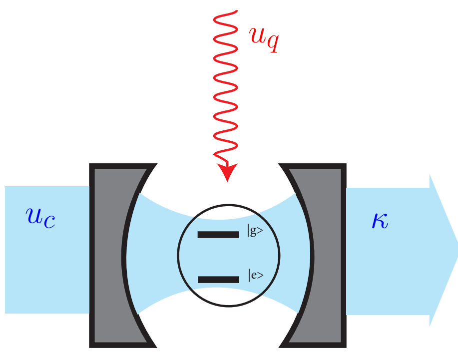
UMPC Vendredi 10 avril 2015

M2 Mathématiques & Applications
UE (ANEDP, COCV): Analyse et contrôle de systèmes quantiques
Contrôle des connaissances
Sujet donné par M. Mirrahimi et P. Rouchon

Les documents sont autorisés. Les accès aux réseaux internet et mobiles sont interdits. Le but du problème est d'étudier une méthode de refroidissement d'un qubit en le couplant à un oscillateur harmonique dissipatif.[1]



Soit un qubit couplé à un oscillateur avec l'Hamiltonien dispersif

$$\frac{\boldsymbol{H}_0}{\hbar} = \omega_c \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a} + \frac{\omega_{\text{eg}}}{2}\boldsymbol{\sigma_z} - \frac{\chi}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}$$

où $\boldsymbol{a}$ est l'opérateur d'annihilation, $\boldsymbol{\sigma_z}$ l'opérateur de Pauli usuel, $\omega_c, \omega_{\text{eg}}, \chi > 0$ sont des paramètres constants. On ne rappelle pas les produits tensoriels quand il n'y a pas d'ambiguïté comme $\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{\sigma_z} \otimes \boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}$.

Afin de contrôler l'état du système, nous allons appliquer des champs sur le qubit et l'oscillateur. Cela revient à ajouter à l'Hamiltonien $\boldsymbol{H}_0$

$$\frac{\boldsymbol{H}_1(t)}{\hbar} = (u_q(t)\boldsymbol{\sigma}_+ + u_q^*(t)\boldsymbol{\sigma}_-) + (u_c(t)\boldsymbol{a}^\dagger + u_c^*(t)\boldsymbol{a})$$

où $\boldsymbol{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$, $\boldsymbol{\sigma}_- = {\boldsymbol{\sigma}_+}^\dagger = |g\rangle\langle e|$, $u_q(t) = \bar{u}_q e^{-i(\omega_{\text{eg}} - \bar{n}\chi)t}$ et $u_c(t) = \bar{u}_c e^{-i(\omega_c - \chi/2)t}$, avec $\bar{n}$ est un entier positif et $\bar{u}_q, \bar{u}_c$ réel vérifiant $0 < \bar{u}_q, \bar{u}_c \ll \omega_c, \omega_{\text{eg}}, \chi$. De plus l'oscillateur est dissipatif. L'état quantique est donc décrit par l'opérateur densité, noté ici $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ et vérifiant:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1(t), \widetilde{\boldsymbol{\rho}}] + \kappa \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}), \tag{1}$$

où $\mathcal{L}_{\boldsymbol{B}}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}) = \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{B}^\dagger - \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^\dagger\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{B}^\dagger\boldsymbol{B}$ et avec $0 < \kappa \ll \omega_c, \omega_{\text{eg}}, \chi$..

1. Démontrer que les valeurs propres de $\boldsymbol{H}_0/\hbar$ sont données par

$$\left\{n(\omega_c - \epsilon\chi/2) + \epsilon\omega_{\text{eg}}/2\right\}_{n\in\mathbb{N}, \epsilon\in\{-1,1\}}$$

et préciser les états propres associés en fonction de $(|n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|g\rangle, |e\rangle)$ les états propres de $\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}$ et de $\boldsymbol{\sigma_z}$, respectivement.

[1]Cette méthode de refroidissement a été testée expérimentalement dans: Geerlings, K.; Leghtas, Z.; Pop, I. M.; Shankar, S.; Frunzio, L.; Schoelkopf, R. J.; Mirrahimi, M. & Devoret, M. H. Demonstrating a Driven Reset Protocol for a Superconducting Qubit Phys. Rev. Lett., American Physical Society, 2013, 110, 120501-. L'analyse mathématique de convergence est donnée dans: Mirrahimi, M.; Leghtas, Z. & Vool, U. Quantum reservoir engineering and single qubit cooling IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS), 2013.

2. Démontrer les relations suivantes

$$e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{a}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} = e^{-it\omega_c}(\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} + i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z}) \otimes \boldsymbol{a}$$
$$e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{\sigma_-}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} = \boldsymbol{\sigma_-} \otimes \exp(-it(\omega_{\text{eg}} - \chi\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a})) = e^{-it\omega_{\text{eg}}}\boldsymbol{\sigma_-} \otimes \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{itn\chi}|n\rangle\langle n|\right).$$

3. On considère ici uniquement la dynamique conservative $\frac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1(t), \widetilde{\boldsymbol{\rho}}]$. Donner cette dynamique dans le repère tournant avec $\boldsymbol{H}_0/\hbar$, i.e., avec $\boldsymbol{\rho} = e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\widetilde{\boldsymbol{\rho}}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar}$ au lieu de $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ (on utilisera la forme $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = -i[\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{\rho}]$ où on explicitera l'opérateur $\boldsymbol{A} = e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}(\boldsymbol{H}_1/\hbar)e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar}$ en fonction de $u_c(t)$, $u_q(t)$ et des opérateurs $\boldsymbol{\sigma_-}$, $\boldsymbol{a}$)

4. Montrer que la moyennisation du premier ordre donne la dynamique approchée suivante:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = -i\bar{u}_q\big[\boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| \ , \ \boldsymbol{\rho}\big] - i\bar{u}_c\big[|e\rangle\langle e| \otimes (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^\dagger) \ , \ \boldsymbol{\rho}\big].$$

5. En supposant $\boldsymbol{H}_1/\hbar \equiv 0$, écrire l'équation (1) dans le repère tournant avec l'Hamiltonien $\boldsymbol{H}_0$, i.e., avec $\boldsymbol{\rho} = e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\widetilde{\boldsymbol{\rho}}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar}$ à la place de $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ (on utilisera la forme $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = \kappa\mathcal{L}_{\boldsymbol{B}(t)}(\boldsymbol{\rho})$, où on explicitera l'opérateur $\boldsymbol{B} = e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{a}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar}$ en fonction des opérateurs $\boldsymbol{\sigma_z}$, $\boldsymbol{a}$)

6. Toujours en supposant $\boldsymbol{H}_1/\hbar \equiv 0$, montrer que la moyennisation du premier ordre donne la dynamique approchée suivante::

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = \kappa\mathcal{L}_{|g\rangle\langle g|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho}) + \kappa\mathcal{L}_{|e\rangle\langle e|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho}).$$

7. Montrer avec les question 4 et 6, que la dynamique (1) écrite dans le repère tournant $\boldsymbol{\rho} = e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\widetilde{\boldsymbol{\rho}}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar}$, peut être approchée par la dynamique suivante (dynamique effective dans le repère d'interaction)

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = -i\bar{u}_q\big[\boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|, \boldsymbol{\rho}\big] - i\bar{u}_c\big[|e\rangle\langle e| \otimes (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^\dagger) \ , \ \boldsymbol{\rho}\big] + \kappa\mathcal{L}_{|g\rangle\langle g|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho}) + \kappa\mathcal{L}_{|e\rangle\langle e|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho}). \quad (2)$$

8. Vérifier que $\boldsymbol{\rho}_\infty = |g\rangle\langle g| \otimes |0\rangle\langle 0|$ est un état d'équilibre de (2).

9. Le but des questions 9a à 9h est de donner les étapes principales qui montrent que les solutions $t \mapsto \boldsymbol{\rho}(t)$ de (2) (avec une condition initiale $\boldsymbol{\rho}(0) = \boldsymbol{\rho}_0$ arbitraire parmi les opérateurs densités) convergent, lorsque $t \to \infty$, vers $\boldsymbol{\rho}_\infty$. On suppose dans toute la suite que $\boldsymbol{\rho}(t)$ est une fonction très régulière du temps et que pour tout opérateur $\boldsymbol{A}$, $\text{Tr}\,(\boldsymbol{\rho}(t)\boldsymbol{A})$ est aussi une fonction régulière de t avec $\frac{d}{dt}\,\text{Tr}\,(\boldsymbol{\rho}(t)\boldsymbol{A}) = \text{Tr}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}(t)\boldsymbol{A}\right)$. On considère les trois projecteurs suivants:

$$\Pi_+ = |g\rangle\langle g| \otimes \left(\sum_{n>\bar{n}} |n\rangle\langle n|\right), \ \Pi_- = |g\rangle\langle g| \otimes \left(\sum_{n<\bar{n}} |n\rangle\langle n|\right), \ \Pi_c = |g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| + |e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{I}_c.$$

(a) Démontrer que $\Pi_+ + \Pi_- + \Pi_c = \boldsymbol{I}$, et que les produits deux à deux de ces opérateurs de projection s'annulent. Montrer que $[\boldsymbol{N}, \Pi_\nu] = 0$ pour $\nu \in \{+, -, c\}$ et où $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}$.

(b) Démontrer la relation suivante:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{N}\Pi_+ \boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+\right) = -\kappa \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{N}\Pi_+ \boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+\right) \\ - \kappa\bar{n}(\bar{n}+1) \operatorname{Tr}\Big(\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}+1\rangle\langle \bar{n}+1|\big)\boldsymbol{\rho}\Big).$$

(c) En déduire que $\operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{N}\Pi_+ \boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+\right) \to 0$ quand $t \to \infty$. Expliquer pourquoi cette convergence implique aussi que $\operatorname{Tr}\left(\Pi_+ \boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+\right) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

(d) Utiliser le fait que $\boldsymbol{\rho}^\dagger = \boldsymbol{\rho} \geq 0$ et que Π_+ est un projecteur orthogonal, pour en déduire que $\Pi_+ \boldsymbol{\rho}(t)$ converge vers 0 quand $t \mapsto +\infty$.

(e) On suppose à partir de maintenant que $\Pi_+ \boldsymbol{\rho}(t) \equiv 0$. Démontrer alors que $\boldsymbol{\rho}_c(t) = \Pi_c \boldsymbol{\rho}(t)\Pi_c$ vérifie

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}_c\right) = -\bar{n}\kappa \operatorname{Tr}\Big(\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle \bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho}_c\Big).$$

(f) Utiliser le principe d'invariance de LaSalle[2] pour montrer que si $\boldsymbol{\rho}$ appartient à l'ensemble Ω-limite alors

$$\big(|e\rangle\langle e| \otimes |\bar{n}\rangle\langle \bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho}_c\big(|e\rangle\langle e| \otimes |\bar{n}\rangle\langle \bar{n}|\big) = 0.$$

(g) Écrire l'équation satisfaite par $\boldsymbol{\rho}_e = \big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{I}_c\big)\boldsymbol{\rho}\big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{I}_c\big)$ dans l'ensemble invariant Ω-limite et en déduire que $\boldsymbol{\rho}_e \equiv 0$ dans cet ensemble Ω-limite.[3]

(h) En déduire que l'on peut restreindre la recherche de l'ensemble Ω-limite à celui des $\boldsymbol{\rho}$ tels que $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_- = \Pi_- \boldsymbol{\rho} \Pi_-$. Décrire alors la dynamique de $\boldsymbol{\rho}_-$ et conclure.

[2]Voici un résumé succinct du principe d'invariance de LaSalle en dimension finie. Soit $\frac{d}{dt}x = f(x)$ avec f fonction C^∞ de l'état $x \in \mathbb{R}^p$ ($p > 0$) et une fonction C^∞ scalaire $x \mapsto V(x)$ non négative et infinie à l'infini. On suppose que V est une fonction de Lyapunov, i.e. $\frac{d}{dt}V = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$ pour tout x. L'ensemble Ω-limite est le sous ensemble de $\mathbb{R}^p$ vers lequel les trajectoires convergent quelques soient les conditions initiales. Cet ensemble est invariant par la dynamique. Il est caractérisé par l'ensemble des points x tels que $d^r V/dt^r = 0$ pour tout entier $r > 0$: en particulier cela veut dire que $dV/dt = \frac{\partial V}{\partial x} f = 0$ et aussi $d^2V/dt^2 = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(f, f) = 0$. Bien-que l'on soit ici en dimension infinie, ce principe d'invariance reste licite avec des considérations supplémentaires et hors programme portant sur la pré-compacité des trajectoires pour des conditions initiales avec "énergie finie" $\operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}_0 \boldsymbol{N}\right) < +\infty$.

[3]Indication: utiliser le fait que l'opérateur densité $\boldsymbol{\rho}$ d'un oscillateur harmonique quantique amorti en présence d'un champs constant, $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = -i\bar{u}_c[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^\dagger, \boldsymbol{\rho}] + \kappa \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})$, converge vers l'état cohérent $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, où $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$ avec $\alpha = -2i\bar{u}_c/\kappa$.

UMPC Vendredi 10 avril 2015

M2 Mathématiques & Applications
UE (ANEDP, COCV): Analyse et contrôle de systèmes quantiques
Corrigé du Contrôle des connaissances
M. Mirrahimi et P. Rouchon

1. Comme $\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}|n\rangle = n|n\rangle$, $\boldsymbol{\sigma_z}|e\rangle = |e\rangle$ et $\boldsymbol{\sigma_z}|g\rangle = -|g\rangle$, la valeur propre $n(\omega_c - \chi/2) + \omega_{\text{eg}}/2$ (resp. $n(\omega_c + \chi/2) - \omega_{\text{eg}}/2$) correspond au vecteur propre $|e\rangle \otimes |n\rangle$ (resp. $|g\rangle \otimes |n\rangle$).

2. Avec $\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a} = \boldsymbol{N}$, on a
$$e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar} = e^{i\omega_c t\boldsymbol{N}} e^{i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} e^{-i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} = e^{-i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} e^{i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} e^{i\omega_c t\boldsymbol{N}}$$
car $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{\sigma_z}$ et $\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}$ commutent. Donc
$$\begin{aligned} e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{a}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} &= e^{-i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} e^{i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} e^{i\omega_c t\boldsymbol{N}}\boldsymbol{a}e^{-i\omega_c t\boldsymbol{N}} e^{-i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} \\ &= e^{-it\omega_c} e^{-i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} e^{i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}}\boldsymbol{a}e^{-i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} = e^{-it\omega_c} e^{-i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}}\boldsymbol{a}e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} \\ &= e^{-it\omega_c} e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}}\boldsymbol{a} = e^{-it\omega_c}(\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} + i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z})\boldsymbol{a} \end{aligned}$$
où on a utilisé $e^{i\omega_c t\boldsymbol{N}}\boldsymbol{a}e^{-i\omega_c t\boldsymbol{N}} = e^{-it\omega_c}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}e^{-i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} = e^{-i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}}\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} = e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{I})}\boldsymbol{a}$. De même
$$\begin{aligned} e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{\sigma_-}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} &= e^{-i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} e^{i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} e^{i\omega_c t\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\sigma_-}e^{-i\omega_c t\boldsymbol{N}} e^{-i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} \\ &= e^{-i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} e^{i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}}\boldsymbol{\sigma_-}e^{-i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} = e^{-i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} e^{i\omega_{\text{eg}}t\boldsymbol{\sigma_z}}\boldsymbol{\sigma_-} e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} \\ &= e^{i\omega_{\text{eg}}t\boldsymbol{\sigma_z}} e^{-i\chi t\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\sigma_-} \end{aligned}$$
on a utilisé $e^{i\omega_c t\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\sigma_-}e^{-i\omega_c t\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{\sigma_-}$, $\boldsymbol{\sigma_-}e^{-i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}} = e^{i\frac{\omega_{\text{eg}}t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}}\boldsymbol{\sigma_-}$, $\boldsymbol{\sigma_-}e^{i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}} = e^{-i\frac{\chi t}{2}\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\sigma_-}$. On obtient alors le résultat car $e^{-i\chi t\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\sigma_-} = e^{i\chi t\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\sigma_-}$ et $e^{i\omega_{\text{eg}}t\boldsymbol{\sigma_z}}\boldsymbol{\sigma_-} = e^{-i\omega_{\text{eg}}t}\boldsymbol{\sigma_-}$ car $\boldsymbol{\sigma_z}\boldsymbol{\sigma_-} = -\boldsymbol{\sigma_-}$.

3. On a
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = -\frac{i}{\hbar}e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}[\boldsymbol{H}_1, \widetilde{\boldsymbol{\rho}}]e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} = -\frac{i}{\hbar}\left[e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{H}_1 e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar}, \boldsymbol{\rho}\right]$$
Comme
$$\begin{aligned} e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}(\boldsymbol{H}_1/\hbar)e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} &= u_q e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{\sigma_-}^\dagger e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} + u_q^* e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{\sigma_-}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} \\ &\quad + u_c e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{a}^\dagger e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} + u_c^* e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{a}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar}, \end{aligned}$$
on voit avec la question précédente que $\boldsymbol{A}(t) = e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}(\boldsymbol{H}_1/\hbar)e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar}$ est la somme des quatre opérateurs suivants:
$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}(t) = u_q(t)\boldsymbol{\sigma_+} \otimes \exp(it(\omega_{\text{eg}} - \chi\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a})) + u_q^*(t)\boldsymbol{\sigma_-} \otimes \exp(-it(\omega_{\text{eg}} - \chi\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a})) \\ &+ u_c(t)e^{it\omega_c}(\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} - i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z}) \otimes \boldsymbol{a}^\dagger + u_c^* e^{-it\omega_c}(\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} + i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z}) \otimes \boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

4. Comme
$$u_q(t)\boldsymbol{\sigma}_+ \otimes \exp(it(\omega_{\text{eg}} - \chi \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a})) = \boldsymbol{\sigma}_+ \otimes \left(e^{it\omega_{\text{eg}}} u_g(t) \sum_{n\geq 0} e^{-itn\chi} |n\rangle\langle n| \right)$$
on voit que le seul terme non oscillant dans la somme sur n correspond à $n = \bar{n}$ car $u_q(t) = \bar{u}_q e^{-i(\omega_{\text{eg}} - \bar{n}\chi)t}$. Donc le terme séculaire dans $u_q(t)\boldsymbol{\sigma}_+ \otimes \exp(it(\omega_{\text{eg}} - \chi \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}))$ correspond à $\bar{u}_q \boldsymbol{\sigma}_+ \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|$. De même, en prenant le complexe conjugué, le terme séculaire dans $u_q^*(t)\boldsymbol{\sigma}_- \otimes \exp(-it(\omega_{\text{eg}} - \chi \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}))$ correspond à $\bar{u}_q \boldsymbol{\sigma}_- \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|$. On trouve ainsi le premier terme en $\bar{u}_q \boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|$ car $\boldsymbol{\sigma}_- + \boldsymbol{\sigma}_+ = \boldsymbol{\sigma_x}$.

   Comme
$$\begin{aligned} u_c(t)e^{it\omega_c}&(\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} - i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z}) \otimes \boldsymbol{a}^\dagger \\ &= \frac{u_c(t)}{2}\Big(e^{it(\omega_c+\chi/2)} + e^{it(\omega_c-\chi/2)} - (e^{it(\omega_c+\chi/2)} - e^{it(\omega_c-\chi/2)})\boldsymbol{\sigma_z} \Big) \otimes \boldsymbol{a}^\dagger \end{aligned}$$
on voit que le terme séculaire est $\bar{u}_c(1+\boldsymbol{\sigma_z})/2 \otimes \boldsymbol{a}^\dagger$ car $u_c(t) = \bar{u}_c e^{-i(\omega_c - \chi/2)t}$. Or $(1+\boldsymbol{\sigma_z})/2 = |e\rangle\langle e|$. On en déduit le second terme en ajoutant l'opérateur hermitien conjugué:
$$\bar{u}_c |e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{a}^\dagger + \bar{u}_c |e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{a} = \bar{u}_c |e\rangle\langle e| \otimes (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^\dagger).$$

5. On a $\boldsymbol{B}(t) = e^{it\boldsymbol{H}_0/\hbar}\boldsymbol{a}e^{-it\boldsymbol{H}_0/\hbar} = e^{-it\omega_c}(\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} + i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z}) \otimes \boldsymbol{a}$ d'après la première question.

6. On a
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\boldsymbol{B}(t)}(\boldsymbol{\rho}) = \Big((\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} + i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z}) \otimes \boldsymbol{a} \Big) \boldsymbol{\rho} \Big((\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} - i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z}) \otimes \boldsymbol{a}^\dagger \Big) \\ - \Big((1 - i\sin(t\chi)\boldsymbol{\sigma_z}) \otimes \boldsymbol{N} \Big) \boldsymbol{\rho}/2 - \boldsymbol{\rho} \Big((1 - i\sin(t\chi)\boldsymbol{\sigma_z}) \otimes \boldsymbol{N} \Big)/2 \end{aligned}$$
car
$$(\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} - i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z})(\cos(t\chi/2)\boldsymbol{I} + i\sin(t\chi/2)\boldsymbol{\sigma_z}) = 1 - i\sin(t\chi)\boldsymbol{\sigma_z}.$$
Ainsi la moyenne donne
$$\Big(\boldsymbol{\sigma_z} \otimes \boldsymbol{a}\Big)\boldsymbol{\rho}\Big(\boldsymbol{\sigma_z} \otimes \boldsymbol{a}\Big)/2 + \boldsymbol{a}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{a}^\dagger/2 - \boldsymbol{N}\boldsymbol{\rho}/2 - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{N}/2$$
qui s'écrit aussi
$$\begin{aligned} \Big((|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \otimes \boldsymbol{a} \Big) \boldsymbol{\rho} \Big((|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \otimes \boldsymbol{a}^\dagger \Big)/2 + \Big((|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \otimes \boldsymbol{a} \Big) \boldsymbol{\rho} \Big((|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \otimes \boldsymbol{a}^\dagger \Big)/2 \\ - \Big((|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \otimes \boldsymbol{N} \Big) \boldsymbol{\rho}/2 - \boldsymbol{\rho} \Big((|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \otimes \boldsymbol{N} \Big)/2 \\ = \Big(|g\rangle\langle g| \otimes \boldsymbol{a} \Big) \boldsymbol{\rho} \Big(|g\rangle\langle g| \otimes \boldsymbol{a}^\dagger \Big) + \Big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{a} \Big) \boldsymbol{\rho} \Big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{a}^\dagger \Big) \\ - \Big((|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \otimes \boldsymbol{N} \Big) \boldsymbol{\rho}/2 - \boldsymbol{\rho} \Big((|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \otimes \boldsymbol{N} \Big)/2 \\ = \mathcal{L}_{|g\rangle\langle g| \otimes \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho}) + \mathcal{L}_{|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho}) \end{aligned}$$

7. Comme $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = -i[\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{\rho}] + \kappa\mathcal{L}_{\boldsymbol{B}(t)}(\boldsymbol{\rho})$, les moyennes sont formées en sommant celles des questions 4 et 6.

8. On a $\left[\boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|, \boldsymbol{\rho}_\infty\right] = 0$, $\left[|e\rangle\langle e| \otimes (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^\dagger)\ ,\ \boldsymbol{\rho}_\infty\right] = 0$, ainsi que $\mathcal{L}_{|g\rangle\langle g|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho}_\infty) = \mathcal{L}_{|e\rangle\langle e|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho}_\infty) = 0$.

9. (a) Tous ces projecteurs sont de projecteurs orthogonaux sur des sous-espaces de l'espace de l'Hilbert (qubit/oscillateur harmonique) qui sont eux même orthogonaux entre eux. Ils forment une somme directe orthogonal de l'espace de Hilbert. On a aussi:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_q \otimes \boldsymbol{I}_c = (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) \otimes \boldsymbol{I}_c = |g\rangle\langle g| \otimes \left(\sum_{n\geq 0} |n\rangle\langle n|\right) + |e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{I}_c$$
$$= |g\rangle\langle g| \otimes \left(\sum_{n<\bar{n}} |n\rangle\langle n|\right) + |g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| + |g\rangle\langle g| \otimes \left(\sum_{n>\bar{n}} |n\rangle\langle n|\right) + |e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{I}_c$$

Π_+, Π_- et Π_c commutent avec $\boldsymbol{N}$ car $\sum_{n<\bar{n}} |n\rangle\langle n|$, $\sum_{n>\bar{n}} |n\rangle\langle n|$ et $|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|$ commutent aussi avec $\boldsymbol{N}$.

(b) On a $\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}\Pi_+) = \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{N}\Pi_+\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\Pi_+\right)$. Du fait que l'on regarde ici que les composantes selon $|g\rangle$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}\Pi_+) &= -i\bar{u}_q \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{N}\Pi_+\left[\boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|, \boldsymbol{\rho}\right]\Pi_+\right) \\
&\qquad + \kappa \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{N}\Pi_+\mathcal{L}_{|g\rangle\langle g|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_+\right) \\
&= -i\bar{u}_q \operatorname{Tr}\left(\left[\boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|, \boldsymbol{\rho}\right]\Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+\right) + \kappa \operatorname{Tr}\left(\mathcal{L}_{|g\rangle\langle g|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+\right) \\
&= iu_q \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}\left[\boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|, \Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+\right]\right) + \kappa \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}\mathcal{L}^*_{|g\rangle\langle g|\otimes\boldsymbol{a}}(\Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+)\right)
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}^*_{\boldsymbol{B}}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}) = \boldsymbol{B}^\dagger\widetilde{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{B} - \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^\dagger\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{B}^\dagger\boldsymbol{B}$. Or on a $\Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+ = \Pi_+\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}\Pi_+$ et aussi $|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\Pi_+ = \Pi_+|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| = 0$. Donc $\left[\boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|, \Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+\right] = 0$. On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*_{|g\rangle\langle g|\otimes\boldsymbol{a}}(\Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+) &= \left(|g\rangle\langle g| \otimes \boldsymbol{a}^\dagger\right)\Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+\left(|g\rangle\langle g| \otimes \boldsymbol{a}\right) \\
&\quad - \left(|g\rangle\langle g| \otimes \boldsymbol{N}\right)\Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+/2 - \Pi_+\boldsymbol{N}\Pi_+\left(|g\rangle\langle g| \otimes \boldsymbol{N}\right)/2 \\
&= |g\rangle\langle g| \otimes \boldsymbol{a}^\dagger\left(\sum_{n>\bar{n}} n|n\rangle\langle n|\right)\boldsymbol{a} - \left(|g\rangle\langle g| \otimes \left(\sum_{n>\bar{n}} n^2|n\rangle\langle n|\right)\right) \\
&= |g\rangle\langle g| \otimes \left(\sum_{n>\bar{n}} n(n+1)|n+1\rangle\langle n+1| - n^2|n\rangle\langle n|\right) \\
&= |g\rangle\langle g| \otimes \left(-\bar{n}(\bar{n}+1)|\bar{n}+1\rangle\langle\bar{n}+1| - \sum_{n>\bar{n}} n|n\rangle\langle n|\right).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) Comme $\operatorname{Tr}(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}+1\rangle\langle\bar{n}+1|\boldsymbol{\rho}) \geq 0$, on voit que $\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+) \leq -\kappa\operatorname{Tr}(\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+)$. Avec le lemme de Gronwall, on a $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+) \leq \operatorname{Tr}(\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}(0)\Pi_+)\, e^{-\kappa t}$. Ainsi $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+) \to 0$ quand $t \to \infty$ car $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+) \geq 0$.

Comme $\boldsymbol{N} \geq 0$ et $\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+ \geq 0$, cela implique que $\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+ \mapsto 0$. Comme

$$\boldsymbol{N}\Pi_+\boldsymbol{\rho}\Pi_+ = \sum_{n>\bar{n}} n(|g\rangle\langle g| \otimes |n\rangle\langle n|)\boldsymbol{\rho}(|g\rangle\langle g| \otimes |n\rangle\langle n|)$$

et pour $n > \bar{n}$ chaque opérateur $(|g\rangle\langle g| \otimes |n\rangle\langle n|)\boldsymbol{\rho}(|g\rangle\langle g| \otimes |n\rangle\langle n|) \geq 0$, on voit que, pour tout $n > \bar{n}$ chaque opérateur $(|g\rangle\langle g| \otimes |n\rangle\langle n|)\boldsymbol{\rho}(t)(|g\rangle\langle g| \otimes |n\rangle\langle n|) \mapsto 0$, c'est à dire que $\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+ \mapsto 0$.

(d) Comme $\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+ \mapsto 0$, on a $\operatorname{Tr}(\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)\Pi_+) = \operatorname{Tr}(\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)) \mapsto 0$. Mais $\Pi_+ \geq 0$ et $\boldsymbol{\rho} \geq 0$, donc $\Pi_+\boldsymbol{\rho}(t)$ converge vers 0 quand $t \mapsto +\infty$.

(e) On a

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho}_c) = \operatorname{Tr}\left(\Pi_c \frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}\Pi_c\right) = \kappa \operatorname{Tr}\left(\Pi_c \mathcal{L}_{|g\rangle\langle g|\otimes \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_c\right) + \kappa \operatorname{Tr}\left(\Pi_c \mathcal{L}_{|e\rangle\langle e|\otimes \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_c\right)$$

car $\operatorname{Tr}\left(\Pi_c\big[\boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|, \boldsymbol{\rho}\big]\Pi_c\right) = 0$ et $\operatorname{Tr}\left(\Pi_c\big[|e\rangle\langle e| \otimes (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^\dagger)\ ,\ \boldsymbol{\rho}\big]\Pi_c\right) = 0$. On a

$$\begin{aligned}\Pi_c \mathcal{L}_{|g\rangle\langle g|\otimes \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_c = &\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle \bar{n}|\boldsymbol{a}\big)\boldsymbol{\rho}\big(|g\rangle\langle g| \otimes \boldsymbol{a}^\dagger|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big) \\ &- (\bar{n}/2)\Big(\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho}\Pi_c + \Pi_c\boldsymbol{\rho}\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\Big)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left(\Pi_c \mathcal{L}_{|g\rangle\langle g|\otimes \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_c\right) = &(\bar{n}+1)\operatorname{Tr}\left(\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}+1\rangle\langle\bar{n}+1|\big)\boldsymbol{\rho}\right) \\ &- \bar{n}\operatorname{Tr}\left(\Big(\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho}\right) \\ &= -\bar{n}\operatorname{Tr}\left(\Big(\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho}\right)\end{aligned}$$

car $\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}+1\rangle\langle\bar{n}+1|\big)\boldsymbol{\rho} = 0$ puisque $\Pi_+\boldsymbol{\rho} = 0$. On a aussi

$$\begin{aligned}\Pi_c \mathcal{L}_{|e\rangle\langle e|\otimes \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_c = &\big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{a}\big)\boldsymbol{\rho}\big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{a}^\dagger\big) \\ &- (1/2)\Big(\big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{N}\big)\boldsymbol{\rho}\Pi_c + \Pi_c\boldsymbol{\rho}\big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{N}\big)\Big)\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Tr}\left(\Pi_c \mathcal{L}_{|e\rangle\langle e|\otimes \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_c\right) = \operatorname{Tr}\left(\big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{N}\big)\boldsymbol{\rho}\right) - \operatorname{Tr}\left(\big(|e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{N}\big)\boldsymbol{\rho}\right) = 0.$$

Ainsi $\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho}_c) = -\kappa\bar{n}\operatorname{Tr}\left(\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho}\right)$. On conclut avec $|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| = \Pi_c|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\Pi_c$ car $\Pi_+|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| = \Pi_-|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| = 0$ et $\Pi_c|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| = |g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|$.

(f) On a donc $\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}\left(\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho}\right) = \operatorname{Tr}\left(\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}\right) = 0$ ce qui donne, avec des calculs similaires ceux de la question précédente et compte tenu du fait que $\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho} = 0$ et $\Pi_+\boldsymbol{\rho} = 0$, que

$$\operatorname{Tr}\left(\big(|e\rangle\langle e| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho}\right) = 0.$$

Donc $\big(|e\rangle\langle e| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho} = 0$ et on conclut avec $|e\rangle\langle e| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| = \Pi_c|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\Pi_c$.

(g) Comme $\big(|g\rangle\langle g| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho} = 0$, on voit que $\boldsymbol{\rho}_e = |e\rangle\langle e| \otimes \boldsymbol{\xi}$ où $\boldsymbol{\xi}$ est un opérateur hermitien non négatif sur l'espace de Hilbert des photons et de trace ≤ 1. Comme $\big(|g\rangle\langle g|\otimes|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho} = 0$ on a aussi $\big(|e\rangle\langle e|\otimes|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big)\boldsymbol{\rho}\big(|g\rangle\langle g|\otimes|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\big) = 0$. On en déduit $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi} = -i\bar{u}_c[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^\dagger, \boldsymbol{\xi}]+\kappa\mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi})$. On sait que la trace est conservée par cette évolution et donc que $\boldsymbol{\xi}$ converge vers $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\xi}(0))\,|\alpha\rangle\langle\alpha|$ avec $\alpha = -2i\bar{u}_c/\kappa \neq 0$ car $\bar{u}_c > 0$. Or $\mathrm{Tr}\,(|e\rangle\langle e| \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\boldsymbol{\rho}) = \mathrm{Tr}\,(|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\boldsymbol{\xi}) = 0$ et donc $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\xi}(0))\,\mathrm{Tr}\,(|\alpha\rangle\langle\alpha||\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\xi}(0))\,e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}/n! = 0$. On a nécessairement $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\xi}(0)) = 0$, et donc $\boldsymbol{\xi} = 0$.

(h) Pour $\boldsymbol{\rho}$ dans l'ensemble Ω-limite, $\Pi_+\boldsymbol{\rho} = 0$ et $\Pi_c\boldsymbol{\rho} = 0$. Donc nécessairement $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_-$. On a aussi

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}_- = \Pi_-\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}\Pi_- = -i\bar{u}_q\Pi_-\big[\boldsymbol{\sigma_x}\otimes|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|, \boldsymbol{\rho}\big]\Pi_- - i\bar{u}_c\Pi_-\big[|e\rangle\langle e|\otimes(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^\dagger)\ ,\ \boldsymbol{\rho}\big]\Pi_- \\ + \kappa\Pi_-\mathcal{L}_{|g\rangle\langle g|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_- + \kappa\Pi_-\mathcal{L}_{|e\rangle\langle e|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho})\Pi_-.$$

Avec $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_-$, on a $|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}|\bar{n}\rangle\langle\bar{n}| = 0$ et donc $\big[\boldsymbol{\sigma_x} \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{n}|, \boldsymbol{\rho}\big] = 0$. De même $\big[|e\rangle\langle e| \otimes (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^\dagger)\ ,\ \boldsymbol{\rho}\big] = 0$ et $\mathcal{L}_{|e\rangle\langle e|\otimes\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\rho}) = 0$ car $|e\rangle\langle e|\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}|e\rangle\langle e|$. Ainsi $\boldsymbol{\rho} = |g\rangle\langle g|\otimes\boldsymbol{\xi}$ avec $\boldsymbol{\xi}$ un opérateur densité sur l'espace des photons qui vérifie donc

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi} = \kappa\mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi}).$$

On sait que $\boldsymbol{\xi}$ converge vers $|0\rangle\langle 0|$. Ainsi l'ensemble Ω-limite se réduit au point d'équilibre $\boldsymbol{\rho}_\infty$. Ce point d'équilibre est donc unique.