Dynamique et contrôle des systèmes non-linéaires — Master MVA 2009-2010

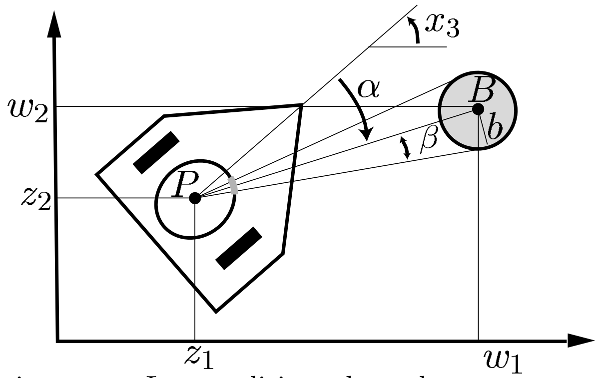
Examen, durée 3h

Sujet donné par Karine Beauchard et Pierre Rouchon. Tous les documents sont autorisés.

Les deux problèmes sont indépendants et notés à égalité.

Problème 1 : Suivi d'un ballon à partir de données caméra

Le robot ci-contre (position P de coordonnées (z_1, z_2), orientation $x_3 \in \mathbb{S}^1$ un angle défini modulo 2π) est équipé de deux roues parallèles commandées séparément en vitesse et d'une caméra 1D circulaire centrée en P. Après un traitement approprié d'image, on dispose à chacun instant de la direction relative de la balle (centre B de coordonnées (w_1, w_2), rayon b) repérée par l'angle $\alpha \in \mathbb{S}^1$ ainsi que de sa taille apparente décrite par l'angle $\beta \in]0, \pi/2[$.



La balle se déplace à une vitesse constante mais inconnue. Les conditions de roulement sans glissement des roues conduisent au modèle cinématique

$$\frac{d}{dt}z_1 = u_1 \cos x_3, \quad \frac{d}{dt}z_2 = u_1 \sin x_3, \quad \frac{d}{dt}x_3 = u_2$$

où u_1 et u_2 sont les deux contrôles scalaires du robot (proportionnels à la somme et à la différence des vitesses des roues). On note (x_1, x_2) (resp. (x_4, x_5)) les coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{PB}$ (resp. de la vitesse de la balle $\frac{d}{dt}B$). On note aussi $y_1 = \cos\alpha$, $y_2 = \sin\alpha$ et $y_3 = \sin\beta$. On pose $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $u = (u_1, u_2)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

1. Montrer que la dynamique du système $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ avec $y = h(x)$ conduit à

$$f(x,u) = (x_4 - u_1 \cos x_3,\ x_5 - u_1 \sin x_3,\ u_2,\ 0,\ 0)$$
$$h(x) = \left(\frac{x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}},\ \frac{x_2 \cos x_3 - x_1 \sin x_3}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}},\ \frac{b}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}} \right).$$

2. On considère dans cette question la trajectoire rectiligne où la vitesse de la balle a pour composantes $(\bar{v}, 0)$, $\bar{v} > 0$ et où le robot suit la balle à la distance $\bar{P}\bar{B} = \bar{d} > b > 0$.
   (a) Montrer que cette trajectoire est associée à l'équilibre $\bar{x} = (\bar{d}, 0, 0, \bar{v}, 0)$, $\bar{u} = (\bar{v}, 0)$ de $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$. Quelle est la valeur $\bar{y} = h(\bar{x})$?
   (b) On pose $x = \bar{x} + X$, $u = \bar{u} + U$, $y = \bar{y} + Y$ où X, U et Y sont des petites variations autour de l'équilibre ci-dessus. Calculer, en fonction de $\bar{v}$ et $\bar{d}$ et b, les matrices A, B et C de l'approximation au premier ordre des équations vérifiées par X, U et Y : $\frac{d}{dt}X = AX + BU$ et $Y = CX$.
   (c) Avec (X_4, X_5) pris comme des paramètres constants, on considère ici le sous-système d'état (X_1, X_2, X_3). Montrer que, pour tous gains $k_1, k_2 > 0$, le feedback linéaire $U = (-k_1 Y_3, k_2 Y_2)$ stabilise asymptotiquement ce sous-système vers un point stationnaire $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$. Exprimer $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ en fonction des gains (k_1, k_2), des paramètres $(\bar{d}, \bar{v}, b)$ et des deux constantes (X_4, X_5).

3. On considère toujours l'approximation au premier ordre $\frac{d}{dt}X = AX + BU$, $Y = CX$ de la question précédente.
   (a) Le système linéaire $\frac{d}{dt}X = AX + BU$, $Y = CX$ est-t-il observable ?
   (b) Montrer que le sous-système formé par l'état partiel (X_1, X_4) le contrôle U_1 et la sortie Y_3 est observable. Donner les équations de l'observateur asymptotique associé. On notera L_1 et L_4 les gains de cet observateur et on donnera les conditions sur L_1 et L_4 qui assurent la convergence vers l'état partiel (X_1, X_4).
   (c) On considère maintenant le sous-système restant formé par les trois autres composantes (X_2, X_3, X_5), l'autre contrôle U_2 et la sortie Y_2. Montrer que les combinaisons linéaires $W_2 = X_2 - \bar{d}X_3$ et $W_5 = X_5 - \bar{v}X_3$ sont observables. En déduire un observateur asymptotique de W_2 et W_3 de la forme

$$\frac{d}{dt}\hat{X}_2 = (A\hat{X} + BU)_2 + L_2((C\hat{X})_2 - Y_2), \quad \frac{d}{dt}\hat{X}_3 = (A\hat{X} + BU)_3,$$
$$\frac{d}{dt}\hat{X}_5 = (A\hat{X} + BU)_5 + L_5((C\hat{X})_2 - Y_2).$$

   On donnera les conditions sur les deux gains L_2 et L_5 qui assurent la convergence de $(\hat{X}_2 - \bar{d}\hat{X}_3, \hat{X}_5 - \bar{v}\hat{X}_3)$ vers (W_2, W_5).

4. On reprend à partir de maintenant les notations du cours sur les observateurs invariants. Montrer que le système non-linéaire $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ est invariant par rotation, i.e., par rapport à l'action suivante du groupe $G = \mathbb{S}^1$ sur l'état x et sur le contrôle u $(g \in G)$:

$$\varphi_g(x) = (x_1 \cos g - x_2 \sin g, x_1 \sin g + x_2 \cos g, x_3 + g, x_4 \cos g - x_5 \sin g, x_4 \sin g + x_5 \cos g)$$
$$\psi_g(u) = u$$

5. Montrer la sortie $y = h(x)$ est équi-variante. On donnera l'action $\varrho_g(y)$ de G sur la sortie et on montrera que $E_2 = \hat{y}_2 y_1 - \hat{y}_1 y_2$ et $E_3 = \hat{y}_3 - y_3$ sont deux erreurs invariantes de sorties.

6. Avec la normalisation la plus simple issue de l'équation $x_3 + g = 0$, construire un repère invariant $(W_1(x), W_2(x), W_3(x), W_4(x), W_5(x))$. On donnera les composantes des vecteurs W_i en fonction de x.

7. Montrer qu'au premier ordre autour de l'équilibre $\bar{x}$, $E_2 \approx \hat{Y}_2 - Y_2$ et $E_3 \approx \hat{Y}_3 - Y_3$.

8. Déduire des deux questions précédentes un observateur invariant qui redonne, au premier ordre autour de l'équilibre $(\bar{x}, \bar{u})$, l'observateur linéaire résultant des questions 3b et 3c. On donnera les équations de l'observateur invariant où apparaîtront les gains constants (L_1, L_4) et (L_2, L_5).

Problème 2

Le but de ce problème est d'étudier des systèmes dynamiques de la forme

$$\frac{dX}{dt} = AX + u(t)BX \tag{1}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices **antisymétriques**, $X : t \in [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ est l'état et $u : t \in [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est la commande.

On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Rappel : Pour une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, et un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

est dit "**contrôlable dans** Ω ", si, pour tout $x_0, x_f \in \Omega$, il existe un temps $T > 0$ et un contrôle $u : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ continu par morceaux tel que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

- est définie sur $[0, T]$,
- est à valeurs dans Ω, c'est-à-dire $x(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0, T]$,
- vérifie $x(T) = x_f$.

1. Discuter l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (1). Préciser les hypothèses sur u et l'intervalle de définition de X.
2. Montrer que $\|X\|^2$ est constante le long des trajectoires de (1).
3. Le système (1) est-il contrôlable dans $\mathbb{R}^n$?
4. **Dorénavant, on suppose que** $Ae_1 = 0$**.** Dans cette question, on considère le système (1) en boucle fermée, avec la commande $u(X) = \langle X, Be_1 \rangle$, c'est-à-dire le système

$$\frac{dX}{dt} = AX + \langle X, Be_1 \rangle BX \tag{2}$$

   (a) Discuter l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (2). Montrer qu'elles sont définies sur $[0, +\infty)$.

   (b) Pourquoi $-e_1$ est-il un équilibre du système (2) ?

   (c) Montrer que le système linéarisé de (2) autour de l'équilibre $-e_1$ est

$$\frac{dX}{dt} = AX - \langle X, Be_1 \rangle Be_1. \tag{3}$$

   (d) Montrer que $\langle X, e_1 \rangle$ est constant le long des trajectoires de (3).

(e) 0 est-il un équilibre asymptotiquement stable pour le système (3) ?

5. **Dorénavant, on prend**

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le but de cette question est d'étudier le système linéarisé (3)

(a) 0 est-il un équilibre stable pour le système linéaire (3) ?

(b) Montrer que, pour tout $X_0 \in \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, la solution de (3) de condition initiale $X(0) = X_0$ reste dans $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

(c) La question précédente permet de considérer la restriction du système (3) à $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Étudier la stabilité de l'équilibre 0 du système (3) restreint à $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

(d) Peut-on en déduire un résultat de stabilité pour le système non linéaire (2) ?

6. Le but de cette question est d'étudier le système non linéaire (2).

(a) Montrer que $t \mapsto \langle X(t), e_1 \rangle$ décroît le long des trajectoires de (2).

(b) Soit $X_0 \in \mathbb{S}^2$ et X la solution de (2) de condition initiale $X(0) = X_0$. On suppose que $t \mapsto \langle X(t), e_1 \rangle$ est constante sur $[0, +\infty)$. Montrer que $X_0 \in \{-e_1, e_1\}$. Indication : *On pourra montrer que X résout, en fait, l'équation $dX/dt = AX$ et en déduire l'expression explicite de $X(t)$ en fonction de X_0.*

(c) Montrer que, pour tout $X_0 \in \mathbb{S}^2$ telle que $X_0 \neq e_1$, la solution de (2) de condition initiale $X(0) = X_0$ converge vers $-e_1$ quand $t \to +\infty$.

7. Le but des questions suivantes est d'étudier le système (1) en boucle ouverte.

(a) Montrer que $(X(t) = -e_1, u(t) = 0)$ est une trajectoire de (1).

(b) Montrer que le système linéarisé de (1) autour de la trajectoire $(X = -e_1, u = 0)$ est

$$\frac{dX}{dt} = AX - u(t)Be_1 \tag{4}$$

8. Le but de cette question est d'étudier la contrôlabilité du linéarisé (4) dans $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$

(a) Montrer que, pour tout $u \in C^0([0, +\infty), \mathbb{R})$, les solutions de (4) vérifient $\langle X(t), e_1 \rangle =$ constante.

(b) Montrer que le système (4) est contrôlable dans $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

(c) Soit $T > 0$ et $(x_2^0, x_3^0), (x_2^f, x_3^f) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant la forme de Brunovsky proposer une commande explicite $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ qui amène la solution du système (4) de $X(0) = (0, x_2^0, x_3^0)$ à $X(T) = (0, x_2^f, x_3^f)$.

9. Le but de cette question est d'étudier la contrôlabilité du système non linéaire (1) sur la sphère $\mathbb{S}^2$, c'est-à-dire pour des conditions initiales $X_0 \in \mathbb{S}^2$.

(a) Quelle est l'allure des trajectoires du système (1) avec $u \equiv 0$?

(b) Montrer que, lorsque que C est une grande constante, les trajectoires de (1) avec $u(t) = C, \forall t \in [0, +\infty)$ ressemblent à des cercles sur $\mathbb{S}^2$, centrés sur l'axe e_3 et perpendiculaires à celui-ci.

(c) En déduire que (1) est contrôlable sur $\mathbb{S}^2$. Indication : *Pour $X_0, X_f \in \mathbb{S}^2$ on cherchera une trajectoire de (1) allant de X_0 à X_f en exploitant les deux questions précédentes.*

Correction de l'examen

Karine Beauchard, Pierre Rouchon

Suivi d'un ballon à partir de données caméra

1. Les formules pour f viennent du fait que $\overrightarrow{PB}$ a pour composantes $(w_1 - z_1, w_2 - z_2)$. Les formules donnant h font appel à de la géométrie plane élémentaire.
2. (a) Il suffit de vérifier que $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. On a $\bar{y} = (1, 0, b/\bar{d})$.

   (b) De $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})$ et $C = \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})$ on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{v} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{d}} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-b}{\bar{d}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) En boucle fermée on a deux sous-systèmes indépendants. Le premier porte sur X_1, $\frac{d}{dt}X_1 = X_4 - \frac{k_1 b}{\bar{d}^2}X_1$: il est exponentiellement stable dès que $k_1 > 0$ (X_4 est constant). Le second porte sur (X_2, X_3) :

$$\frac{d}{dt}X_2 = X_5 - \bar{v}X_3, \quad \frac{d}{dt}X_3 = \frac{k_2}{\bar{d}}X_2 - k_2 X_3.$$

   C'est un oscillateur amorti car $k_2 > 0$, $\frac{d^2}{dt^2}X_3 = -k_2\frac{d}{dt}X_3 - \frac{k_2\bar{v}}{\bar{d}}X_3 + \frac{k_2 X_5}{\bar{d}}$, comportant un terme constant $\frac{k_2 X_5}{\bar{d}}$.

3. (a) Il suffit de calculer le rang de $(C, CA, CA^2, CA^3, CA^4)$. Comme il vaut $4 < 5 = \dim X$, le système n'est pas observable.

   (b) On a

$$\frac{d}{dt}X_1 = X_4 - U_1, \quad \frac{d}{dt}X_4 = 0, \quad Y_3 = \frac{-b}{\bar{d}^2}X_1.$$

   Donc on obtient, en dérivant une fois Y_3 par rapport à t, $X_1 = -\frac{\bar{d}^2}{b}Y_3$ et $X_4 = U_1 - \frac{\bar{d}^2}{b}\frac{d}{dt}Y_3$. Donc ce sous-système est observable. L'observateur asymptotique associé,

$$\frac{d}{dt}\hat{X}_1 = \hat{X}_4 - U_1 + L_1\left(-\frac{b}{\bar{d}^2}\hat{X}_1 - Y_3\right), \quad \frac{d}{dt}X_4 = L_4\left(-\frac{b}{\bar{d}^2}\hat{X}_1 - Y_3\right),$$

   est convergent dès que $L_1, L_4 > 0$.

   (c) On a

$$\frac{d}{dt}X_2 = X_5 - \bar{v}X_3, \quad \frac{d}{dt}X_3 = U_2, \quad \frac{d}{dt}X_5 = 0, \quad Y_2 = \frac{1}{\bar{d}}X_2 - X_3.$$

   En dérivant une fois Y_2, on obtient $W_2 = \bar{d}Y_2$ et $W_5 = \bar{d}\left(\frac{d}{dt}Y_2 + U_2\right)$. Les dérivées d'ordres ≥ 2 ne donnent plus aucune information sur l'état. L'observateur proposé s'écrit

$$\frac{d}{dt}\hat{X}_2 = \hat{X}_5 - \bar{v}\hat{X}_3 + L_2\left(\frac{1}{\bar{d}}\hat{X}_2 - \hat{X}_3 - Y_2\right), \quad \frac{d}{dt}\hat{X}_3 = U_2, \quad \frac{d}{dt}\hat{X}_5 = L_5\left(\frac{1}{\bar{d}}\hat{X}_2 - \hat{X}_3 - Y_2\right).$$

Avec les variables $\hat{W}_2 = \hat{X}_2 - \bar{d}\hat{X}_3$ et $\hat{W}_5 = \hat{X}_5 - \bar{v}\hat{X}_3$ à la place de $\hat{X}_2$ et $\hat{X}_5$, il s'écrit

$$\frac{d}{dt}\hat{W}_2 = \hat{W}_5 - \bar{d}U_2 + L_2\left(\frac{1}{\bar{d}}\hat{W}_2 - Y_2\right), \quad \frac{d}{dt}\hat{X}_3 = U_2, \quad \frac{d}{dt}\hat{W}_5 = -\bar{v}U_2 + L_5\left(\frac{1}{\bar{d}}\hat{W}_2 - Y_2\right).$$

Le sous-système en $(\hat{W}_2, \hat{W}_5)$ est stable dès que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{L_2}{\bar{d}} & 1 \\ \frac{L_5}{\bar{d}} & 0 \end{pmatrix}$ est stable, soit $L_2, L_5 < 0$.

4. Il suffit de vérifier la relation de conjugaison $\frac{\partial \varphi_g}{\partial x}(x) \cdot f(x,u) = f(\varphi_g(x), \psi_g(u))$ pour tout x, u et g.
5. On remarque que les composantes de y sont des invariants scalaires $h(\varphi_g(x)) = h(x)$, $\forall x, g$, car elles portent sur des angles relatifs. Ainsi y est équi-variante de façon triviale avec $\varrho_g(y) = y$. Les quantités E_2 et E_3 sont aussi trivialement invariantes. Lorsque $\hat{y} = y$ alors $E_2 = E_3 = 0$. Donc E_2 et E_3 sont deux erreurs invariantes de sorties.
6. La normalisation issue de $x_3 + g = 0$ donne $g = -x_3$. Un repère invariant est construit à partir des vecteurs qui forment la matrice $(\frac{\partial \varphi}{\partial x})^{-1}$ évaluée en $g = -x_3$ et x. Les composantes des cinq vecteurs $W_i(x)$ sont formés par les cinq colonnes de cette matrice qui vaut
$$\begin{pmatrix} \cos x_3 & -\sin x_3 & 0 & 0 & 0 \\ \sin x_3 & \cos x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos x_3 & -\sin x_3 \\ 0 & 0 & 0 & \sin x_3 & \cos x_3 \end{pmatrix}$$
7. Au premier ordre on a $y_1 \approx 1$ avec $y_2 \approx \frac{1}{\bar{d}}x_2 - x_3$ et $\hat{y}_1 \approx 1$ avec $\hat{y}_2 \approx \frac{1}{\bar{d}}\hat{x}_2 - \hat{x}_3$. Donc $E_2 \approx \hat{y}_2 - y_2 \approx \hat{Y}_2 - Y_2$. De même $E_3 \approx \hat{Y}_3 - Y_3$.
8. L'observateur asymptotique linéaire s'écrit
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_4 \\ \hat{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_4 - U_1 \\ \hat{X}_5 - \bar{v}X_3 \\ U_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L_1(\hat{Y}_3 - Y_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L_4(\hat{Y}_3 - Y_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L_2(\hat{Y}_2 - Y_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L_5(\hat{Y}_2 - Y_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Le premier vecteur du membre de droite correspond à l'approximation de $f(\hat{x}, u)$, le second vecteur à celle de $W_1(x)$, le troisième à celle de $W_4(x)$, le quatrième à celle de $W_2(x)$ et le cinquième à celle de $W_5(x)$. Ainsi l'observateur invariant le plus simple coïncidant au premier ordre avec l'observateur linéaire est
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_4 - u_1\cos\hat{x}_3 \\ \hat{x}_5 - u_1\sin\hat{x}_3 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L_1E_3\begin{pmatrix} \cos\hat{x}_3 \\ \sin\hat{x}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L_4E_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos\hat{x}_3 \\ \sin\hat{x}_3 \end{pmatrix} + L_2E_2\begin{pmatrix} -\sin\hat{x}_3 \\ \cos\hat{x}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L_5E_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin\hat{x}_3 \\ \cos\hat{x}_3 \end{pmatrix}.$$