varepsilon \in [0, \delta]$, le système admet, pour $\|x\| \leq M$, une sous-variété invariante d'équation $y = h(x, \varepsilon)$ avec $h(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$. Le sous-système lent (sous-système central) est alors

$$\frac{du}{dt} = Au + \varepsilon f(u, h(u, \varepsilon), \varepsilon).$$

Si B est stable et si, pour ε fixé petit, le sous-système lent admet un point d'équilibre \bar{u}_ε stable (resp. asymptotiquement stable, instable), alors le point d'équilibre $(\bar{u}_\varepsilon, h(\bar{u}_\varepsilon, \varepsilon))$ du système complet est stable (resp. asymptotiquement stable, instable).

Si B est stable et si, pour $\varepsilon > 0$ fixé petit, le sous-système lent admet un point d'équilibre \bar{u}_ε stable alors, pour toutes les trajectoires $(x(t), y(t))$ du système complet, dont la condition initiale est suffisamment proche du point d'équilibre $(\bar{x}_\varepsilon, h(\bar{x}_\varepsilon, \varepsilon))$, il existe une trajectoire $u(t)$ du système réduit telle que, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\begin{cases} x(t) &= u(t) + O(\exp(-\gamma t)) \\ y(t) &= h(u(t), \varepsilon) + O(\exp(-\gamma t)) \end{cases}$$

avec $\gamma > 0$, une constante ne dépendant que de B .

Théorème 19 [approximation de la sous-variété lente] *Les hypothèses et les notations sont les mêmes que celles du théorème précédent. Si, pour p entier > 1 , une fonction $\phi(x, \varepsilon)$ est telle que $\phi(0, 0) = 0$ et*

$$D_x \phi(x, \varepsilon)[Ax + \varepsilon f(x, \phi(x, \varepsilon), \varepsilon)] - B\phi(x, \varepsilon) - \varepsilon g(x, \phi(x, \varepsilon), \varepsilon) = O(\varepsilon^p)$$

pour $\|x\| \leq M$, alors, pour $\|x\| \leq M$,

$$h(x, \varepsilon) = \phi(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^p).$$

3.1.3 Méthode d'approximation de la sous-variété invariante lente

En fait, tout revient à approximer correctement la sous-variété invariante $y = h(x, \varepsilon)$. Pour cela, il suffit de retenir la méthode¹ d'approximation suivante pour les systèmes (3.1) satisfaisant les hypothèses du théorème de Tikhonov, à savoir les systèmes de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

avec $g(x, \bar{h}(x), 0) = 0$, \bar{h} régulière et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, \bar{h}(x), 0)$ ayant toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative.

On cherche l'équation $y = h(x, \varepsilon)$ d'une sous-variété invariante (sous-variété dite lente) sous la forme d'une série en ε :

$$h(x, \varepsilon) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x) + \dots$$

La condition d'invariance implique que

$$\varepsilon D_x h(x, \varepsilon) f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) = g(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon).$$

Il suffit alors de substituer $h(x, \varepsilon)$ par son développement en puissance de ε et d'identifier les termes de même puissance (cf. théorème 19). On en déduit $h_0 = \bar{h}$. Les termes d'ordre supérieur, $h_1(x)$, $h_2(x)$, \dots , s'obtiennent alors de manière explicite les uns après les autres. Le sous-système lent est alors donné, pour $0 \leq \varepsilon \ll 1$, par

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon)$$

Il correspond à la restriction du flot du système complet à la sous-variété invariante $y = h(x, \varepsilon)$.

Ainsi, l'approximation du théorème de Tikhonov est d'ordre 1 en ε et néglige des termes d'ordre 2. C'est pourquoi elle n'est valable, en général, que pour des durées de l'ordre de $1/\varepsilon$ en échelle de temps rapide. Une approximation d'ordre 1 de la sous-variété invariante lente, $y = h_0(x) + \varepsilon h_1(x)$ fournit une approximation d'ordre 2 en ε du sous-système lent, valable, a priori, pour $t \approx 1/\varepsilon^2 \gg 1/\varepsilon$.

Revenons à l'exemple du réacteur et au système (3.3), pour lequel l'approximation d'ordre 1 issue du théorème de Tikhonov n'est pas satisfaisante. Clairement $\bar{h} = h_0 = 0$ dans ce cas. Il faut calculer h_1 . On a

$$\varepsilon D h_1(x_1, \sigma) - \varepsilon x_1 \varepsilon h_1(x_1, \sigma) + O(\varepsilon^4) = \varepsilon x_1 \varepsilon h_1(x_1, \sigma) - \varepsilon h_1(x_1, \sigma) + \varepsilon(\sigma - x_1 - \varepsilon h_1(x_1, \varepsilon)) + O(\varepsilon^2).$$

¹Comme l'énoncent les deux théorèmes précédents, cette méthode est rigoureusement justifiée, si l'on se situe autour d'un point d'équilibre.

Ce qui implique que $h_1(x) = \sigma - x_1$. Ainsi le sous-système lent, qui capte réellement la dynamique lente sur des intervalles de temps infinis, est donc

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\varepsilon^2 x_1(\sigma - x_1) \\ \frac{d\sigma}{dt} = 0. \end{cases}$$

3.2 Moyennisation

On suppose ici que les effets rapides ont un caractère oscillant. La méthode de moyennisation a été utilisée en mécanique céleste depuis longtemps pour déterminer l'évolution des orbites planétaires sous l'influence des perturbations mutuelles entre les planètes et étudier la stabilité du système solaire. Gauss en donne la définition suivante qui est des plus intuitives : il convient de répartir la masse de chaque planète le long de son orbite proportionnellement au temps passé dans chaque partie de l'orbite et de remplacer l'attraction des planètes par celle des anneaux de matière ainsi définis.

Dans ce cadre, les équations non perturbées du mouvement de la terre sont celles qui ne prennent en compte que la force d'attraction due au soleil. L'orbite de la terre est alors une ellipse dont le soleil est l'un des foyers. Les équations perturbées sont celles où l'on rajoute les forces d'attraction entre la terre et les autres planètes en supposant que ces dernières décrivent toutes des orbites elliptiques selon les lois de Kepler. Le paramètre ε correspond au rapport de la masse du soleil à celles des planètes : $\varepsilon \approx 1/1000$. L'échelle de temps rapide est de l'ordre d'une période de révolution, quelques années. L'échelle de temps lente est de l'ordre de quelques millénaires. La question est alors de savoir si ces petites perturbations d'ordre ε peuvent entraîner à terme, i.e. à l'échelle du millénaire, une dérive systématique des longueurs du grand axe et du petit axe de la trajectoire de la terre, ce qui aurait des conséquences catastrophiques pour le climat. En fait, les calculs (moyennisation) montrent qu'il n'en est rien. En revanche, l'excentricité des orbites oscillent lentement. Ces oscillations sont probablement à l'origine des périodes glaciaires.

Revenons au système (3.1). Le régime oscillatoire le plus simple pour y est le régime périodique. Bien que la méthode de moyennisation repose en fait sur une idée très générale (cf. conclusion), nous nous restreignons au cas où la partie rapide y est périodique : plus précisément, nous énonçons les résultats lorsque y est une fonction périodique de période T , c'est à dire

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 & = G_1(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy_2}{dt} = -\left[\frac{2\pi}{T}\right]^2 y_1 & = G_2(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

On suppose aussi que $F(x, y(t), \varepsilon) = \varepsilon f(x, t, \varepsilon)$ avec f régulière dépendant de t de façon

périodique (période T). Le système perturbé s'écrit alors

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1. \quad (3.4)$$

Le système moyennisé (ou système lent) est alors

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(u, t, 0) dt \stackrel{\text{d'éf}}{=} \varepsilon \bar{f}(u). \quad (3.5)$$

Dans [7] le théorème suivant est démontré.

Théorème 20 [moyennisation à une fréquence] *Considérons le système perturbé (3.4) avec f régulière. Il existe un changement de variables, $x = u + \varepsilon w(u, t)$ avec w de période T en t , tel que (3.4) devienne*

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon \bar{f}(u) + \varepsilon^2 f_1(u, t, \varepsilon)$$

avec \bar{f} définie par (3.5) et f_1 régulière de période T en t . De plus,

- (i) *si $x(t)$ et $u(t)$ sont, respectivement, solutions de (3.4) et (3.5) avec comme conditions initiales x_0 et u_0 telles que $\|x_0 - u_0\| = O(\varepsilon)$, alors $\|x(t) - u(t)\| = O(\varepsilon)$ sur un intervalle de temps de l'ordre de $1/\varepsilon$.*
- (ii) *Si \bar{u} est un point fixe hyperbolique du système moyenné (3.5), alors il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}]$, le système perturbé (3.4) admette une unique orbite périodique hyperbolique $\gamma_\varepsilon(t)$, proche de \bar{u} , $\gamma_\varepsilon(t) = \bar{u} + O(\varepsilon)$, qui peut être réduite à un point, et dont la stabilité est du même type que celle de \bar{u} .² En particulier, si \bar{u} est asymptotiquement stable, alors γ_ε est aussi asymptotiquement stable et l'approximation, à $O(\varepsilon)$ près, des trajectoires du système perturbé (3.4) par celles du système moyenné (3.5) devient valable pour $t \in [0, +\infty[$.*

Le point (i) signifie que sur $[0, 1/\varepsilon[$, les trajectoires de (3.4) sont proches de celles de (3.5). Le point (ii) peut se généraliser à d'autres ensembles invariants hyperbolique du système moyenné (3.5). Par exemple, à une orbite périodique hyperbolique pour le système moyenné correspond un tore invariant hyperbolique pour le système perturbé. (ii) fait le lien entre le portrait de phase du système moyenné autour d'un point fixe hyperbolique \bar{u} et le portrait de phase du système perturbé autour de γ_ε .

Il est instructif de voir comment on construit le changement de coordonnées $x = u + \varepsilon w(u, t)$ qui consiste à enlever à x des termes oscillants d'ordre ε (w de période T en t). On a, d'une part,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial u}(u, t) \frac{du}{dt} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}(u, t)$$

²Le nombre des multiplicateurs caractéristiques de γ_ε de module strictement inférieur (resp. supérieur) à 1 est égal au nombre d'exposants caractéristiques de \bar{u} à partie réelle strictement inférieure (resp. supérieure) à 0.

et, d'autre part,

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(u + \varepsilon w(u, t), t, \varepsilon).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \varepsilon \left(I + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial u}(u, t) \right)^{-1} \left[f(u + \varepsilon w(u, t), t, \varepsilon) - \frac{\partial w}{\partial t}(u, t) \right] \\ &= \varepsilon \left[f(u, t, 0) - \frac{\partial w}{\partial t}(u, t) \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Comme la dépendance en t de w est périodique et de période T , il n'est pas possible d'annuler complètement le terme d'ordre 1 en ε car il n'y a aucune raison pour que la fonction définie par

$$\int_0^t f(u, s, 0) ds$$

soit T périodique en temps. En revanche, on peut éliminer la dépendance en temps du terme d'ordre 1 en ε . Il suffit de poser

$$w(u, t) = \int_0^t (f(u, s, 0) - \bar{f}(u)) ds$$

(noter que w est bien de période T en t) pour obtenir

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon \bar{f}(u) + O(\varepsilon^2).$$

Si cette approximation n'est pas suffisante, il faut prendre en compte les termes d'ordre 2 et éliminer leur dépendance en temps par un changement de variable du type $x = u + \varepsilon w_1(u, t) + \varepsilon^2 w_2(u, t)$ avec w_1 et w_2 de période T en t .

Terminons cette section par un exemple, l'équation du second ordre suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta + \varepsilon(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{dt}$$

C'est l'équation d'un pendule pour lequel on a rajouté un petit frottement positif pour les grandes amplitudes ($\theta > 1$) et négatif pour les petites ($\theta < 1$). Mettons d'abord ce système sous la forme standard

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon).$$

Le terme oscillant vient du système non perturbé

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta$$

dont les orbites sont des cercles dans le plan des phases $(\theta, \dot{\theta})$. Les phénomènes lents (échelle de temps $1/\varepsilon$) sont clairement relatifs aux rayons de ces cercles (i.e. les amplitudes des oscillations). C'est pourquoi il convient de passer en coordonnées polaires en posant $\theta = r \cos(\psi)$ et $\dot{\theta} = r \sin(\psi)$. Dans ces coordonnées, le système perturbé s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon[1 - r^2 \cos^2(\psi)] \sin^2(\psi) \\ \frac{d\psi}{dt} = -1 + \varepsilon \sin(\psi) \cos(\psi)[1 - r^2 \cos^2(\psi)]. \end{cases}$$

ψ est quasiment égal, à une constante près, au temps $-t$. On peut écrire

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\psi}.$$

Ainsi, on se ramène à la forme standard en prenant ψ comme variable de temps :

$$\frac{dr}{d\psi} = \varepsilon \frac{[1 - r^2 \cos^2(\psi)] \sin^2(\psi)}{-1 + \varepsilon \sin(\psi) \cos(\psi)[1 - r^2 \cos^2(\psi)]} = \varepsilon f(r, \psi, \varepsilon).$$

Le système moyennisé est alors

$$\frac{du}{d\psi} = -\frac{\varepsilon}{8} u(4 - u^2).$$

$\bar{u} = 2$ est un point d'équilibre hyperbolique attracteur pour $\psi \rightarrow -\infty$, i.e. $t \rightarrow +\infty$. Donc pour ε suffisamment petit, l'équation perturbée possède un cycle limite hyperbolique attracteur donc l'équation, dans le plan des phases $(\theta, \dot{\theta})$, est approximativement $\theta^2 + \dot{\theta}^2 = 4 + O(\varepsilon)$.

3.3 Conclusion

L'inconvénient principal de la théorie des perturbations est qu'il faut, dès le départ, avoir une idée assez précise de ce que l'on cherche : il convient de trouver un petit paramètre ε et d'isoler la partie rapide du système. A ce niveau l'intuition physique joue un rôle important.

Nous avons vu comment construire une approximation lente,

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon \bar{f}(u, \varepsilon),$$

d'un système du type

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

lorsque, à x fixé, le sous-système rapide,

$$\frac{d\ddagger}{dt} = g(x, \ddagger, 0),$$

admet, soit un point fixe hyperbolique attracteur $\bar{h}(x)$ (perturbation singulière), soit une orbite périodique attractrice γ_x (moyennisation).

Les deux cas précédents sont, en fait, des cas particuliers d'une méthode générale qui permet de construire des approximations d'un système lent-rapide, où les effets rapides convergent (de façon exponentielle) vers un régime asymptotique caractérisé par une mesure sur l'espace des y , invariante par rapport au sous-système rapide et qui dépend de x (cf. conclusion du chapitre 1 sur la théorie ergodique des systèmes dynamiques). Si on note $d\mu_x$ cette mesure alors, une première approximation sur des échelles de temps $t \gg 1$ est donnée par :

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon \int_y f(u, y, 0) d\mu_u(y).$$

Pour les perturbations singulières, on a $d\mu_x(y) = \delta(y - \bar{h}(x))$ et on retrouve ainsi l'approximation du théorème de Tikhonov (δ est la distribution de Dirac). Pour la moyennisation, $d\mu_x$ est la mesure de support γ_x et de densité linéique

$$m(s) = \frac{1}{T_x \|g(x, y(s), 0)\|}$$

où s est l'abscisse curviligne sur γ_x et T_x la période de γ_x . Si $y_x(t)$ est un paramétrage en temps de γ_x alors on retrouve bien l'approximation du théorème de moyennisation :

$$\int_y f(u, y, 0) d\mu_u(y) = \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} f(u, y_u(t), 0) dt.$$

Chapitre 4

Attracteurs étranges et chaos déterministe

Contrairement aux chapitres précédents, ce chapitre est construit autour d'un exemple précis et historique : les équations de Lorenz. A l'origine, en 1963, Lorenz [10] avait comme objectif la mise sur pied d'une description, même approximative, du comportement de l'atmosphère terrestre lui permettant de faire des calculs sur les ordinateurs très peu puissants de l'époque. Bien que les 3 équations différentielles ordinaires du modèle de Lorenz,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = s(-x_1 + x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -bx_3 + x_1x_2, \end{cases}$$

soient très simples, leurs solutions admettent, pour certaines valeurs des paramètres s , r et b , des comportements très irréguliers. En particulier, les premières simulations de Lorenz, pour $s = 10$, $r = 28$ et $b = 8/3$, l'ont conduit à répondre par la négative à la question concernant la possibilité de prédire le temps sur des durées de l'ordre du mois ou de l'année. Cette impossibilité est fondamentalement due à une très grande sensibilité aux conditions initiales des solutions.

Nous commençons par rappeler le problème physique de départ, les instabilités convectives de Rayleigh-Bénard, les équations aux dérivées partielles qui les modélisent, et la construction du modèle réduit de Lorenz. Ensuite, nous énonçons quelques résultats sur les équations de Lorenz en nous appuyant sur les résultats des chapitres précédents. Enfin, nous introduisons les principales notions (fer à cheval de Smale, dynamique symbolique, attracteurs étranges, mesure asymptotique, exposants de Liapounov) qui permettent de comprendre, d'analyser et de décrire, même partiellement, le caractère fortement irrégulier et instable des trajectoires d'un système déterministe chaotique comme celui de Lorenz.

Etant donné qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de définition et, par voie de conséquence,

de théorie satisfaisante du chaos, ce chapitre soulève nettement plus de questions qu'il n'apporte de réponses. Son seul mérite est, peut-être, de faire prendre conscience qu'en fait, l'étude d'un système dynamique ne s'arrête pas à l'écriture de ses équations d'évolution. Ces dernières, comme le montrent les équations de Lorenz, peuvent contenir en elles-mêmes des phénomènes faciles à observer en simulation, mais très partiellement compris et analysés. Il ne faut pas confondre la connaissance de la forme analytique des équations avec celle des comportements qualitatifs qu'elles renferment. La simplicité, tout comme la complexité, des expressions analytiques d'un modèle n'ont rien à voir avec la simplicité ou la complexité de ses solutions.

Les figures sont rassemblées dans une section spéciale à la fin du chapitre.

4.1 Instabilités thermo-convectives de Rayleigh-Bénard

Le principal phénomène pris en compte par Lorenz [10] est relatif aux instabilités thermo-convectives mises en évidence expérimentalement par Bénard au début du siècle, et étudiées peu après par Lord Rayleigh. La situation physique est schématiquement la suivante (cf. figure 4.1, page 137) : une couche de fluide, incompressible et d'épaisseur d , est chauffée par le dessous et refroidie par le dessus. On suppose que les échanges thermiques entre le fluide et les deux plaques (plans $z = -d/2$ et $z = d/2$) sont de très bonne qualité. La plaque supérieure $z = d/2$ est maintenue à une température T_0 . La plaque inférieure maintenue à une température $T_0 + \Delta T$ avec $\Delta T > 0$, le gradient thermique, réglable comme on veut. C'est le principal paramètre de contrôle du système.

Pour ΔT suffisamment faible, les effets visqueux à l'intérieur du fluide font que ce dernier reste au repos et se comporte comme un corps solide homogène soumis à un gradient thermique. Le profil de température \bar{T} à l'intérieur du fluide est alors linéaire :

$$\bar{T} = \bar{T}(z) = T_0 - \Delta T(z - d/2)/d.$$

Lorsque ΔT augmente, le régime précédent (dit de conduction pure et qui est toujours solution des équations aux dérivées partielles régissant l'évolution du système) perd sa stabilité au profit d'un autre régime indépendant du temps où des effets convectifs sont présents. Comme l'illustre la figure 4.2, page 138, le gradient thermique est assez fort pour permettre aux éléments de la partie supérieure du fluide, froids et denses, de descendre, et aux éléments de la partie inférieure du fluide, chauds et légers, de monter par la poussée d'Archimède. On voit alors apparaître des rouleaux convectifs schématisés sur la figure 4.2, page 138, qui favorisent le transfert thermique entre les deux plaques. Si ΔT n'est pas trop grand, le régime reste permanent, au sens où les champs de vitesse et de température à l'intérieur du fluide sont indépendants du temps.

Pour des valeurs encore plus élevées de ΔT , ces rouleaux convectifs perdent leur stabilité et les champs de vitesse et de température deviennent des fonctions du temps. Pour des valeurs suffisamment importantes de ΔT , cette dépendance n'est ni périodique, ni,

vraisemblablement, pseudo-périodique même avec un nombre élevé de fréquences ¹.

Les équations (mécanique des fluides) qui décrivent le comportement du système sont connues depuis le 19^{ème} siècle. Dans l'approximation de Boussinesq, les équations adimensionnelles décrivant le transport couplé de la quantité de mouvement et de la chaleur sont les suivantes [?] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = P_r \left[-\nabla p + \theta \vec{k} + \Delta \vec{v} \right] \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta = R_a \vec{v} \cdot \vec{k} + \Delta \theta \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où

- $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ est la vitesse d'un élément de fluide ;
- $\theta = \theta(x, y, z, t)$ est l'écart de température par rapport au profil statique ; $\theta = T - \bar{T}$ avec T la température d'un élément de fluide et $\bar{T} = \bar{T}(z) = T_0 - \Delta T(z - d/2)/d$;
- ∇ désigne l'opérateur de dérivation spatiale, $\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$;
- Δ le laplacien (scalaire ou vectoriel) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;
- $P_r = \nu/D_T$ est le nombre de Prandtl (ν est la viscosité cinématique et D_T le coefficient de diffusion thermique) ;
- $R_a = \frac{\rho_0 g \alpha d^3}{\eta D_T} \Delta T$ est le nombre de Rayleigh (ρ_0 densité moyenne du fluide, α coefficient de dilatation volumique, $\eta = \rho_0 \nu$ viscosité dynamique, g accélération de la pesanteur) ;

4.2 Du modèle complet au modèle de Lorenz

Formellement les équations aux dérivées partielles (4.1) s'écrivent

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \mathcal{V}(\mathcal{X})$$

où

- l'état $\mathcal{X}(t) = (\vec{v}(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$ appartient à un espace de dimension infinie, le produit cartésien de l'ensemble des champs de vitesse, nuls en $z = \pm d/2$ et de divergence nulle pour $-d/2 < z < d/2$, par l'ensemble des champs d'écart de température, nuls en $z = \pm d/2$;

¹On dit qu'un mouvement est pseudo-périodique si sa dépendance en temps est de la forme $f(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$ avec f fonction 2π périodique de ses arguments. $\omega_1, \dots, \omega_n$ sont alors les n pulsations.

– la vitesse d'évolution de l'état \mathcal{X} est donnée par le champ de vecteur \mathcal{V} défini par

$$\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{V}(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} P_r \left[-\nabla p + \theta \vec{k} + \Delta \vec{v} \right] - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \\ R_a \vec{v} \cdot \vec{k} + \Delta \theta - \vec{v} \cdot \nabla \theta \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un système dynamique dont l'espace des phases est de dimension infinie.

Les équations de Lorenz constituent une approximation très grossière de ce système dynamique par un système de dimension 3. La méthode utilisée par Lorenz porte le nom de méthode de Galerkin. Elle consiste à décomposer l'état \mathcal{X} selon une base hilbertienne, à calculer les coordonnées, selon cette base hilbertienne, du champ de vecteurs \mathcal{V} , et à ne considérer que les premières coordonnées (projection orthogonale sur un espace de dimension finie). Reste le problème du choix de la base hilbertienne et du nombre de termes retenus (i.e. de la dimension de l'approximation).

Cette méthode, accompagnée d'un bon sens physique, conduit à des résultats intéressants comme le montre ce qui suit. Voyons comment Lorenz a établi son modèle réduit. La simplification qui vient en premier lieu à l'esprit consiste à envisager un profil de vitesse \vec{v} colinéaire à celui correspondant aux rouleaux d'axes parallèles à Oy qui prennent naissance juste après l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Comme le montre la figure 4.3, page 139, \vec{v} est alors parallèle au plan Oxz et sa dépendance par rapport à x est $2l$ périodique, où l est la largeur d'un rouleau (sa hauteur est d). De plus \vec{v} doit, au moins, être tangent aux deux plans $z = \pm d/2$. Enfin la condition d'incompressibilité du fluide impose à \vec{v} d'être de divergence nulle ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$).

Compte tenu de tout ce qui précède, une expression simple de $\vec{v} = u\vec{i} + w\vec{k}$ en fonction de x et z est la suivante :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = \frac{\pi}{d} A_1(t) \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) \\ w(x, z, t) = \frac{\pi}{l} A_1(t) \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right) \end{cases} \quad (4.2)$$

avec $A_1(t)$ une fonction du temps à déterminer de façon à vérifier au mieux les équations aux dérivées partielles (4.1). De la même façon, il reste à approximer la dépendance de θ en fonction de x , z et t . Comme $\theta = 0$ sur les deux plans $z = \pm d/2$, on prend

$$\theta(x, z, t) = A_2(t) \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right) + A_3(t) \sin\left(\frac{2\pi}{d} z\right). \quad (4.3)$$

On rajoute l'amplitude $A_3(t)$ pour tenir compte des non-linéarités, $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \nabla \theta$, qui font apparaître des termes en $\cos(\frac{\pi}{d} z) \sin(\frac{\pi}{d} z)$ donc des termes en $\sin(\frac{2\pi}{d} z)$. En substituant les relations (4.2) et (4.3) dans (4.1), et en annulant les coefficients des termes en $\cos(\frac{\pi}{d} z) \cos(\frac{\pi}{l} x)$ et en $\sin(\frac{2\pi}{d} z)$ (les premiers modes spatiaux), on obtient directement,

après un changement d'échelle de temps $t \rightarrow \left(\frac{\pi^2}{d^2} + \frac{\pi^2}{l^2}\right) t$, les équations de Lorenz :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = s(-x_1 + x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -bx_3 + x_1x_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

avec

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}(l/d + d/l)} A_1 \\ x_2 &= \frac{1/dl^2}{\sqrt{2}\pi^3(1/d^2 + 1/l^2)^3} A_2 \\ x_3 &= \frac{1/dl^2}{\pi^3(1/d^2 + 1/l^2)^3} A_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} s = P_r \\ r = \frac{1/l^2}{\pi^4(1/d^2 + 1/l^2)^3} R_a \\ b = \frac{4}{1 + d^2/l^2}. \end{cases}$$

On suppose que le paramètre de contrôle physique est ΔT , la différence de température entre les deux plans horizontaux. ΔT est donc proportionnel au paramètre r défini ci-dessus.

Le paramètre s est uniquement fonction des propriétés physiques du fluide. Lorenz prend $s = 10$, ce qui correspond approximativement à l'eau.

Reste le paramètre b qui ne fait intervenir que la façon dont on a construit le modèle réduit. En effet, la largeur l des rouleaux est libre. L'un des objectifs du modèle réduit est de prendre en compte le seuil d'apparition de la convection. Lorenz choisit l , et donc b , de façon à bien représenter la perte de stabilité de l'état conductif pur : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Nous verrons plus loin que cette perte de stabilité a lieu pour $r \geq 1$ et donc pour

$$R_a \geq \pi^4 l^2 (1/d^2 + 1/l^2)^3.$$

La taille des rouleaux, pour laquelle les premières instabilités apparaissent correspondent donc au minimum de la fonction $l \rightarrow \pi^4 l^2 (1/d^2 + 1/l^2)^3$, minimum atteint en $l = \sqrt{2}d$. On retrouve alors le célèbre seuil, calculé pour la première fois par Rayleigh, $R_a = 27\pi^4/4d^4$, au delà duquel le régime conductif pur est instable. On en déduit sans peine $b = 8/3$.

4.3 Etude élémentaire du modèle de Lorenz

On suppose dans toute la suite, sauf mention contraire, que $s = 10$, $b = 8/3$ et $r > 0$. Nous rassemblons ici les résultats les plus simples et rigoureusement démontrés.

4.3.1 Courbes intégrales sur $[0, +\infty[$

Le champ de vecteurs associé à (4.4) est rentrant dans un compact de \mathbb{R}^3 . Pour cela, il suffit de considérer l'ellipsoïde d'équation

$$E_m(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1)^2}{2s} + \frac{(x_2)^2}{2} + \frac{(x_3)^2}{2} - (r+1)x_3 - m = 0$$

avec $m > 0$ grand. Un calcul simple donne

$$\frac{dE_m}{dt} = -(x_1)^2 - (x_2)^2 - b(x_3)^2 + (r+1)bx_3.$$

Il est clair que pour $m > 0$ assez grand, $\frac{dE_m}{dt}(x_1, x_2, x_3) < 0$ dès que $E_m(x_1, x_2, x_3) = 0$. Ceci signifie que le champ de vecteurs est rentrant dans les ellipsoïdes \mathcal{E}_m définis par $E_m(x_1, x_2, x_3) \leq 0$, dès que $m > 0$ est assez grand. Cela prouve ainsi que toutes les trajectoires sont, à terme, contenues dans un même ellipsoïde \mathcal{E}_m et donc peuvent être prolongées pour tout temps $t > 0$.

4.3.2 Stabilité asymptotique globale de 0 lorsque $r \leq 1$

Pour $r \leq 1$, la fonction

$$V(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + s(x_2)^2 + s(x_3)^2$$

est une fonction de Liapounov du système. Le point d'équilibre 0 est globalement attracteur. 0 correspond physiquement au fluide au repos. On retrouve bien que, pour ΔT faible (i.e. $r \leq 1$), le seul régime stable est celui de la conduction pure.

4.3.3 Contraction du volume

Le flot de (4.4), noté ϕ_t , contracte l'élément de volume euclidien de \mathbb{R}^3 . En effet, le transport par ϕ_t de l'élément de volume $dx_1 dx_2 dx_3$ situé autour du point de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , conduit au nouvel élément de volume $|\det(D\phi_t(x))| dx_1 dx_2 dx_3$. Or on sait que (cf. chapitre 1)

$$\frac{d}{dt}(D\phi_t(x)) = Dv(\phi_t(x)) D\phi_t(x)$$

où on note v le champ de vecteurs associé à (4.4). Si t est petit, alors

$$D\phi_t(x) = I + t Dv(x) + O(t^2)$$

($\phi_0 = I$). Donc

$$\begin{aligned} \det(D\phi_t(x)) &= \det(I + t Dv(x)) + O(t^2) = 1 + t \operatorname{trace}(Dv(x)) + O(t^2) \\ &= 1 + t \operatorname{div}(v)(x) + O(t^2). \end{aligned}$$

En y regardant de plus près, ce même calcul donne la relation générale suivante :

$$\frac{d}{dt} [\det(D\phi_t(x))] = \operatorname{div}(v)(\phi_t(x)) \det(D\phi_t(x)).$$

Pour les équations de Lorenz (4.4), on a

$$\operatorname{div}(v) = -s - b - 1 < 0.$$

Avec l'existence d'un ellipsoïde \mathcal{E}_m positivement invariant, $\phi_t(\mathcal{E}_m) \subset \mathcal{E}_m$, cette contraction du volume implique l'existence d'un ensemble attracteur borné, de volume nul qui capte toutes les trajectoires :

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(\mathcal{E}_m).$$

Il est d'usage d'appeler dissipatif (resp. conservatif) un système dynamique dont la divergence du champ des vecteurs vitesse est partout négative (resp. nulle). Cependant, un tel usage ne peut être pris comme une définition complète et précise. En effet, la notion physique de dissipation puise sa source dans le second principe de la thermodynamique. Bien que pour certains systèmes simples, comme celui du pendule, il soit facile de voir que l'introduction d'un effet irréversible induit une divergence négative du champ de vecteurs vitesse, les liens entre l'irréversibilité au sens thermodynamique et la divergence du champ des vitesses ne sont pas clairs à l'heure actuelle. La divergence est une notion métrique, i.e. liée à une structure riemannienne sur l'espace des phases, c'est à dire à la façon dont on mesure le volume.

4.3.4 Points d'équilibre

Pour $0 \leq r \leq 1$, le système admet un seul point d'équilibre qui est (cf. ce qui précède) globalement attracteur.

Pour $r > 1$, le système admet 3 points d'équilibre distincts : 0 , q^+ et q^- de coordonnées

$$\left(\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right).$$

Bifurcation fourche pour $r = 1$

Le linéarisé tangent en 0 a pour matrice

$$\begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Pour $0 \leq r < 1$ tous les exposants caractéristiques sont strictement négatifs. En $r = 1$ l'un d'entre eux s'annule. Pour $r > 1$, deux exposants caractéristiques sont strictement négatifs et l'autre est strictement positif. On s'attend donc à avoir, compte tenu du fait que le système admet une symétrie (si $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ est une solution, alors $(-x_1(t), -x_2(t), x_3(t))$ est aussi solution), une bifurcation fourche qui donne naissance aux deux points d'équilibre q^+ et q^- . Les calculs montrent que c'est effectivement le cas.

Lorsque r passe par 1, le point stationnaire 0, qui correspond au régime de conduction pure (fluide immobile et profil linéaire de température), perd sa stabilité au profit de deux autres points d'équilibre, q^+ et q^- , qui correspondent aux rouleaux de convection observés par Bénard. Ce nouveau régime est encore stationnaire car la vitesse et la température du fluide sont indépendantes du temps.

Bifurcation de Hopf pour $r = r_H = 470/19 \approx 24.74$

Pour $r = r_H = s(s + b + 3)/(s - b - 1) = 470/19$, une bifurcation de Hopf apparaît pour les deux points d'équilibre q^+ et q^- . Les exposants caractéristiques sont alors

$$-(s + b + 1) \quad \text{et} \quad \pm i \sqrt{2s(s + 1)/(s - b - 1)}.$$

On s'attend donc à ce que q^+ et q^- perdent, lorsque r franchit r_H , leur stabilité au profit d'un cycle limite. En fait, une analyse plus fine montre que (cf. chapitre 2) la bifurcation est sous-critique, c'est à dire que deux cycles limites instables, qui existent pour $r < r_H$, disparaissent, pour $r = r_H$, dans les deux points d'équilibre q^+ et q^- et leur transmettent leur instabilité. Ce type de bifurcation de Hopf apparaît lorsque, dans la forme normale de la bifurcation (cf. figure 2.7, page 100), les paramètres a et d sont tous les deux strictement positifs.

Conclusion

Les deux cycles limites de la bifurcation de Hopf en $r = r_H$, n'existent pas lorsque $0 \leq r \leq 1$. Ils ont donc pris naissance quelque part dans \mathbb{R}^3 pour $1 < r < r_H$. Leur apparition n'est pas due à une autre bifurcation de Hopf de point d'équilibre, car les deux bifurcations précédentes sont les seules. Ils sont en fait le résultat d'une bifurcation globale.

De plus, des simulations numériques conduisent à penser que, lorsque r franchit r_H , la structure du flot est déjà très irrégulière. En fait, la naissance de l'attracteur de Lorenz,

n'a que peu de lien avec les points d'équilibre et leurs bifurcations : la bifurcation fourche en $r = 1$ marque le début d'une complexification croissante du flot et la bifurcation de Hopf en $r = r_H$ la fin probable de cette complexification.

La question centrale est donc de savoir ce qui se passe entre les deux valeurs $r = 1$ et $r = r_H$. Comment passe-t-on continûment d'un flot très simple pour $r < 1$ à un flot très irrégulier (chaotique) pour $r \geq r_H$ (typiquement $r \approx 28$) ?

Etant donné que le modèle de Lorenz permet de représenter correctement la première perte de stabilité du régime conducteur, on peut espérer que les bifurcations qui suivent donnent quelques indications, au moins très grossières, sur le caractère turbulent du système physique pour des nombres de Rayleigh importants (i.e. pour $r \gg 1$).

Nous allons voir en particulier que le régime que l'on obtient pour $r = 28$, n'est pas, selon toute vraisemblance, périodique ou pseudo-périodique comme le suggère la théorie de Landau [?] de la turbulence². Ruelle et Takens [13] furent les premiers à mettre en doute le bien fondé de cette théorie de la turbulence : l'apparition de comportements irréguliers et turbulents peut très bien être décrite par un système continu possédant un petit nombre de degré de liberté, où une cascade de bifurcation de Hopf est impossible.

Il n'est pas nécessaire d'avoir un très grand nombre de degrés de liberté et d'équations différentielles ordinaires pour avoir des comportements turbulents et chaotiques. Nous allons voir, avec les équations de Lorentz, qu'un espace des phases de dimension 3 suffit.

4.4 Le chaos déterministe

4.4.1 Bifurcations vers le chaos dans le modèle de Lorenz

Le contenu de cette sous-section ne repose pas sur des preuves mathématiques. C'est plutôt d'une interprétation plausible d'expériences numériques simples à réaliser. Il est instructif de bien comprendre la méthode qui permet d'approximer et d'interpréter ces expériences. Tout consiste à se ramener à une simple application continue par morceau d'un intervalle de \mathbb{R} dans lui-même, i.e. un sorte de modèle réduit où l'essentiel de la dynamique est représenté. Sans un tel schéma réducteur et explicatif, les simulations numériques perdent quasi totalement de leur intérêt. Pour $r \leq 10$: les simulations montrent que, si la condition initiale n'appartient pas à la surface rentrante dans 0, $W^s(0)$, (cf. chapitre 1), la trajectoire converge, soit vers q^+ , soit vers q^- . Pour r proche de 10, les points q^+ et q^- sont en fait des foyers attracteurs (deux exposants complexes conjugués avec une partie réelle négative et un exposant réel négatif).

²Lev Landau a proposé de décrire la turbulence hydrodynamique comme résultant d'une cascade de très nombreuses bifurcations de Hopf, cascade qui conduit à un mouvement pseudo-périodique comportant un grand nombre de fréquences. Dans ce scénario, à chaque bifurcation de Hopf, apparaît une nouvelle fréquence. Pour qu'un tel scénario soit réalisable, il faut que la dimension de l'espace des phases soit au moins supérieure au nombre de fréquences plus 1. Ce qui n'est pas gênant pour les systèmes fluides qui ont un espace des phases de dimension infinie.

Application de Poincaré $x_3 = r - 1$

Les points q^+ et q^- appartiennent au plan $z = r - 1$. On peut montrer sur les linéarisés tangents que, localement les spirales autour de q^+ et q^- ont lieu principalement selon une surface transverse à ce plan (direction du plan propre lié aux deux exposants caractéristiques complexes conjugués). De plus, si $x_3 = r - 1$, $\frac{dx_3}{dt} \leq 0$ dès que x_1 et x_2 appartiennent à $[-\sqrt{b(r-1)}, +\sqrt{b(r-1)}]$.

Cette remarque justifie en partie l'introduction de l'application de Poincaré associée au plan $x_3 = r - 1$ pour r assez grand (typiquement $r \geq 10$). Cette application n'est pas définie pour les points du plan appartenant à $W^s(0)$ et en particulier pour le point $(0, 0, r - 1)$. En fait, on peut se restreindre au carré,

$$\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, r - 1) \mid -\sqrt{b(r-1)} < x_1, x_2 < \sqrt{b(r-1)} \right\}$$

car on constate numériquement que toutes les orbites (exceptées celles qui sont contenues dans $W^s(0)$) qui démarrent dans ce carré recourent ce carré après avoir effectué un tour autour de q^+ ou q^- .

Application de Lorenz

A priori, on doit s'attendre à ce que les orbites de cette application de Poincaré, restreinte au carré Σ , soient disposées selon deux directions. En fait, comme le montre la figure 4.4, page 140, on observe numériquement une contraction très forte selon une direction approximativement parallèle à l'antidiagonale du carré Σ . Ce qui conduit à avoir, quitte à oublier les premières itérations de l'application de Poincaré, des orbites qui semblent se disposer selon une courbe contenue dans Σ . Il est donc naturel d'éliminer cette direction fortement contractante du flot et d'essayer de représenter cette application de Poincaré de dimension 2, par une application de dimension 1, que l'on appelle application de Lorenz [7]. Pour $r = 10$, une application de Lorenz plausible est donnée par la figure 4.4, page 140. Noter que l'application n'est pas définie en 0 (aux orbites appartenant à $W^s(0)$). Noter aussi que, contrairement à l'application de Poincaré qui est inversible, l'application de Lorenz ne l'est plus. Ceci est dû à la réduction à la dimension 1. En fait, les orbites ne sont sur une courbe qu'en première approximation, elles sont en fait contenues, à terme, dans un ensemble ayant une légère épaisseur, de dimension non entière un peu plus grande que 1 (cf. ce qui suit). Cette perte d'inversibilité n'est pas très gênante puisque que l'on considère des temps positifs.

Naissance de l'attracteur étrange

A partir de simulations numériques, nous allons donner, pour des valeurs croissantes de r l'allure de cette application de Lorenz en fonction de r .

$r = 10$, figure 4.4, page 140 $-a \sim q^-$ et $+a \sim q^+$ attirent toutes les trajectoires à l'exception de celles contenues dans $W^s(0)$.

$r \approx 13.926$, figure 4.5, page 141 L'espace sortant de 0, $W^i(0)$ intercepte l'espace rentrant $W^s(0)$. C'est une bifurcation homocline. Elle se traduit sur l'application de Lorenz par une inflexion verticale en 0. Elle donne vraisemblablement naissance aux deux cycles limites instables qui disparaissent, pour $r = r_H$, dans les deux points d'équilibre q^- et q^+ . Toutes les orbites convergent encore de façon monotone, soit vers $-a \sim q^-$, soit vers $+a \sim q^+$.

$r = 15$, figure 4.6, page 142 Les deux cycles limites instables apparaissent clairement en $-c$ et $+c$. Si on démarre à l'intérieur de $[-c, +c]$, les premières itérations ne sont plus monotones. Cependant, après des transitoires compliqués, l'orbite sort, en général, de $[-c, +c]$ par la zone près de 0, et reprend sa convergence monotone vers l'un des deux points $-a$ ou $+a$.

$r = 20.$, figure 4.7, page 143 La plage de comportements irréguliers $[-c, +c]$ s'agrandit. Toutes les orbites finissent, en général, par converger vers $-a$ ou $+a$ mais pendant un temps assez long le comportement est très irrégulier. On a affaire à un chaos transitoire (préturbulence) qui ne persiste pas à terme.

$r \approx 24.06$, figure 4.8, page 144 La plage de comportements irréguliers $[-c, +c]$ devient positivement invariante : toutes les orbites qui démarrent dans $[-c, +c]$ y restent. Les domaines d'attraction de $-a$ ou $+a$ diminuent de façon significative. Les deux cycles instables, $-c$ et $+c$, se rapprochent de $-a$ et $+a$, respectivement. Il y a coexistence de trois attracteurs : q^+ , q^- et un attracteur vraisemblablement une structure plus complexe, associe la plage $[-c, +c]$.

$r = 470/19 \approx 24.7$, figure 4.9, page 145 C'est la bifurcation de Hopf précédente : les deux cycles limites instables disparaissent dans q^+ et q^- . Il ne reste plus qu'un seul attracteur de structure assez complexe et que D. Ruelle qualifie d'étrange (cf. définition 19, 132).

$r = 28$, figure 4.10, page 146 On est en plein régime chaotique. Les trajectoires ont tendance à s'enchevêtrer (mélange turbulent). Deux trajectoires initialement voisines se séparent exponentiellement car la pente de l'application de Lorenz est toujours supérieure à 1.

Conclusion

Le scénario précédent permet de comprendre comment apparaît l'attracteur de Lorenz. En revanche il ne donne pas de schéma simple de ce qu'est un régime chaotique, c'est à dire une description précise de la structure géométrique et topologique de l'attracteur et de la dynamique sur ce dernier. Cette description est donnée en grande partie dans [7], page 273. Elle repose principalement sur la notion d'ensembles hyperboliques et de dynamique symbolique. Pour un lecteur non familier avec ces notions, cette description est assez difficile à comprendre. C'est pourquoi nous préférons présenter ici un exemple simple et historique de système chaotique déterministe, le fer à cheval de Smale, qui est à la base de la théorie moderne des systèmes dynamiques (théorie hyperbolique). Une fois cet exemple bien compris, la description, proposée dans [7], de l'attracteur de Lorenz devient très compréhensible.

4.4.2 Un exemple historique : le fer à cheval de Smale

Pour $r \approx 28$, les caractéristiques essentielles de l'application de Poincaré du modèle de Lorenz sont : dilatation dans une direction, contraction dans une direction transverse et repliement (effet purement non linéaire) pour rester dans le carré Σ . Nous avons utilisé la contraction (très supérieure à la dilatation) pour ramener l'étude à celle de l'application de Lorenz qui ne retient que la dilatation et le repliement³ : la dilatation était caractérisée par le fait que la pente de l'application de Lorenz était partout supérieure à 1, pour $r \approx 28$; le repliement venait du fait que, compte tenu de la dilatation, pour que l'image de $[-a, a]$ soit contenue dans $[-a, a]$, il était nécessaire d'introduire une discontinuité.

En 1963, le mathématicien américain Stephen Smale [14] décrit un difféomorphisme du plan f (système dynamique discret de dimension 2, application de Poincaré d'un flot de dimension 3) qui possède un ensemble de Cantor invariant (non nécessairement attracteur), Λ , pour lequel $f|_{\Lambda}$ peut être très simplement caractérisée. La construction de f repose uniquement sur les 3 opérations géométriques précédemment citées : dilatation, contraction et repliement. Ainsi f s'avère être un premier modèle "élémentaire" pour comprendre la structure d'un attracteur étrange et la nature d'un régime dit chaotique.

Construction géométrique du difféomorphisme f

On note $S = [0, 1] \times [0, 1]$. f est certes définie sur \mathbb{R}^2 mais on ne s'intéresse qu'aux points x de S dont les images successives par f et f^{-1} restent dans S (cf. la définition de l'ensemble invariant Λ ci-après). C'est pourquoi nous ne définissons f et f^{-1} que sur S .

Construction de f Soient $0 < \lambda < 1/2$ et $\mu > 2$. Pour $x \in S$, $f(x)$ est définie par la figure 4.11, page 147 : contraction horizontale d'un facteur λ ; dilatation verticale d'un

³Ce qui était suffisant puisque l'on s'intéressait aux temps positifs.

facteur μ ; repliement de la partie supérieure vers la droite et vers le bas. $f(S)$ a la forme d'un fer à cheval : seule la partie courbée et extérieure à S de $f(S)$ est soumise à une transformation non linéaire ; les deux bandes verticales, V_1 et V_2 , qui forment $f(S) \cap S$, sont en fait le résultat de deux opérations purement affines.

Construction de f^{-1} Il suffit d'effectuer dans l'autre sens les 3 opérations de contraction, dilation et repliement qui servent à construire f . On obtient ainsi la figure 4.12, page 148, les deux bandes horizontales, H_1 et H_2 , avec $H_1 \cup H_2 = f^{-1}(S) \cap S$.

L'ensemble invariant Λ

On note

$$\Lambda = \{x \in S \mid \forall i \in \mathbb{Z}, f^i(x) \in S\}.$$

Il est clair que $\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(S)$ et que $f(\Lambda) = \Lambda$. Voyons quelle est la structure topologique cet ensemble invariant. Pour en avoir une image approximative, il suffit de construire $f^{-1}(S) \cap S \cap f(S)$ puis $f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) \cap f^2(S)$. La situation est résumée sur la figure 4.13, page 149.

L'ensemble des points $x \in S$ tels que $f(x) \in S$ est égal à $H_1 \cup H_2$ ($f(x) \in S$ signifie $x \in f^{-1}(S)$ donc $x \in S \cap f^{-1}(S)$). De même, l'ensemble des points $x \in S$ tels que $f^{-1}(x) \in S$ est égal à $V_1 \cup V_2$. Donc

$$f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) = (H_1 \cup H_2) \cap (V_1 \cup V_2)$$

est composé de 4 rectangles disjoints. De même, $f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) \cap f^2(S)$ est composé de 16 petits rectangles disjoints, contenus dans les 4 rectangles précédents.

Nous voyons donc que Λ est composé d'une infinité de points, résultant de la contraction et du partage successifs en 4, des petits rectangles précédents. On peut montrer que Λ est en fait un ensemble non dénombrable, compact, d'intérieur vide et sans point isolé. C'est un ensemble de Cantor.

$f|_{\Lambda}$ et dynamique symbolique

Soit Σ l'ensemble des suites indéxées par \mathbb{Z} à valeur dans $\{1, 2\}$. On dit aussi que Σ est l'ensemble des séquences de deux symboles (ici 1 et 2) indéxées par \mathbb{Z} : $\Sigma = \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$. Un élément $a \in \Sigma$ est aussi noté $\{a_i\}$ avec $i \in \mathbb{Z}$ et $a_i = 1$ ou 2 .

On définit alors une application $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma$ de la manière suivante. A chaque point $x \in \Lambda$, on associe un élément $a = \phi(x) \in \Sigma$ défini par $a_i = 1$ (resp. $a_i = 2$) si $f^i(x) \in H_1$ (resp. $f^i(x) \in H_2$) pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

ϕ est injective. En effet, si x et y sont deux points distincts dans Λ , il est toujours possible, par une dilatation horizontale (associée à f^i , $i \leq 0$) ou par une dilatation verticale (associée à f^i , $i \geq 0$), de les éloigner suffisamment l'un de l'autre et ainsi avoir, pour un certain $i \in \mathbb{Z}$, $f^i(x)$ dans H_1 (ou H_2) et $f^i(y)$ dans H_2 (ou H_1), c'est à dire $\phi(x)_i \neq \phi(y)_i$.

Il est clair que, plus x et y seront proches, plus le coefficient de dilatation pour les séparer sera important et donc plus l'entier i sera grand en valeur absolue. Ainsi deux éléments x et y sont d'autant plus proches que les parties médianes sur lesquelles les suites de leurs symboles coïncident sont larges. Ceci permet de munir Σ d'une distance d qui rende ϕ continue : pour mesurer la distance entre deux éléments a et b de Σ on peut prendre, par exemple,

$$d(a, b) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|a_i - b_i|}{2^{|i|}}.$$

Par un argument de compacité, on peut aussi montrer que ϕ est surjective. Enfin, par construction même de ϕ , la suite de symboles associée à $f(x)$, se déduit de celle associée à x par un simple décalage de +1 des indices (shift de Bernoulli noté σ) : $\phi(f(x))_i = \phi(x)_{i+1}$. La mise en forme des idées précédentes permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 21 [Dynamique symbolique du fer à cheval]

Considérons l'ensemble invariant Λ et l'ensemble Σ muni de la topologie métrique associée à la distance d définie ci-dessus. Alors, l'application

$$\begin{array}{ccc} \phi & \Lambda & \longrightarrow \Sigma \\ & x & \longrightarrow \phi(x) \end{array}$$

définie ci-dessus est un homéomorphisme de Λ sur Σ . De plus $\phi \circ (f|_{\Lambda}) = \sigma \circ \phi$ où σ est l'opérateur de décalage de +1 des indices ($(\sigma(a))_i = a_{i+1}$).

Ce résultat tout à fait remarquable permet d'identifier $f|_{\Lambda}$ à un shift de Bernoulli sur des séquences bi-infinie de symboles : c'est pour cela que l'on parle de dynamique symbolique. L'intérêt d'une telle description se mesure aux conséquences qui en découlent, par exemple :

- un point x sur une orbite périodique de $f|_{\Lambda}$ est caractérisée par une suite de symboles $\phi(x)$ périodiques ;
- $f|_{\Lambda}$ possède une infinité dénombrable d'orbites périodiques ; elles sont toutes instables ;
- $f|_{\Lambda}$ possède une orbite partout dense dans Λ ;
- $f|_{\Lambda}$ possède une infinité non dénombrable d'orbites non périodiques toutes instables ;

La sensibilité par rapport à n'importe quelle condition initiale dans Λ est ainsi une évidence.

Conclusion

L'ensemble invariant Λ est le prototype d'ensemble dit hyperbolique qui généralise la notion de point d'équilibre hyperbolique : de façon imagée, tous les points d'un ensemble hyperbolique admettent une structure de col avec un espace rentrant et un espace sortant (pour une définition précise voir [7], page 238).

L'intérêt principal de la notion d'hyperbolicité est sa persistance par rapport à des petites perturbations sur les équations du système (stabilité structurelle). Nous avons vu que le flot autour d'un point d'équilibre hyperbolique est structurellement stable (théorème de Grobman-Hartman). De la même façon, perturbons l'application f du fer à cheval de Smale par le rajout d'une fonction εg avec $0 < \varepsilon \ll 1$: les dilatations et contractions sont légèrement distordues ; les bandes verticales V_i et horizontales H_i ne sont plus des rectangles parfaits mais restent transverses les unes aux autres ; l'ensemble de Cantor invariant Λ persiste et la description de la dynamique comme étant un shift de Bernoulli sur deux symboles est conservée.

La dynamique de $f|_{\Lambda}$ est donc robuste : elle constitue un bon candidat pour décrire un chaos déterministe physiquement observable. Il y en a certes beaucoup d'autres mais le fer à cheval de Smale est l'un des plus simples.

4.4.3 Attracteurs et mesures asymptotiques

L'étude du système de Lorenz pour $r \approx 28$ montre combien il est difficile de caractériser précisément la dynamique sur l'attracteur et l'attracteur lui-même. De plus, les motivations pratiques, qui conduisent à étudier la dynamique d'un système instable, ne nécessitent pas toujours une connaissance aussi précise des phénomènes que celle que l'on a pour le fer à cheval de Smale. Pour le système de Rayleigh-Bénard, il est intéressant d'avoir, lorsque l'écoulement devient turbulent, i.e. pour r grand, la valeur moyenne de profil de température, le flux de chaleur moyen entre les deux parois, la vitesse moyenne loin et près des parois, ... Avec un système déterministe instable, pour lequel aucune prévision à long terme ne peut être faite, les informations physiquement valables sont essentiellement de nature statistique et probabiliste.

On est donc confronté au problème suivant. Soit le système dynamique continu

$$\frac{dx}{dt} = v(x)$$

dont le flot ϕ_t est défini pour tout $t \geq 0$. Les grandeurs observables y du système sont des fonctions de x , $y = h(x)$ (les automaticiens les appellent les sorties). Comment peut-on calculer, à partir de la connaissance du champ de vecteurs vitesse v fourni par la modélisation, la valeur moyenne de y sur $[0, T]$, T grand :

$$\frac{1}{T} \int_0^T h(\phi_t(x)) dt.$$

Cette moyenne a-t-elle un sens ? Est-ce que la limite

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\phi_t(x)) dt$$

existe ? Si elle existe, dépend-elle de la condition initiale x ?

Attracteur et dimension

Pour avoir une idée de la moyenne ci-dessus, il est important de savoir vers quoi convergent les trajectoires physiques, i.e. vers quel sous-ensemble de l'espace des phases $\phi_t(x)$ converge quand $t \rightarrow +\infty$. Nous avons donné dans le chapitre 1 (définition 7, page 9) la définition d'un ensemble attracteur A avec son bassin d'attraction U (un ouvert contenant A) qui repose sur les deux points suivants :

[attraction] pour tout ouvert V contenant A , $\phi_t(U)$ est contenu dans V pour t suffisamment grand ;

[invariance] $\phi_t(A) = A$.

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de définition communément admise d'attracteur. La notion d'attracteur est liée à un type de régime asymptotique. Dire d'un système qu'il possède plusieurs attracteurs, c'est aussi dire qu'il admet plusieurs types notablement différents de régimes asymptotiques.

Il est possible qu'un ensemble attracteur A possède plusieurs composantes qui correspondent à des régimes asymptotiques différents. Par exemple, dans le modèle de Lorenz pour r entre 24.06 et 24.7, il y a, en première approximation, trois régimes asymptotiques différents : soit les trajectoires convergent vers l'un des deux points d'équilibre q^+ et q^- ; soit elles convergent vers ce que l'on conjecture être un attracteur étrange. Ainsi un attracteur est un ensemble attracteur, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Pour être observable, même numériquement, le régime asymptotique lié à l'attracteur doit être robuste, i.e. stable par rapport à de petites perturbations aléatoires comme, par exemple, les erreurs d'arrondi d'un ordinateur, les erreurs introduites par les schémas numériques d'intégration. Nous nous contenterons d'une définition d'attracteur, certes non rigoureuse, mais au moins physique et opérationnelle [12].

Définition 19 [Définition heuristique d'un attracteur] *Un ensemble A est dit attracteur si c'est un ensemble attracteur (i.e. s'il admet les deux propriétés d'attraction et d'invariance) et si, de plus :*

[irréductibilité] *l'attracteur correspond à un seul régime asymptotique pour le flot : on peut choisir par exemple l'existence d'une orbite partout dense contenue dans l'attracteur, orbite qui établit un lien continu par le flot entre toutes les parties de l'attracteur ;*

[stabilité par rapport à de petites fluctuations] *les propriétés moyennes du comportement asymptotique sur l'attracteur ne doivent pas être sensiblement influencées par la présence de petites fluctuations (erreurs d'arrondi, fluctuation moléculaires, ...).*

*L'attracteur est dit **étrange** si, de plus, les trajectoires qu'ils contient sont sensibles aux conditions initiales (SCI).*

Un attracteur est donc un sous-ensemble (un compact en général) de l'espace des phases. Sa géométrie n'est pas forcément régulière comme le suggèrent les exemples du fer à cheval de Smale ou du modèle de Lorenz. Une première caractérisation géométrique d'un attracteur est sa dimension. Elle doit permettre de comparer les attracteurs entre eux : un attracteur sera dit plus gros qu'un autre si sa dimension est plus grande. Elle donne aussi une estimation du nombre de degrés de liberté nécessaires pour décrire l'attracteur : si ce dernier est de dimension D , il faudra au minimum $E(D) + 1$ variables pour le décrire (au moins localement) ($E(D)$ désigne la partie entière de D).

Il existe plusieurs définitions de la dimension, définitions qui généralisent bien sûr celle d'Euclide. Nous rappelons ici la plus simple dans le cas d'un attracteur compact⁴.

Définition 20 [capacité de Kolmogorov] *Soit A un compact de \mathbb{R}^n . Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules de rayon ε nécessaires pour recouvrir A . La capacité de Kolmogorov de A , notée $\dim_K A$, est alors égale à*

$$\dim_K A = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}.$$

A cause du \log , $\dim_K(A)$ est indépendant de la norme prise sur \mathbb{R}^n pour définir les boules qui recouvrent A . On peut aussi vérifier que l'on retrouve la dimension d'Euclide dès que A est un point, une courbe, une surface,...

Considérons, comme exemple, l'ensemble triadique de Cantor. Comme l'illustre la figure 4.14, page 150, cet ensemble repose sur la construction géométrique suivante : on part du segment $[0, 1]$ auquel on enlève son tiers central ; sur les deux segments restants $[0, 1/3]$ et $[2/3, 1]$, on réitère l'opération, i.e. on leur enlève à chacun leur tiers central ; on obtient 4 nouveaux segments et on réitère le processus jusqu'à l'infini. On obtient à la limite une infinité non dénombrable de points distincts qui constituent l'ensemble triadique de Cantor. Calculons sa dimension. Pour $\varepsilon = 1/3$, il suffit de $N(1/3) = 2$ segments de longueur $1/3$ pour recouvrir l'objet. Pour $\varepsilon = 1/9$, il faut, par construction, $N(1/9) = 4$ segments de longueur $1/9$. De façon générale, pour $\varepsilon = 1/3^n$, il faut $N(1/3^n) = 2^n$ segments de longueur $1/3^n$. Ainsi la dimension de l'ensemble triadique Cantor vaut donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.63.$$

Elle est bien comprise entre 0 et 1.

Malheureusement, en pratique, la méthode précédente, consistant à appliquer la définition pour calculer la dimension d'un ensemble compact de \mathbb{R}^n , est très souvent inadéquate.

⁴Dans de nombreux cas, la dimension de Hausdorff, appelée par Mandelbrot [11] dimension fractale, est égale à la capacité de Kolmogorov. En toute généralité, la capacité de Kolmogorov est un majorant de la dimension de Hausdorff. Certains auteurs appellent d'ailleurs dimension fractale la capacité de Kolmogorov.

On peut néanmoins procéder autrement pour estimer la dimension d'un attracteur. Les positions de deux points différents sur une même trajectoire sont situés sur l'attracteur, ou presque. Il existe donc une corrélation spatiale entre eux qui permet d'en déduire simplement une estimation de la dimension de l'attracteur associé au régime asymptotique.

Méthode de Grassberger-Procaccia Soit une trajectoire $x(t > 0)$ qui a atteint l'attracteur, ou presque. Soit Δt un intervalle d'échantillonnage. On note $x_i = x(i\Delta t)$. Soit m un entier grand (typiquement 1000). On note $N(r)$ le nombre de paires (i, j) , $1 \leq i \neq j \leq m$, telles que la distance entre x_i et x_j soit plus petite que r . Il est clair les valeurs de r pour lesquelles $N(r)$ a un sens correspondent l'intervalle $[r_{min}, r_{max}]$ avec r_{min} la plus petite distance entre x_i et x_j et r_{max} le diamètre de l'attracteur. Pour $r_{min} \ll r_1 \ll r_2 \ll r_{max}$ et m très grand, on a alors l'estimation ν par défaut de la dimension de l'attracteur :

$$\nu \approx \frac{\log(N(r_2)) - \log(N(r_1))}{\log(r_2) - \log(r_1)}.$$

ν est appelé dimension de corrélation. Cette méthode se prête très bien au calcul numérique. Elle ne doit pas cependant faire illusion (influence de Δt et de m). Il convient d'être prudent lors de son utilisation. Pour que la formule ci-dessus donne une dimension de corrélation ν significative, il faut typiquement que $r_2 \geq 10 r_1$ (nécessite d'au moins une décade pour calculer la pente en échelle \log / \log). Or $N(r_1) \geq 1$ et $N(r_2) \leq \frac{m(m-1)}{2}$. De fait, on a la majoration très grossière suivante :

$$\nu \leq 2 \log_{10}(m).$$

Ce qui veut dire que pour une série de $m = 1000$ points, ν doit être bien inférieur à 6. Il faut se méfier d'un calcul donnant une dimension de corrélation ν près de la borne supérieure $2 \log_{10}(m)$.

Mesure asymptotique et exposants de Liapounov

Ce qui suit n'est qu'une présentation très brève et approximative. Des résultats généraux (théorie ergodique [6]) assurent l'existence et, dans certains cas, l'unicité des objets évoqués ci-dessous.

L'attracteur A fournit une description globale du comportement asymptotique du flot ϕ_t . Il peut être muni d'une mesure de probabilité ρ , mesure dite asymptotique, qui décrit la fréquence avec laquelle les trajectoires balayent l'attracteur. La connaissance de cette mesure permet de faire des calculs de moyennes temporelles très simplement sur toute observable $h(x)$ (sortie) du système :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\phi_t(x)) dt = \int_A h(x) d(\rho(x)) = \langle h \rangle .$$

Cette mesure, de support A , est invariante par le flot : pour tout sous-espace M de l'attracteur A , on a :

$$\rho(M) = \int_M d(\rho(x)) = \rho(\phi_{-t}(M)) = \int_{\phi_{-t}(M)} d(\rho(x)).$$

Cette mesure est ergodique (elle correspond à un seul type de régime asymptotique) : si $M \subset A$ est invariant par le flot, $\phi_t(M) = M$, alors $\rho(M) = 0$ ou $\rho(M) = 1$.

Le comportement du flot peut, dans ce cadre, se quantifier par des constantes de temps moyennes de divergence ou de convergence entre les trajectoires. Cette quantification repose sur la notion d'exposants de Liapounov $\{\lambda_i\}$: $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$) correspond à une divergence (convergence) exponentielle avec la constante de temps $1/\lambda_i$ (resp. $-1/\lambda_i$).

Soient deux conditions initiales voisines x et y proches de l'attracteur. On suppose que l'espace des phases \mathbb{R}^n est muni d'un produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, qui définit une norme notée $\|\cdot\|$. Pour m entier, on a

$$\phi_m(x) - \phi_m(y) \approx D\phi_m(x)(x - y)$$

d'où

$$\|\phi_m(x) - \phi_m(y)\| \approx \sqrt{\langle x - y, D\phi_m(x)'D\phi_m(x)(x - y) \rangle}$$

avec $'$ pour la transposition. Comme les effets de divergence ou de convergence sont multiplicatifs, on obtient leurs valeurs moyennes par unité de temps en prenant la racine m -ième, c'est à dire en considérant une moyenne géométrique :

$$\|\phi_m(x) - \phi_m(y)\|^{1/m} \approx [\langle x - y, D\phi_m(x)'D\phi_m(x)(x - y) \rangle]^{1/2m}.$$

Ceci explique pourquoi les exposants de Liapounov peuvent se définir à partir la matrice symétrique positive

$$L_x = \lim_{m \rightarrow +\infty} [D\phi_m'(x)D\phi_m(x)]^{1/2m}.$$

Des résultats généraux (théorèmes ergodiques multiplicatifs) assurent l'existence et l'indépendance de L_x par rapport à $x \in A$ ρ -presque partout. On remarquera que cette limite est indépendante du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et donc de la norme $\|\cdot\|$ prise au départ. Les exposants de Liapounov $\{\lambda_i\}$ sont alors les logarithmes des valeurs propres de la matrice L_x constante ρ -presque partout.

En pratique, il est assez facile d'obtenir le plus grand exposant de Liapounov λ_{max} car ses effets dominent à terme tous les autres. Pour cela, il suffit de considérer deux trajectoires initialement très proches, de connaître à chaque instant t la norme de l'écart, $\|e(t)\|$, entre ces deux trajectoires : l'évolution de cet écart est, pour presque toutes les conditions initiales, proportionnelle à $\exp(\lambda_{max}t)$.

Enfin, il est possible d'effectuer une première classification des attracteurs en fonction du signe de leurs exposants de Liapounov. Pour un espace de phases de dimension 3, on a les 4 possibilités suivantes :

- ($-,-,-$) les exposants de Liapounov sont tous négatifs, l'attracteur est réduit à un point d'équilibre ;
- ($\mathbf{0},-,-$) l'attracteur est un cycle limite⁵ ;
- ($\mathbf{0},\mathbf{0},-$) l'attracteur est un tore T^2 ;
- ($-,\mathbf{0},+$) l'attracteur est un attracteur étrange ; il y a divergence exponentielle entre les trajectoires car l'un des exposants de Liapounov au moins est positif.

⁵L'exposant nul vient du fait que, le long du cycle limite, les petits écarts ne sont ni dilatés ni contractés.

4.5 Figures

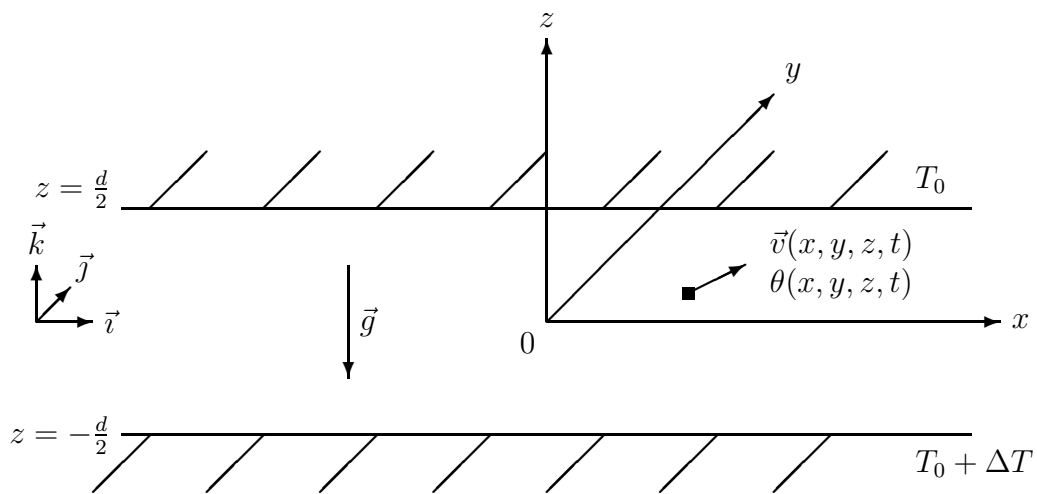


FIG. 4.1 –

l'expérience de Rayleigh-Bénard considère une couche horizontale de fluide, dans un champ de pesanteur \vec{g} , entre une plaque inférieure chaude et une plaque supérieure froide.

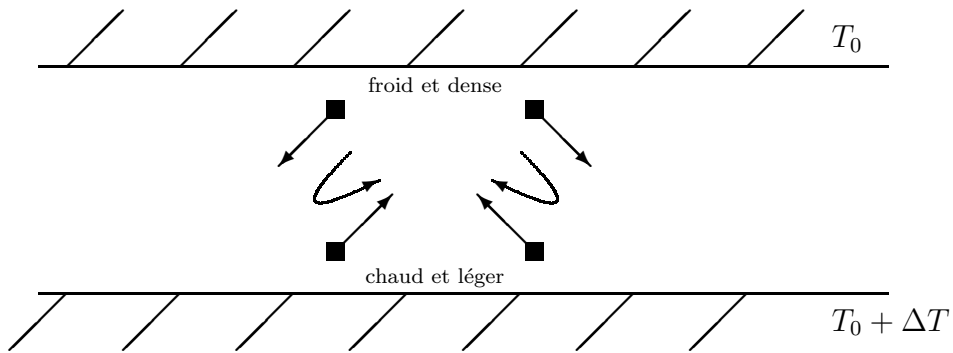


FIG. 4.2 –
origine physique de l'instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard.

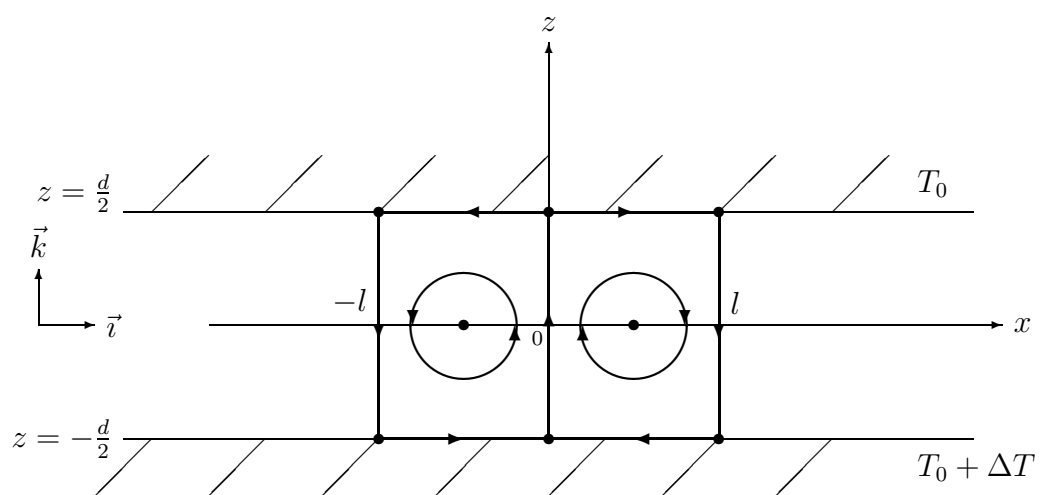


FIG. 4.3 -

les rouleaux de Bénard.

$$r = 10$$

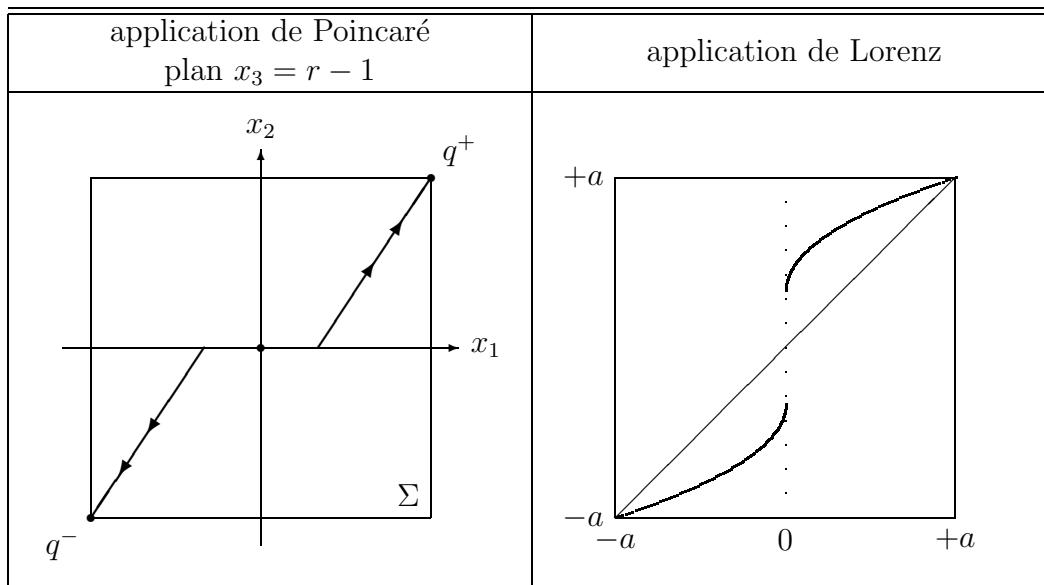


FIG. 4.4 –

modèle de Lorenz.

$$r \approx 13.926$$

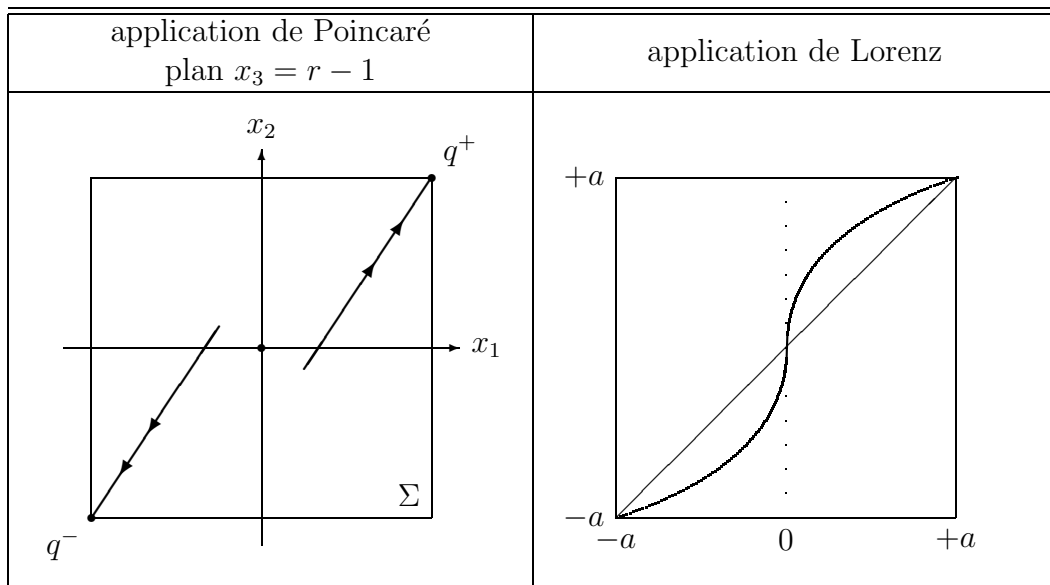


FIG. 4.5 –

modèle de Lorenz.

$$r = 15$$

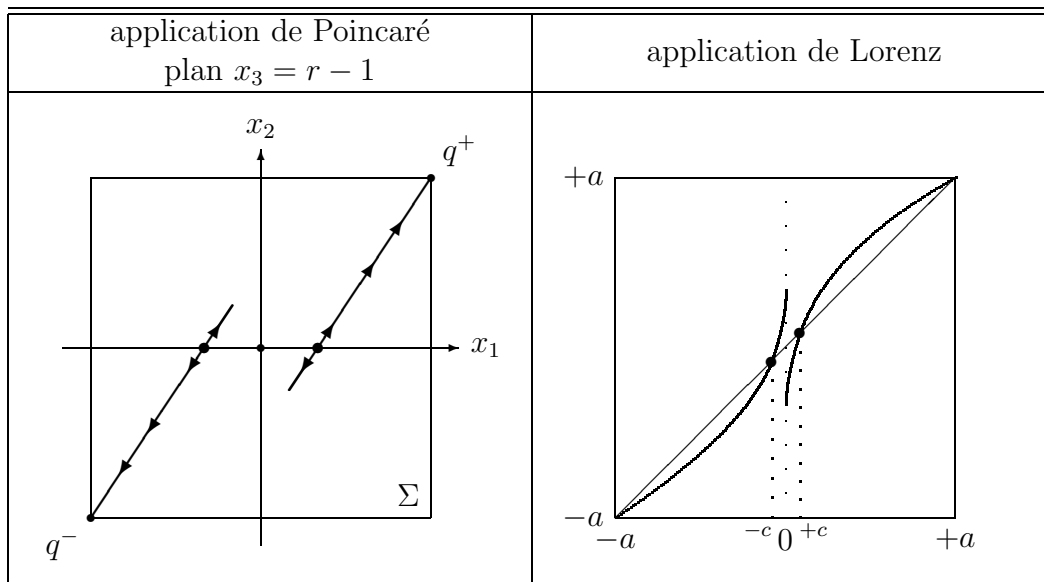


FIG. 4.6 –

modèle de Lorenz.

$$r = 20$$

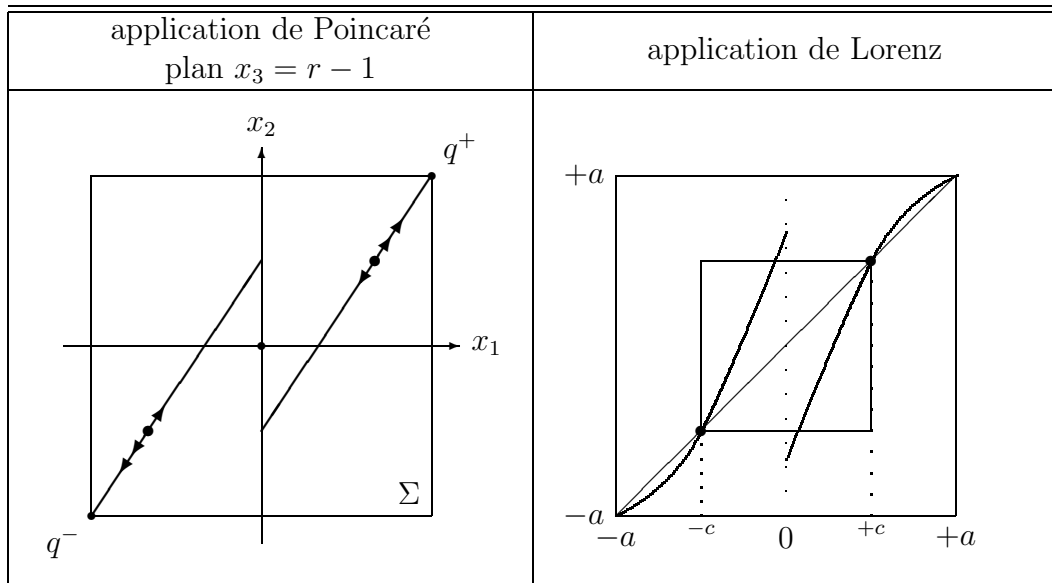


FIG. 4.7 -

modèle de Lorenz.

$$r \approx 24.06$$

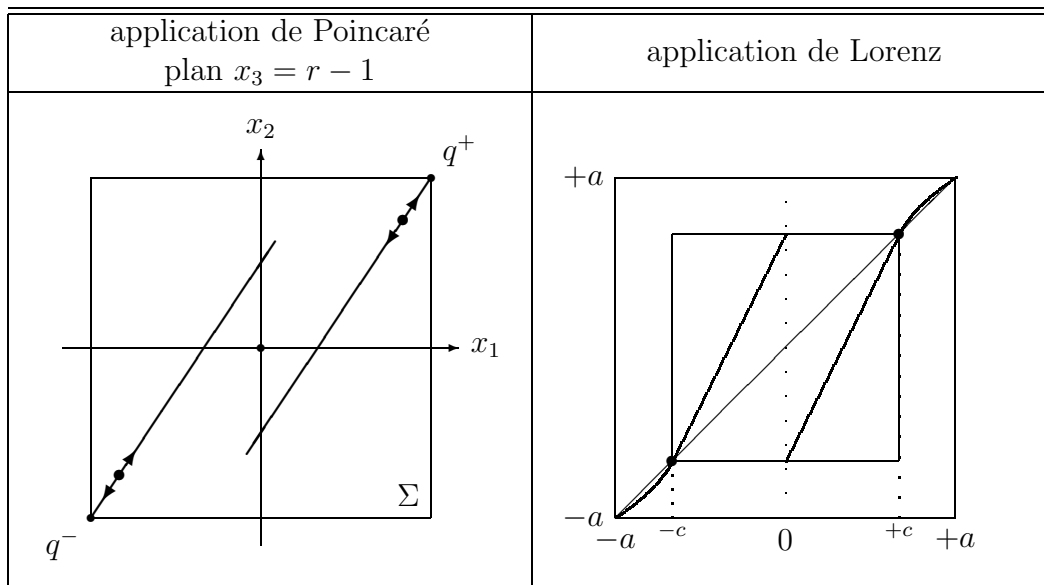


FIG. 4.8 –

modèle de Lorenz.

$$r = 470/19$$

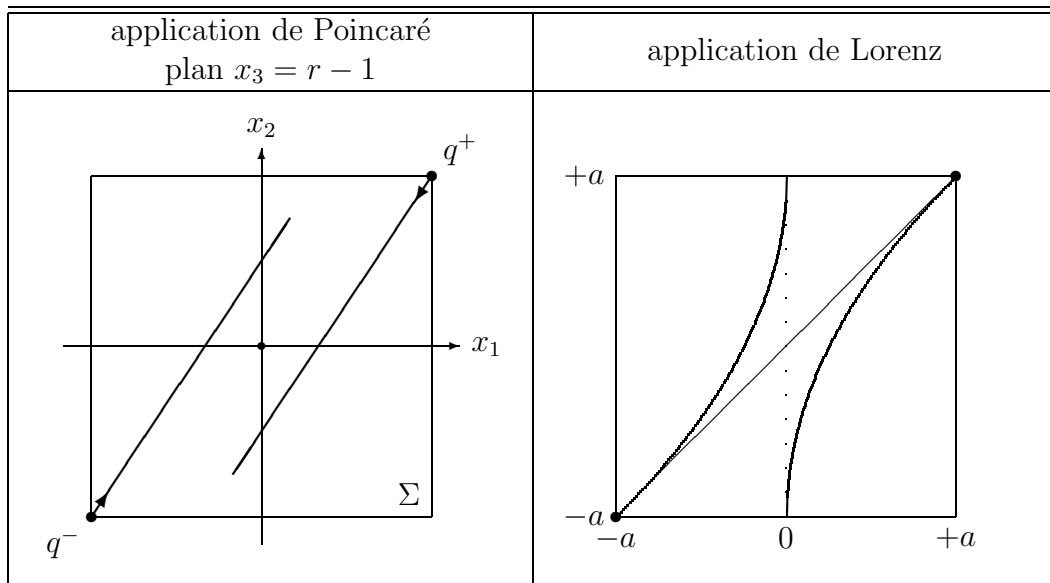


FIG. 4.9 –

modèle de Lorenz.

$$r = 28$$

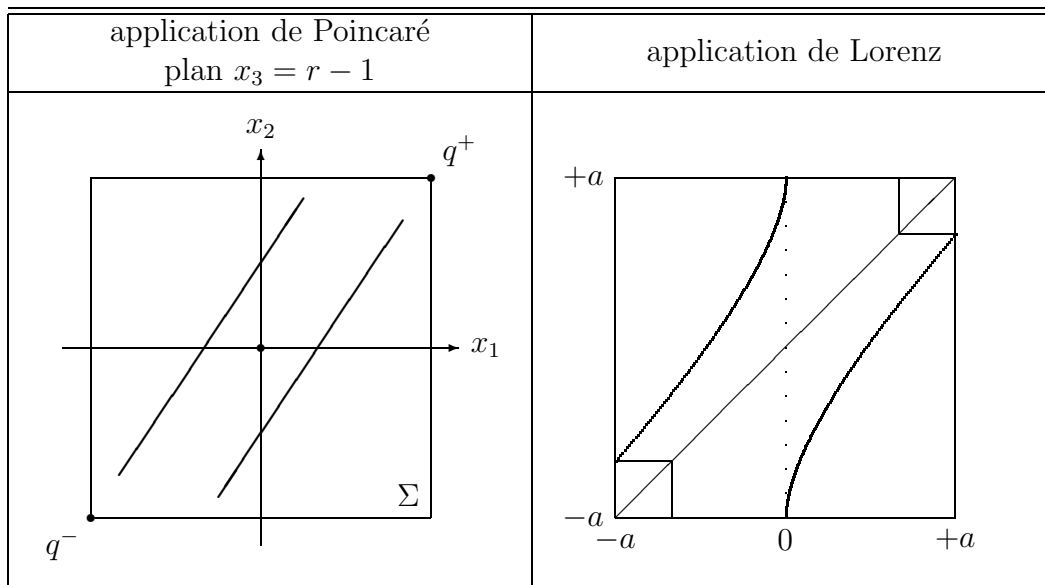


FIG. 4.10 –

modèle de Lorenz.

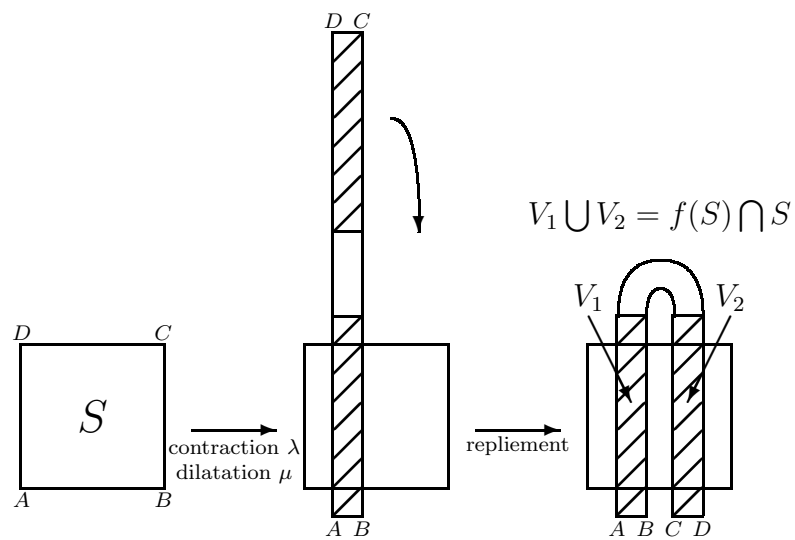


FIG. 4.11 –
l'application f du fer à cheval de Smale.

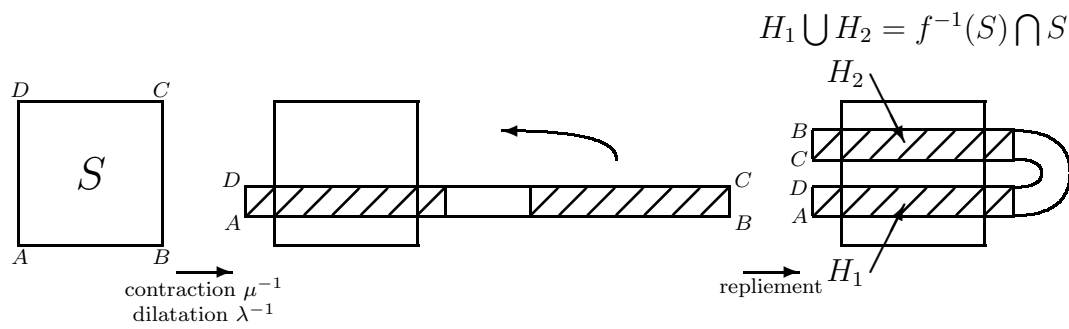
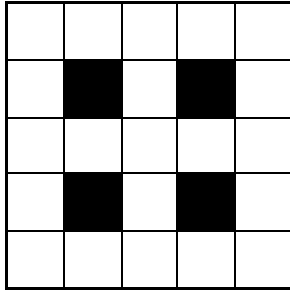


FIG. 4.12 –
l'inverse f^{-1} de l'application du fer à cheval de Smale.

$$f^{-1}(S) \cap S \cap f(S)$$



$$f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) \cap f^2(S)$$

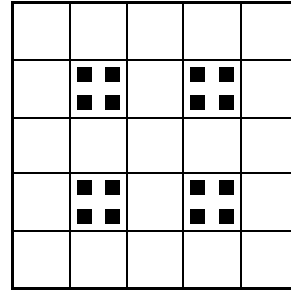


FIG. 4.13 –
allure de l'ensemble de Cantor invariant $\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(S)$ du fer à cheval de Smale.

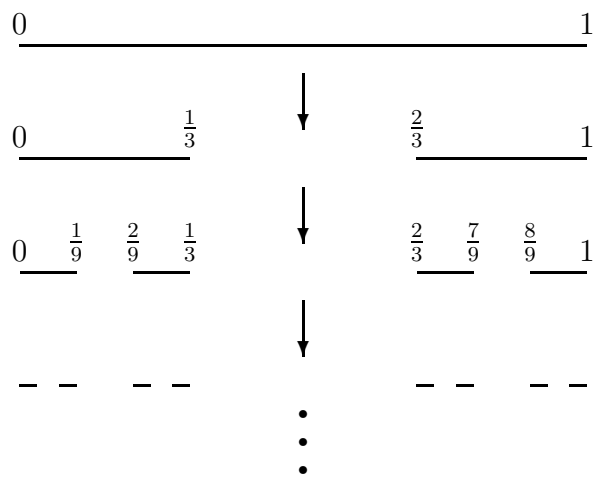


FIG. 4.14 –
premières étapes de la construction de l'ensemble triadique de Cantor.

Bibliographie

- [1] R.H. Abraham and C.D. Shaw. *Dynamics – The Geometry of Behavior : I-IV*. Aerial Press, Santa Cruz, California, 1981.
- [2] V. Arnold. *Equations Différentielles Ordinaires*. Mir Moscou, 1974.
- [3] V. Arnold. *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*. Mir Moscou, 1976.
- [4] V. Arnold. *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires*. Mir Moscou, 1980.
- [5] J. Carr. *Application of Center Manifold Theory*. Springer, 1981.
- [6] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, and Ya.G. Sinai. *Ergodic Theory*. Springer, 1982.
- [7] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1983.
- [8] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press : New-York, 1974.
- [9] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapounov's Direct Method With Applications*. Academic Press, New York, 1961.
- [10] E.N. Lorenz. Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20 :130–141, 1963.
- [11] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [12] D Ruelle. *Chaotic Evolution and Strange Attractors*. Cambridge University Press, 1989.
- [13] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys.*, 20 :167–192, 1971.
- [14] S. Smale. Diffeomorphisms with many periodic points. In *Differential and Combinatorial Topology*, pages 63–80. S.S. Cairns, Princeton University Press, 1963.
- [15] R Thom. *Structural Stability and Morphogenesis*. W.A. Benjamin : Reading, MA., 1975. Original edition : inter-édition, Paris, 1972.
- [16] A. Tikhonov, A. Vasil'eva, and A. Sveshnikov. *Differential Equations*. Springer, New York, 1980.