École Nationale Supérieure des Mines de Paris

Enseignement spécialisé d'optimisation
Travaux Pratiques Scilab

23 mai 2008

1 Planification optimale linéaire quadratique

On s'intéresse ici aux systèmes linéaires du type

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u \tag{1}$$

où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande $u \in \mathbb{R}^m$ et, pour tout $t \in [0, +\infty[$ les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont de tailles $n \times n$ et $n \times m$, respectivement. On considère le coût avec pondération finale

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left(x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t) \right) dt \tag{2}$$

où R et S_f sont symétriques positives et Q est symétrique définie positive.

On ajoute à l'objectif de minimiser ce critère quadratique une contrainte finale, permettant d'exprimer le souhait de se rendre exactement en un point donné

$$x(t_f) = \psi \tag{3}$$

1. Former le problème aux deux bouts associé au problème de minimisation de J sous les contraintes (1) et (3).

2. Ce problème linéaire quadratique se résoud par la méthode dite de "balayage" consistant à ramener les conditions limites du même côté. On cherche alors les adjoints et les multiplicateurs sous la forme $\lambda(t) = S(t)x + V(t)\nu$ et $\psi = V^T(t)x + H(t)\nu$.

   Après quelques calculs, on obtient la commande optimale par la résolution des équations suivantes

$$\frac{d}{dt}S(t) = -S(t)A(t) + S(t)B(t)Q^{-1}B^T(t)S(t) - R - A^T(t)S(t) \tag{4}$$

$$S(t_f) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\left(A^T(t) - S(t)B(t)Q^{-1}B^T(t) \right) V(t) \tag{6}$$

$$V(t_f) = I \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}H(t) = V^T(t)B(t)Q^{-1}B^T(t)V(t) \tag{8}$$

$$H(t_f) = 0 \tag{9}$$

   où I est la matrice identité de taille n. La commande optimale est alors

$$u(t) = -Q^{-1}B^T(t) \left(S(t) - V(t)H^{-1}(t)V^T(t) \right) x(t) - Q^{-1}B^T(t)V(t)H^{-1}(t)\psi$$

Exemple Soit le système dynamique

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

On souhaite calculer une commande $[0, \quad 3] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$ transférant le système de $x_0 = [-0.5 \quad 1]^T$ à $x_f = [-1 \quad 0]^T \triangleq \psi$ en minimisant le critère quadratique

$$J = \frac{1}{2}\int_0^3 u(t)^2 dt$$

(a) Former le système $(4-9)$.

(b) On cherche maintenant à résoudre ce système différentiel. Montrer qu'on peut d'abord calculer S et qu'il vient ensuite

$$V(t) = \exp\left(-(t-3)A^T\right)$$

et finalement

$$H(t) = -\int_t^{t_f} V^T(t)BB^T V(t)dt$$

(c) Calculer le contrôle optimal. Afficher ses valeurs ainsi que les trajectoires optimales.

2 Problème de Newton

Il s'agit du calcul de la surface de révolution minimisant la trainée en vol supersonique coiffant un engin cylindrique (voir Figure 1). Un calcul analytique de la traînée donne par intégration le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$J(r,u) = \frac{1}{2}r(l)^2 + \int_0^l \frac{ru^3}{1+u^2}dx$$

sous la contrainte $r(0) = a$, $\frac{dr}{dx} = -u$, où $[0,l] \ni x \mapsto r(x) \in \mathbb{R}$ est une fonction dérivable décroissante.

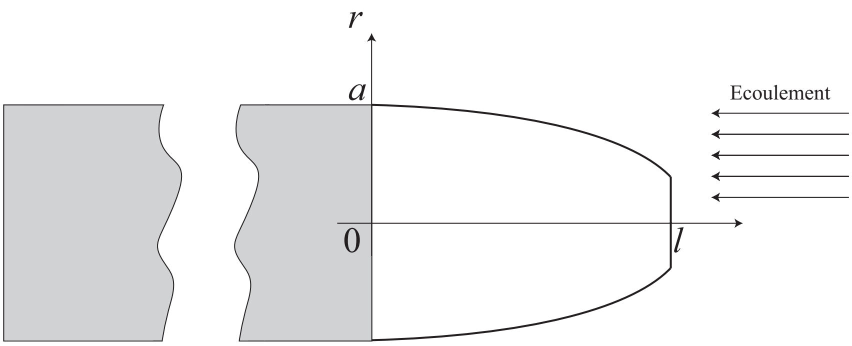

Figure 1: Problème de Newton.

On commencera par retrouver la solution analytique puis on appliquera deux méthodes numériques différentes pour arriver au même résultat. Pour les essais numériques on utilisera $a = 1$, $l = 4$.

Problème aux deux bouts

- Former l'Hamiltonien du problème et les conditions de stationnarité.
- Formuler le problème aux deux bouts.

Solution analytique

- Montrer que H est une constante le long de l'extrémale. Sous l'hypothèse que $r(l) \neq 0$ montrer que $u(l) = 1$ et $H = -\frac{r(l)}{2}$.
- Utiliser l'Hamiltonien dans l'équation différentielle satisfaite par l'adjoint pour obtenir

$$-\frac{1+u^2}{u^3}\frac{d}{du}\left(\frac{3}{4u}+\frac{u}{4}\right) = \frac{1}{r(l)}\frac{dx}{du}.$$

  Intégrer cette relation pour obtenir

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4u^4}+\frac{1}{u^2}-\frac{7}{4}+\log u\right) = \frac{l-x}{r(l)}.$$

- Éliminer $r(l)$ de la relation précédente en utilisant la conservation de l'Hamiltonien. Afficher $u(x)$ et $r(x)$.

Méthode numérique utilisant l'algorithme du gradient

Ecrire un script Scilab utilisant la méthode du gradient avec calcul par l'adjoint. Représenter u par N valeurs discretes ($N = 40$ ou plus). On pourra utiliser `ode, interpln`. Montrer les itérations successives. Commenter les résultats.

Méthode numérique par méthode de tir

Ecrire un script Scilab utilisant la méthode de tir. Il s'agit de trouver la valeur de $\lambda(t_0)$ telle que les conditions d'optimalité soient satisfaites. Pour trouver la bonne valeur de $\lambda(t_0)$ on pourra utiliser `fsolve`. Montrer les itération successives. On pourra utiliser la solution issue de l'algorithme du gradient comme point de départ de l'algorithme. Commenter les résultats. Faire varier l de 1 à 4 et afficher les résultats.