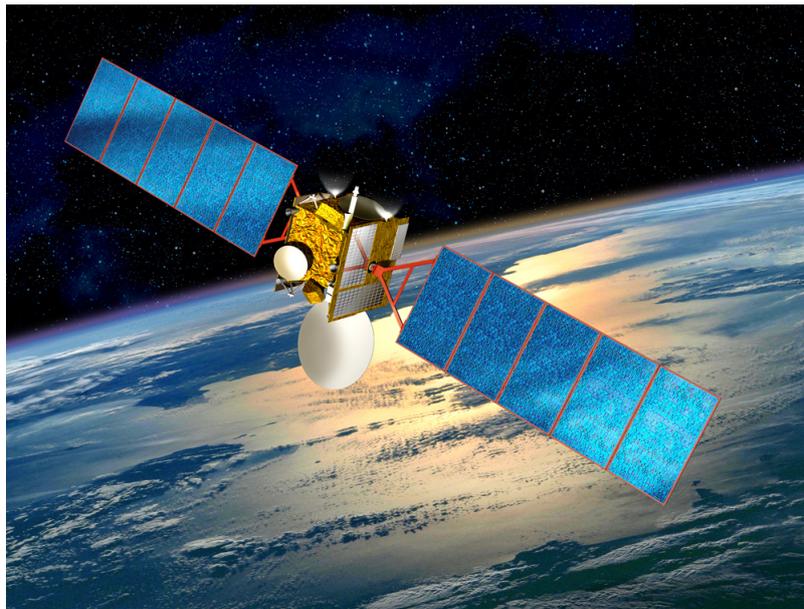


Université Pierre et Marie Curie

Master 2<sup>e</sup> année Ingénierie Mathématique

# Transfert orbital d'un engin à faible poussée



Stage réalisé au **Centre Automatique et Systèmes, Mines ParisTech** du  
02 mars au 30 septembre 2015

*Auteur :*  
**Somaya GOUMRI**

*Encadrant :*  
**François CHAPLAIS**

# Table des matières

<b>Présentation du stage et introduction</b>	<b>3</b>
<b>I Les transferts et rendez-vous orbitaux à faible poussée</b>	<b>5</b>
<b>1 Modélisation physique</b>	<b>6</b>
1.1 Mise à poste géostationnaire d'un satellite électro-ionique	6
1.1.1 Généralités sur les satellites géostationnaires	6
1.1.2 Mise en fonctionnement opérationnel	7
1.2 Dynamique d'un satellite	8
1.2.1 Repères et référentiels	8
1.2.2 Éléments orbitaux	10
1.2.3 Changement de repère	13
1.2.4 Mouvement képlérien	15
1.2.5 Mouvement perturbé	16
1.3 Perturbations orbitales	19
1.3.1 Perturbations gravitationnelles	19
1.3.2 Perturbations non gravitationnelles	21
1.4 Récapitulatif	22
<b>2 Formulation contrôle optimal</b>	<b>24</b>
2.1 Quelques notions en contrôle optimal	24
2.1.1 Forme générale d'un problème de contrôle optimal	24
2.1.2 Le principe du Maximum de Pontryagin	25
2.1.3 Problème aux limites	26
2.2 Transfert optimal à faible poussée	26
2.2.1 Critère à minimiser	27
2.2.2 État et contrôle du système	27
2.2.3 Dynamique et conditions aux limites	27
<b>II Résolution des problèmes de transfert et rendez-vous orbitaux à faible poussée : moyennisation</b>	<b>28</b>
<b>3 Approche théorique</b>	<b>29</b>
3.1 Moyennisation en contrôle optimal	29
3.1.1 Moyennisation au sens de Chaplais	29
3.1.2 Moyennisation par fenêtres	31
3.2 Démarche réalisée	33
3.2.1 Transformation de la dynamique	34
3.2.2 Moyennisation sur chaque période orbitale	38
3.3 Structure du contrôle optimal	38

3.3.1	Première minimisation . . . . .	39
3.3.2	Seconde minimisation . . . . .	39
3.3.3	Cas du transfert à temps minimum . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Approche numérique : outils et méthodes</b>	<b>41</b>
4.1	Problème aux limites . . . . .	41
4.2	Résolution numérique du problème aux deux bouts . . . . .	43
4.2.1	Processus mis en œuvre . . . . .	43
4.2.2	Obtention de la dynamique . . . . .	43
4.2.3	Résolution du système différentiel . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Résultats obtenus et interprétations</b>	<b>46</b>
5.1	Caractéristiques de la mission . . . . .	46
5.2	Mise à poste sans perturbation environnementale . . . . .	48
5.3	Mise à poste sous perturbation luni-solaire . . . . .	50
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>
<b>A</b>	<b>Quelques résultats supplémentaires</b>	<b>56</b>
A.1	Mise à poste sans perturbation environnementale . . . . .	56
A.2	Mise à poste sous perturbation luni-solaire . . . . .	57

# Présentation du stage et introduction

Le stage s'est déroulé du 02 mars 2015 au 30 septembre 2015, sous la direction de M. François Chaplais, ingénieur de recherche au Centre Automatique et Systèmes (CAS), Mines ParisTech. Le CAS, dirigé par M. Nicolas Petit, s'intéresse, comme son nom l'indique, à tout ce qui a trait à l'automatique. C'est-à-dire à l'analyse des systèmes dynamiques (qu'ils soient mécaniques, chimiques, aéronautiques, pétroliers, énergétiques, etc) sur lesquels on peut agir au moyen d'une *commande*. Ce domaine se situe à l'interface entre les sciences physiques et mathématiques, et trouve aisément son application dans des situations très concrètes telles que la gestion énergétique des véhicules hybrides, la thermique du bâtiment, la configuration de missions spatiales, etc. Le centre intervient aussi bien au niveau académique : recherche scientifique, enseignement (cours en Master et Cycle doctoral), encadrement de stages de Master et de thèses, qu'industriel grâce à des collaborations avec par exemple EDF, l'IFPEN, Air Liquide, et notamment le CNES, ce qui m'amène au sujet de stage.

**Présentation du sujet et contexte.** On s'intéresse dans ce manuscrit au problème du transfert orbital (passage d'une orbite à une autre) d'un engin spatial (satellite ou sonde par exemple) à propulsion électro-ionique. Le recours à de tels systèmes de propulsion est en plein essor, comme en témoigne par exemple la signature récente (en mars et mai 2014) de deux accords de coopération entre Snecma et respectivement Thales Alenia Space et Airbus Defence and Space, pour équiper en moteurs électro-ioniques leurs plates-formes de satellites de nouvelle génération, baptisées Spacebus et Eurostar. Les propulseurs électro-ioniques utilisent l'énergie électrique produite par des panneaux solaires pour éjecter un gaz à grande vitesse (xénon généralement), créant la force de poussée. Ces systèmes ne nécessitent donc pas le transport du carburant nécessaire au fonctionnement du moteur (seule la masse à éjecter est transportée), contrairement aux systèmes plasmiques à réponse impulsionnelle, dont la masse d'ergols peut représenter plusieurs tonnes (très souvent plus de la moitié de la masse totale pour un satellite de télécommunications). Le coût nécessaire à sa mise sur orbite peut ainsi être réduit, permettant aux opérateurs choisissant ce type de propulsion d'utiliser un lanceur moins puissant, et donc moins cher. En parallèle de cette réduction de coût, les opérateurs ont également la possibilité d'augmenter la charge utile envisageable de transporter.

Toutefois, la puissance électrique à bord étant limitée, ces systèmes de propulsion génèrent une poussée faible, augmentant de manière significative la durée de transfert, pouvant aller de trois à six mois pour la mise à poste géostationnaire d'un satellite. L'engin va réaliser un grand nombre de révolutions autour de la Terre avant d'atteindre l'orbite voulue. Son mouvement est ainsi caractérisé par deux niveaux d'évolution différents :

- une évolution *lente* pour les paramètres définissant la forme de l'orbite, puisque la faible poussée ne permet que de déformer très légèrement l'orbite sur chaque période orbitale ;
- une évolution *rapide* pour le paramètre caractérisant la position de l'engin sur son orbite.

Pour ces raisons, le contrôle *optimal* (à temps minimum ou à consommation minimum) des transferts orbitaux à faible poussée conduit à des systèmes différentiels raides, difficiles à résoudre numériquement. Pour y remédier, on a recours à des techniques de *moyennisation*, adaptées au

contrôle optimal, qui permettent d'éliminer le mouvement rapide, et d'approcher le problème initial grâce à l'introduction d'un problème moyenné, mieux conditionné numériquement. Cette approche a été réalisée avec succès par S. Geffroy lors de sa thèse [11], dans la situation du transfert orbital « képlérien » (où seule la poussée est considérée comme perturbation orbitale), puis sous des contraintes environnementales (prise en compte de l'aplatissement terrestre dans l'expression du potentiel d'attraction terrestre, éclipses solaires). Cependant, elle reposait sur une méthode de moyennisation, établie par F. Chaplais lors de sa thèse [9], supposant que le second membre de la dynamique soit *périodique* par rapport à la variable modélisant le mouvement rapide. Cette hypothèse nécessaire limite la prise en compte de contraintes environnementales supplémentaires, telles que l'attraction luni-solaire, dans les équations du mouvement de l'engin spatial, n'étant, dans ce cas, plus périodique par rapport à la variable rapide. Toutefois, une nouvelle technique de moyennisation en contrôle optimal a récemment été développée par F. Chaplais, purement numérique, permettant de s'affranchir de cette hypothèse contraignante de périodicité. Elle fait appel à des outils issus du traitement du signal, et a été formalisée théoriquement par S. Bernard, étudiante à l'ENS Cachan et ancienne stagiaire de F. Chaplais, qui a démontré un théorème fondamental montrant la validité de cette méthode, du point de vue de l'approximation [1]. Dès lors, de nouvelles possibilités deviennent envisageables au niveau de l'application de cette méthode récente au problème du transfert orbital à faible poussée. Ce qui nous conduit aux objectifs du stage.

**Objectifs du stage.** Il s'agit principalement d'adapter la nouvelle méthode de moyennisation, qualifiée de *fenêtrée*, au problème du transfert orbital à faible poussée, sous perturbation luni-solaire. En effet, la prise en compte des effets de l'attraction gravitationnelle exercée par la Lune et le Soleil conduit à un système comportant plusieurs périodes (rotation du satellite autour de la Terre, rotation de la Lune et du Soleil autour de la Terre, dans un repère géocentrique). Plus précisément, il fallait

- étudier le problème du point de vue de la mécanique spatiale, en établissant notamment les équations du mouvement d'un tel engin spatial, soumis aux perturbations orbitales telles que la poussée ou l'attraction luni-solaire ;
- déterminer la forme du problème adaptée permettant l'application de la méthode de moyennisation par fenêtres ;
- étudier les problèmes de contrôle optimal associés (temps minimum et consommation minimum) en utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin ([5]-[22]) ;
- résoudre numériquement le problème de transfert à faible poussée sous perturbation luni-solaire, sous Matlab, en prenant l'exemple de la mise à poste géostationnaire électro-ionique d'un satellite de télécommunications.

L'organisation du manuscrit va suivre naturellement l'ordre de ce cahier des charges.

**Première partie**

**Les transferts et rendez-vous orbitaux à  
faible poussée**

# Chapitre 1

## Modélisation physique

On s'attache dans ce chapitre à présenter un exemple classique de transfert orbital, la mise à poste géostationnaire d'un satellite à propulsion électro-ionique, sujet au cœur de ce document. Cette description générale va conduire à l'étude de son mouvement, et à l'introduction de concepts et notions nécessaires à la bonne compréhension de sa dynamique.

### 1.1 Mise à poste géostationnaire d'un satellite électro-ionique

Les satellites artificiels jouent un rôle central de nos jours, et l'on retrouve leur utilisation dans de nombreux domaines tels que les télécommunications, le positionnement (navigation GPS), le renseignement militaire, etc. Au niveau scientifique, ils aident par exemple à l'observation astronomique ou aux prévisions météorologiques. Toutefois, on va s'intéresser plus particulièrement aux satellites dits *géostationnaires*, dont l'exemple le plus probant est celui des satellites de télécommunications. Ils assurent la transmission d'informations entre différents points terrestres, grâce à ses applications en téléphonie, télévision, radio, etc. Ils ont ainsi une influence économique majeure, réalisant des revenus très souvent supérieurs aux coûts générés.

#### 1.1.1 Généralités sur les satellites géostationnaires

##### Définition

Un satellite est dit géostationnaire lorsqu'il est *fixe* par rapport à un observateur terrestre. Pour que cet effet soit réalisé, le satellite doit se situer sur une orbite particulière, qualifiée également de géostationnaire. Cette dernière présente des caractéristiques très précises de forme et de position : elle est circulaire, de période de révolution égale à la période de rotation de la Terre, et se situe à l'altitude de 42165,8 km dans le plan équatorial. Cette particularité de géostationnarité trouve tout son intérêt dans le secteur des télécommunications : en effet, une antenne située sur la Terre souhaitant voir un satellite situé à une position donnée sur l'orbite géostationnaire sera toujours dirigée vers la même direction.

##### Structure et caractéristiques

Un satellite artificiel peut se diviser en deux parties :

- une *charge utile*, contenant l'ensemble des outils nécessaires à la réalisation de la mission qui lui a été attribuée. Pour un satellite de télécommunications, il peut s'agir d'antennes ou d'amplificateurs ;
- la *plate-forme de service*, regroupant les instruments assurant son bon fonctionnement. Typiquement, la structure du satellite, le système de propulsion (moteur et carburant) ou bien le système de production d'énergie (panneaux solaires pour la génération d'électricité) en font partie.

### 1.1.2 Mise en fonctionnement opérationnel

Après les étapes de fabrication du satellite et de préparation de la mission, se succèdent celles de délivrance et de mise en fonctionnement de l'engin. La mise sur orbite d'un satellite sur l'orbite géostationnaire comporte trois phases distinctes :

1. Dans un 1<sup>er</sup> temps, l'engin est transporté par un lanceur (Ariane par exemple) sur une orbite intermédiaire dite de *transfert* (GTO pour Geostationary Transfer Orbit), dont le point le plus bas est situé entre 180 et 500 km d'altitude (périgée de l'orbite) et le point le plus haut à l'altitude géostationnaire (apogée de l'orbite). En effet, la plupart des lanceurs ne sont pas conçus pour placer directement un satellite sur orbite géostationnaire. D'où la phase intermédiaire suivante.
2. Le satellite, muni de son propre système de propulsion, poursuit son déplacement jusqu'à atteindre la position souhaitée sur l'orbite géostationnaire. Les manœuvres (incréments de vitesse) nécessaires à la correction de sa trajectoire sont assurées via un réseau de stations de commandes au sol. On parle de *mise à poste*.
3. Une fois sur la position de stationnement voulue, le satellite doit s'y maintenir. Ce dernier est soumis à des forces perturbatrices telles que l'attraction luni-solaire, qui vont modifier son orbite, ne le rendant plus fixe par rapport à la Terre. L'ensemble des manœuvres permettant de corriger cet écart forme le *maintien à poste*.

Seule la phase de mise à poste sera traitée, étant un exemple particulier de transfert orbital (passage d'une orbite donnée à une autre). Habituellement, cette étape est réalisée par un système de propulsion chimique impulsif, de même type que les lanceurs classiques. Cependant, la recherche perpétuelle de réduction des coûts a conduit à envisager l'utilisation de systèmes de propulsion électro-ionique, permettant entre autres d'augmenter le rendement possible. En effet, la masse de carburant nécessaire au fonctionnement de ces systèmes est bien moindre en comparaison des ergols nécessaires aux systèmes impulsifs (pouvant dans ce cas représenter plus de la moitié de la masse totale du satellite).

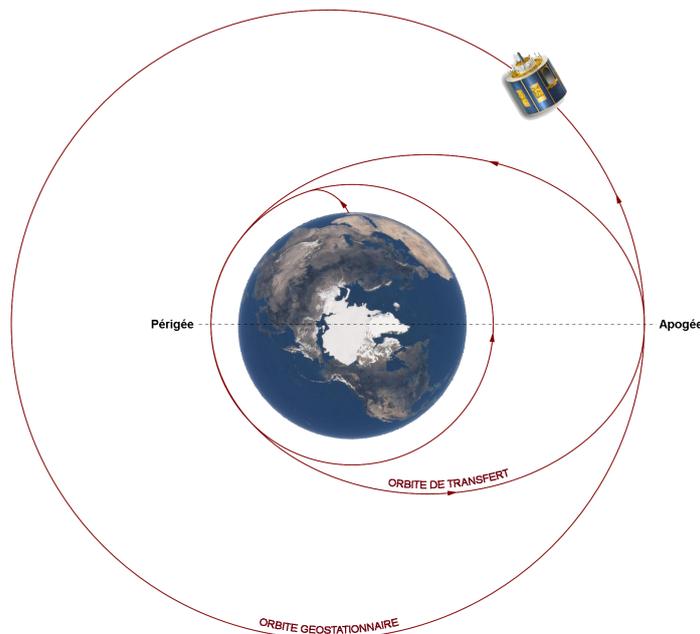


FIGURE 1.1 – Mise en orbite d'un satellite géostationnaire

Pour pouvoir décrire cette mise à poste de manière appropriée, il nous faut pour cela étudier la dynamique de ce satellite.

## 1.2 Dynamique d'un satellite

L'étude du mouvement d'un engin spatial tel qu'un satellite nécessite la définition de paramètres appropriés le caractérisant, décrits dans un repère à préciser. Étant en mécanique newtonienne (approximation galiléenne), cet engin est assimilé à un point matériel de masse  $m$ , évoluant dans un espace physique auquel la donnée de temps (espace euclidien réel de dimension 1) lui est ajoutée. Espace et temps seront toujours supposés indépendants l'un de l'autre.

Les vecteurs seront notés avec le signe  $\rightarrow$  au-dessus de ceux-ci, et seront en caractère majuscule s'ils appartiennent à une base. Dans le cas contraire, ils seront écrits en minuscule.

### 1.2.1 Repères et référentiels

L'établissement d'un repère de l'espace permet de rapporter l'espace physique, espace euclidien réel à trois dimensions, à celui-ci. L'ajout d'un repère de temps assure la description complète d'un événement physique. L'ensemble de ces deux repères espace et temps forme un référentiel.

#### Forme générale

Un repère  $\mathcal{R}$  de l'espace s'écrit toujours selon la forme suivante

$$\mathcal{R} = (O, E),$$

où  $O$  désigne un point de l'espace et  $E$  une base orthonormée. La distinction « géométrique » entre les repères sera faite suivant ces deux propriétés. Une précision supplémentaire doit cependant être réalisée suivant leur caractère inertiel (absolu) ou non :

- dans un référentiel absolu, toute particule livrée à elle-même présente une accélération nulle, et est donc animée d'un mouvement rectiligne uniforme. En d'autres termes, le principe d'inertie y est vérifié ;
- un référentiel non galiléen est mobile par rapport à un référentiel inertiel, mais non en translation rectiligne uniforme. Les lois de Newton y sont modifiées, tenant compte du mouvement accéléré de ce référentiel.

#### Repères géocentriques

L'origine  $O$  correspond au centre de masse de la Terre. Les repères suivants vont différer selon le choix du plan de référence.

**Le repère équatorial.** Ce repère demeure l'un des plus utilisés, étant inertiel et fixe. Sa base orthonormée  $E = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  repose sur le plan équatorial, perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre (supposée de direction fixe en 1<sup>re</sup> approximation), auquel appartiennent les vecteurs  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$ . Le vecteur  $\vec{I}$  est dirigé vers le point vernal  $\gamma$ , correspondant au nœud ascendant lorsque l'on considère l'intersection entre l'écliptique (plan dans lequel se déplace la Terre dans sa rotation autour du Soleil) et le plan équatorial. Il s'agit également de la position du Soleil lors de l'équinoxe de printemps dans l'hémisphère Nord. Le vecteur  $\vec{K}$  est choisi normal au plan équatorial, orienté vers le pôle Nord suivant l'axe de rotation de la Terre. Tandis que le vecteur  $\vec{J}$  est construit de sorte à compléter le trièdre direct  $E$ .

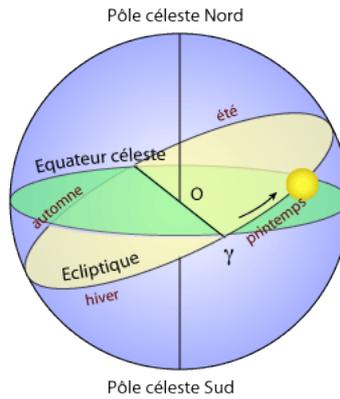


FIGURE 1.2 – Écliptique et point vernal  $\gamma$

**Le repère équinoxial.** Ce repère est moins « classique » que le précédent, mais reste souvent plus adapté à la description du mouvement d'un mobile céleste autour de la Terre. Les deux premiers vecteurs de la base orthonormée  $E = (\vec{F}, \vec{G}, \vec{W})$  se trouvent dans le plan de l'orbite, contenant comme son nom l'indique l'orbite dans lequel se déplace l'engin spatial, orthogonal au moment cinétique de ce dernier. Le vecteur  $\vec{F}$  est orienté de sorte à former un vecteur d'angle  $\Omega$  (appelé longitude du noeud ascendant) avec la ligne des noeuds, intersection entre le plan orbital et le plan équatorial. Le vecteur  $\vec{W}$  quant à lui est normal au plan de l'orbite, orienté comme le moment cinétique. Le dernier vecteur  $\vec{G}$  vient finaliser le trièdre direct  $E$ .

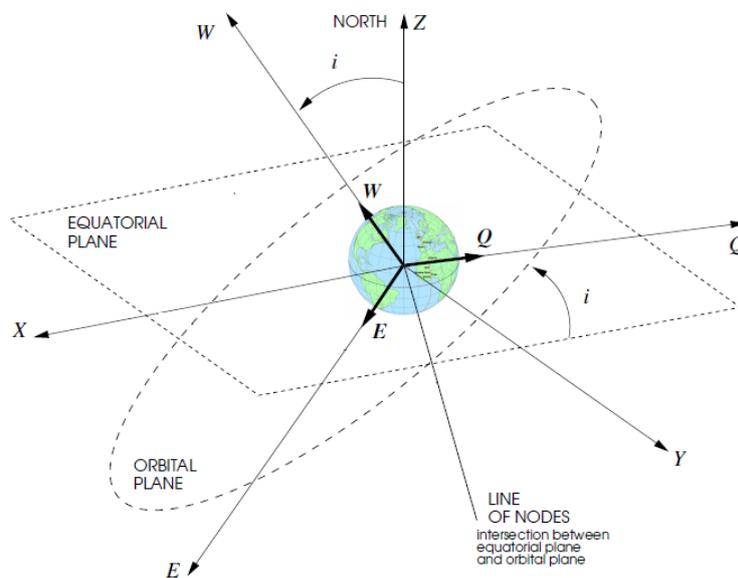


FIGURE 1.3 – Les repères équatorial et équinoxial [16], notés ici  $(X, Y, Z)$  et  $(E, Q, W)$

### Repères locaux

Étant liés à l'objet spatial avec lequel ils évoluent dans son mouvement, ces repères sont non inertiels. Le point  $O$  correspond ici au centre de gravité de l'objet. On parle ainsi de manière générale de repère orbital local. Deux types s'en distinguent, précisés ci-dessous.

**Le repère radial - transverse - normal.** La base orthonormée  $E$  se compose de trois vecteurs  $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{Z})$ . Les deux premiers vecteurs appartiennent au plan orbital du mobile, tandis que le 3<sup>e</sup> est normal à ce dernier, dans la même direction que le moment angulaire. Le vecteur  $\vec{R}$  est orienté suivant le rayon vecteur de l'engin spatial, et le vecteur  $\vec{S}$  vient compléter ce système orthonormé.

**Le repère tangential - normal.** Le repère tangential - normal ressemble fortement au système précédent. La principale différence réside dans l'orientation du 1<sup>er</sup> vecteur. Au lieu de le diriger suivant le vecteur position, on choisit plutôt le vecteur vitesse. On obtient alors une base orthonormée de la forme  $E = (\vec{T}, \vec{N}, \vec{Z})$ . Les vecteurs  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  sont dans le plan de l'orbite, et le vecteur  $\vec{Z}$  reste identique à celui du repère radial - transverse - normal.

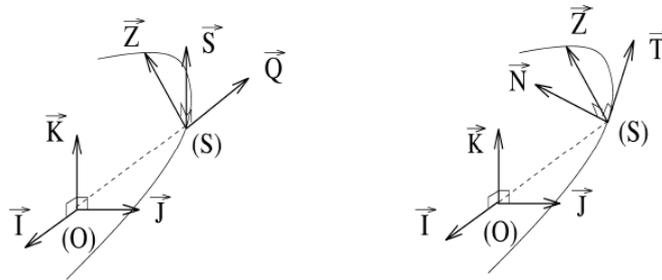


FIGURE 1.4 – Repères locaux [12]

Ces repères seront particulièrement utiles lors de l'établissement des équations du mouvement de notre engin spatial.

La définition de ces différents repères étant faite, la description du mouvement de l'engin devient possible, via l'introduction de certaines quantités appelées *éléments*.

## 1.2.2 Éléments orbitaux

### Éléments rectangulaires

L'étude du mouvement d'un objet céleste dans l'espace fait intervenir un problème à six degrés de liberté : trois associés à la position du mobile et trois à sa vitesse. Ce nombre découle de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique. Les éléments dits *rectangulaires* correspondent ainsi aux six paramètres donnés par le vecteur position  $\vec{r}$  de l'objet et son vecteur vitesse  $\vec{v}$ . Ces deux vecteurs se décomposent dans les repères géocentriques précédents sous les formes suivantes :

- dans le repère équatorial,

$$\vec{r} = X_I \vec{I} + Y_J \vec{J} + Z_K \vec{K} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{X}_I \vec{I} + \dot{Y}_J \vec{J} + \dot{Z}_K \vec{K};$$

- dans le repère équinoxial,

$$\vec{r} = X_F \vec{F} + Y_G \vec{G} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{X}_F \vec{F} + \dot{Y}_G \vec{G};$$

où la notation  $\dot{\phantom{x}}$  désigne l'opérateur de dérivation temporelle.

Cependant, des paramètres plus adaptés sont utilisés en pratique, tenant mieux compte de la physique du problème étudié.

## Éléments képlériens

L'introduction de ces éléments appelés *képlériens* se justifie par l'allure de la trajectoire suivie par un mobile autour d'un corps céleste : une *conique* (ellipse, parabole ou hyperbole), dont le corps céleste est l'un des foyers. Cette forme particulière résulte des lois de Kepler, dont l'énoncé est précisé par la suite.

Ces éléments sont décrits relativement à un repère galiléen donné  $\mathcal{R}$ , ayant pour origine  $O$  le centre de gravité du corps attractif. Typiquement, dans notre contexte, il s'agirait du repère équatorial défini précédemment. Ainsi, ces paramètres, au nombre de six, déterminent la position précise du mobile dans ce repère. On les note

$$(a, e, \omega, i, \Omega, M), \quad (EK)$$

reliés aux caractérisations suivantes (où l'on précise leurs unités physiques),

- dimensions et forme de la conique :  $a$  [m] et  $e$  [sans dimension] ;
- position de l'orbite dans son plan :  $\omega$  [rad] ;
- position du plan de l'orbite :  $i$  [rad] et  $\Omega$  [rad] ;
- position du mobile sur son orbite :  $M$  [rad], mais celui-ci peut différer, voir plus loin.

**Dimensions et forme de la conique.** Elles sont définies par les quantités :

- ▷ *demi-grand axe*  $a$  : il correspond à la moitié du plus grand diamètre pour une ellipse, définissant sa taille « absolue ». Il est infini pour une parabole ou une hyperbole,
- ▷ *excentricité*  $e$  : elle représente l'écart de forme entre la conique et le cercle parfait dont l'excentricité est nulle. Elle permet de définir la forme de l'orbite. Précisons son expression et quelques valeurs particulières.
  - si  $e < 1$ , on obtient un graphe fermé et une orbite périodique
    - lorsque  $e = 0$ , l'orbite est circulaire,
    - lorsque  $0 < e < 1$ , l'orbite est elliptique et ce dernier vaut  $\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ,
  - si  $e \geq 1$ , le graphe est ouvert et,
    - lorsque  $e = 0$ , l'orbite est parabolique,
    - lorsque  $e > 1$ , l'orbite est hyperbolique et  $e$  vaut  $\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ .

**Position de l'orbite dans son plan.** On définit l'*argument du péricentre*  $\omega$ , correspondant à l'angle formé par la ligne des nœuds et la direction du péricentre, dans le plan orbital. Il varie entre 0 et  $\pi$ .

**Position du plan orbital.** Elle est donnée par les angles :

- ▷ *inclinaison*  $i$  : il s'agit de l'angle entre le plan de l'orbite et le plan de référence du repère  $\mathcal{R}$  choisi (correspond au plan équatorial ici). Il est défini entre 0 et  $\pi$ , avec
  - si  $i = 0$ , on parle d'orbite équatoriale,
  - si  $0 < i < \frac{\pi}{2}$ , l'orbite est dite directe, et,
  - si  $\frac{\pi}{2} < i < \pi$ , elle est dite rétrograde.
- ▷ *longitude du nœud ascendant*  $\Omega$  : il correspond à l'angle entre l'axe vernal et la ligne des nœuds, dans le plan de référence. Il évolue entre 0 et  $2\pi$ .

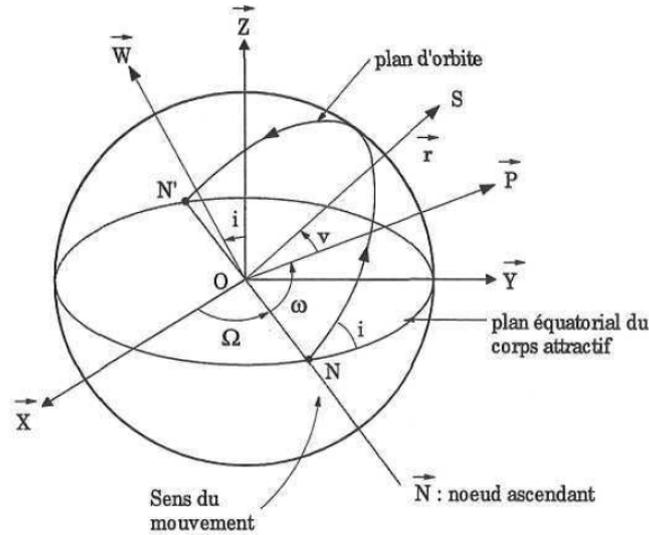


FIGURE 1.5 – Éléments képlériens [8]

**Position du mobile sur son orbite.** Différents angles, que l'on nomme *anomalies*, permettent de préciser cette position. On en distingue trois :

- ▷ l'*anomalie moyenne*  $M$  représente la fraction de la période orbitale qui s'est écoulée depuis le dernier passage au péricentre. Il évolue linéairement en temps (dans le cas d'un mouvement képlérien seulement !),

$$M = n(t - t_p),$$

où  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$  correspond au mouvement moyen, et  $t_p$  à la date du dernier passage au péricentre,

- ▷ l'*anomalie vraie*  $\nu$  : il s'agit de l'angle formé par la direction du péricentre et le vecteur position du mobile,
- ▷ l'*anomalie excentrique*  $E$  : il correspond à l'angle entre la direction du péricentre et celle donnée par la projection de la position du mobile sur le cercle auxiliaire de rayon  $a$ . Ce cercle est représenté en pointillés dans la figure suivante, autour de l'orbite.

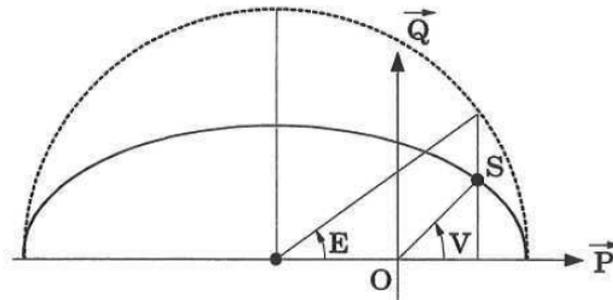


FIGURE 1.6 – Anomalies, définies dans le plan orbital [8]

D'autres quantités, issues des anomalies, permettent de caractériser également la position sur orbite,

- la *longitude orbitale* (ou *vraie*)  $\Omega + \omega + \nu$  ;

- la *longitude moyenne*  $\Omega + \omega + M$  ;
- la *longitude excentrique*  $\Omega + \omega + E$  ;

où l'angle  $\Omega + \omega$  correspond à la longitude du péricentre.

Cependant, l'utilisation de ces éléments képlériens peut conduire à des singularités, dans les situations où,

- $e = 0$  (orbite circulaire) : dans ce cas, la direction du péricentre n'est pas définie, ainsi que l'argument du péricentre  $\omega$  et l'anomalie vraie  $\nu$  ;
- $i = 0$  (orbite équatoriale) : la ligne des nœuds n'est pas présente, entraînant la non-définition de la longitude du nœud ascendant  $\Omega$  et de l'argument du péricentre  $\omega$ .

Pour remédier à ces quelques « défauts », des éléments auxiliaires, dérivés de ces éléments képlériens, ont été élaborés.

### Éléments équinoxiaux

Les éléments *équinoxiaux* ont été créés par Lagrange pour éviter justement les singularités présentes par l'utilisation des éléments képlériens. Leurs définitions à partir de ces derniers sont données par les équations suivantes,

$$\begin{cases} a = a \\ f = e \cos(\omega + \Omega) \\ g = e \sin(\omega + \Omega) \\ h = \tan\left(\frac{i}{2}\right) \cos \Omega \\ k = \tan\left(\frac{i}{2}\right) \sin \Omega \\ L = \Omega + \omega + \nu, \end{cases} \quad (EQ)$$

avec les relations réciproques associées,

$$\begin{cases} a = a \\ e = \sqrt{f^2 + g^2} \\ \omega = \tan^{-1}\left(\frac{g}{f}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{k}{h}\right) \\ i = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{h}\right) \\ \Omega = \tan^{-1}\left(\frac{k}{h}\right) \\ \nu = L - \omega - \Omega. \end{cases} \quad (EQ_{inv})$$

Quelques variantes des expressions (EQ) existent. Par exemple, comme dans l'article [12], le demi-grand axe  $a$  est remplacé par le mouvement moyen  $n$ , ou sinon par le semilatus rectum  $p = a(1 - e^2)$ , correspondant à la demi-corde parallèle à la directrice passant par le foyer de l'ellipse [20].

A présent, après les explications effectuées concernant les repères et les différents éléments orbitaux, on dispose des principaux outils nécessaires à l'établissement des équations du mouvement. Mais avant de réaliser cela, il nous faut préciser les relations existantes entre ces différents « objets ».

### 1.2.3 Changement de repère

La définition de repères et d'éléments multiples nécessite de pouvoir naviguer entre eux de manière relativement aisée, via plusieurs relations matricielles.

### Passage du système équatorial au système équinoxial

La matrice de passage du système équatorial au système équinoxial nous permet d'exprimer les composantes d'un vecteur du 1<sup>er</sup> système en fonction de ses composantes dans le 2<sup>e</sup>. On dispose ainsi de la relation,

$$\begin{pmatrix} X_I \\ Y_J \\ Z_K \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} X_F \\ Y_G \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} 1 + h^2 - k^2 & 2hk & 2k \\ 2hk & 1 - h^2 + k^2 & -2h \\ -2k & 2h & 1 - h^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_F \\ Y_G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (P_1)$$

avec

$$B = 1 + h^2 + k^2. \quad (1.1)$$

On peut d'ailleurs écrire les coordonnées  $(X_I, Y_J, Z_K)^\top$  et  $(X_F, Y_G, 0)^\top$  en fonction des éléments équinoxiaux. On a ainsi les identités,

$$\begin{pmatrix} X_I \\ Y_J \\ Z_K \end{pmatrix} = a \frac{A}{BW} \begin{pmatrix} (1 + h^2 - k^2) \cos L + 2hk \sin L \\ 2hk \cos L + (1 - h^2 + k^2) \sin L \\ 2(h \sin L - k \cos L) \end{pmatrix}, \quad (R_1)$$

et,

$$\begin{pmatrix} X_F \\ Y_G \\ 0 \end{pmatrix} = a \frac{A}{W} \begin{pmatrix} \cos L \\ \sin L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (R_2)$$

où les quantités inconnues valent,

$$\begin{aligned} A &= 1 - f^2 - g^2, \\ W &= 1 + f \cos L + g \sin L. \end{aligned} \quad (1.2)$$

### Passage du système radial-transverse-normal au système tangentiel-normal

L'écriture des composantes dans le système radial-transverse-normal d'un vecteur en fonction de celles dans le repère tangentiel-normal est particulièrement utile pour l'écriture des équations de Gauss, donnant la dynamique d'un objet spatial soumis à certaines forces. On peut ainsi écrire,

$$\begin{pmatrix} R \\ S \\ Z \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} T \\ N \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{D} (f \sin L - g \cos L) & -\frac{W}{D} & 0 \\ \frac{W}{D} & \frac{1}{D} (f \sin L - g \cos L) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ Z \end{pmatrix}, \quad (P_2)$$

avec

$$D = \sqrt{1 + 2f \cos L + 2g \sin L + f^2 + g^2}. \quad (1.3)$$

### Passage du système équatorial au système tangentiel-normal

La transformation suivante permet d'écrire les composantes d'un vecteur dans le système équatorial en fonction de ses coordonnées dans le repère tangentiel-normal.

$$\begin{pmatrix} X_I \\ Y_J \\ Z_K \end{pmatrix} = M_3 \begin{pmatrix} T \\ N \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{BD} \begin{pmatrix} (-1 - h^2 + k^2) \beta + 2hk\alpha & (-1 - h^2 + k^2) \alpha - 2hk\beta & 2kD \\ (1 - h^2 + k^2) \alpha - 2hk\beta & (-1 + h^2 - k^2) \beta - 2hk\alpha & -2hD \\ 2(h\alpha + k\beta) & 2(h\alpha - k\beta) & (1 - h^2 - k^2) D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ Z \end{pmatrix}, \quad (P_3)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= f + \cos L, \\ \beta &= g + \sin L. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A ce stade, on dispose de l'ensemble des outils nécessaires à la bonne description de la dynamique d'un satellite autour de la Terre. Les forces mises en jeu à ce niveau seront par la suite précisées, ainsi que les équations du mouvement. On va distinguer deux situations, leur principale différence étant due aux forces prises en compte dans chaque cas.

Le mobile et le corps céleste central seront toujours supposés ponctuels, de masses respectives  $m$  et  $M$ .

## 1.2.4 Mouvement képlérien

### Lois de Kepler

Pour expliquer les propriétés principales du mouvement des planètes du Système Solaire, Kepler a énoncé trois lois, portant aujourd'hui son nom. Celles-ci reposent sur des hypothèses suivantes, exprimées dans le cadre général de notre étude. On suppose donc, dans un repère inertiel centré sur le centre de gravité du corps céleste, que

- le mobile n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de ce corps céleste,

$$\vec{F}_{C \rightarrow M} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} = -\frac{\mu m}{r^3} \vec{r},$$

où  $\vec{r}$  est le rayon vecteur joignant le centre de gravité du corps céleste au mobile, de module  $r$ ,  $G$  est la constante d'attraction universelle, et  $\mu = GM$  est la constante de gravitation du corps attracteur ;

- le corps central est supposé *sphérique* et de répartition massique constante (*homogène*).

Sous ces conditions, la trajectoire du mobile obéit aux trois lois suivantes :

1. la trajectoire est une ellipse dont un de ses foyers est le corps attractif,
2. l'aire balayée, par unité de temps, par le rayon vecteur joignant le centre du corps céleste au mobile est constante,
3. dans le cas d'une orbite elliptique, le carré de la période varie proportionnellement au cube du demi-grand axe.

### Équations du mouvement

Dans ce cadre, le Principe Fondamental de la Dynamique nous permet d'écrire les équations du mouvement, nous donnant l'évolution temporelle de la position du mobile. On a

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (M_K)$$

munies des conditions aux limites (orbite initiale et orbite finale à atteindre dans le cas du transfert orbital), assurant son caractère bien posé. Cette équation différentielle, écrite en éléments rectangulaires, peut, via la transformation bijective  $\tau$  être exprimées en termes d'éléments orbitaux képlériens,

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = 0 & \frac{di}{dt} = 0 \\ \frac{de}{dt} = 0 & \frac{d\Omega}{dt} = 0 \\ \frac{d\omega}{dt} = 0 & \frac{dM}{dt} = n. \end{cases} \quad (M_K^*)$$

Les paramètres caractérisant la forme et la position de l'orbite restent constants. Seule la position angulaire sur orbite du mobile (anomalie moyenne ici) varie linéairement en temps, via le mouvement moyen  $n$ .

Cette approximation « képlérienne » du mouvement pour un satellite en rotation autour de la Terre reste valable lors de la 1<sup>re</sup> phase de définition d'une orbite, dite d'analyse de mission. Mais elle reste toutefois simplificatrice. Des modèles plus précis peuvent être obtenus, tenant compte de forces autres que l'attraction terrestre.

## 1.2.5 Mouvement perturbé

### Notion de perturbation orbitale

En réalité, le mouvement d'un satellite ou de tout objet céleste en orbite terrestre n'est jamais parfaitement képlérien. Des forces supplémentaires, modélisant par exemple l'inhomogénéité de répartition des masses terrestres ou bien le champ de gravitation des astres voisins, agissent sur ce mobile, entraînant une « perturbation » de son mouvement, et donc de sa trajectoire.

On va distinguer deux catégories de perturbations, suivant leur caractère conservatif ou non :

- les perturbations *gravitationnelles* : les accélérations dérivent d'un potentiel, et sont donc conservatives. Toutes les forces issues de l'attraction universelle de Newton sont de ce type.

On peut par définition écrire

$$\vec{\gamma}_P^G = \nabla U_P;$$

- les perturbations *non gravitationnelles* : dans ce cas, elles ne dérivent pas d'un potentiel. Ces forces sont associées à un gain ou une perte d'énergie du système. Entrent dans cette catégorie le frottement atmosphérique, ou bien la poussée par exemple. On note de façon générale une accélération perturbatrice non gravitationnelle  $\vec{\gamma}_P^{NG}$ .

Ces différents effets seront décrits dans la sous-section 1.3 de manière plus détaillée. D'ailleurs, un aperçu de leurs ordres de grandeur par rapport au terme d'attraction gravitationnelle terrestre (que l'on peut appeler terme central képlérien) justifie l'utilisation de ce terme « perturbation ». En effet, leurs magnitudes sont très faibles devant ce terme principal. Ce qui se traduit, pour une accélération perturbatrice quelconque  $\vec{\gamma}_P$  par

$$\gamma_P \ll \frac{\mu}{r^2}. \quad (H_P)$$

### Équations du mouvement

Le mouvement *perturbé* d'un mobile autour d'un corps céleste central sous l'hypothèse ( $H_P$ ) est décrit par les équations

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{\gamma}_P = \vec{\gamma}_K + \vec{\gamma}_P, \quad (M_P)$$

toujours munies des conditions aux limites (orbite initiale et orbite finale à atteindre). On peut ainsi considérer la trajectoire réelle comme une faible « déformation » de la trajectoire képlérienne. Cette perturbation de la conique est plus « visible » en écrivant l'équation ( $M_P$ ) en termes d'éléments orbitaux képlériens. La bijection  $\tau$  nous permet à chaque instant de temps  $t$ , de convertir les éléments rectangulaires en éléments képlériens. Ce qui nous donne l'équation suivante, équivalente à ( $M_P$ ),

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \gamma_1 & \frac{di}{dt} = \gamma_4 \\ \frac{de}{dt} = \gamma_2 & \frac{d\Omega}{dt} = \gamma_5 \\ \frac{d\omega}{dt} = \gamma_3 & \frac{dM}{dt} = n_0 + \gamma_6, \end{cases} \quad (M_P^*)$$

où  $n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}}$  est le mouvement moyen, avec  $a_0$  correspondant à la valeur du demi-grand axe  $a$  sans perturbation (autrement dit de l'orbite képlérienne). Les termes  $\gamma_i$  y sont supposés petits.

Ces paramètres orbitaux évoluant cette fois en temps sont appelés éléments *osculateurs*. Ils correspondent, à un instant  $t$  donné, aux éléments képlériens de l'orbite que suivrait le mobile s'il n'était plus perturbé à cette date. La trajectoire issue de ces éléments, dite *osculatrice*, n'est qu'une approximation, toutefois très précise, de la trajectoire réelle. Elle est tangente à cette dernière (elles ont le même vecteur vitesse), mais elles n'ont pas le même rayon de courbure, car leurs accélérations diffèrent.

Les équations du mouvement, que ce soit dans le cas képlérien ou perturbé, ont été écrites en termes d'éléments orbitaux képlériens, mais peuvent bien sûr s'exprimer à l'aide des éléments équinoxiaux, grâce aux relations données par (EQ) et l'utilisation de la formule de dérivation des fonctions composées.

## Équations de Lagrange et de Gauss

Nous avons vu précédemment que l'accélération perturbatrice  $\vec{\gamma}_P$ , intervenant dans les équations ( $M_P$ ) et ( $M_P^*$ ), pouvait dériver ou non d'un potentiel. Dans la 1<sup>re</sup> situation, si l'on note  $\vec{\gamma}_P = \nabla U_P$ , l'équation ( $M_P$ ) peut s'écrire,

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \nabla U_P = \vec{\gamma}_K + \nabla U_P.$$

Et comme  $\vec{\gamma}_K$  dérive également d'un potentiel,

$$\vec{\gamma}_K = \nabla U_K = \nabla \left( \frac{\mu}{r} \right),$$

on peut écrire,

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \nabla \left( \frac{\mu}{r} + U_P \right).$$

L'écriture du second membre sous forme de gradient aboutit aux *équations de Lagrange*. Toutefois, celles-ci ne permettent pas de tenir compte des possibles accélérations non conservatives, telles que la poussée par exemple. Il est donc nécessaire d'établir ces équations dans un cadre plus général, ce qui nous conduit aux *équations de Gauss*.

Les équations de Gauss décrivent l'évolution des paramètres orbitaux, képlériens ou équinoxiaux, lorsque l'accélération perturbatrice  $\vec{\gamma}_P$  est décrite dans un *repère local*, attaché au mobile avec lequel il évolue. Ces équations vont être exprimées à l'aide des éléments équinoxiaux, en décomposant l'accélération perturbatrice dans les deux repères orbitaux locaux que nous avons définis :

- le repère radial-transverse-normal :  $\vec{\gamma}_P = \gamma_R \vec{R} + \gamma_S \vec{S} + \gamma_Z \vec{Z}$  et ;
- le repère tangentiel-normal :  $\vec{\gamma}_P = \gamma_T \vec{T} + \gamma_N \vec{N} + \gamma_Z \vec{Z}$

Les équations de Gauss décrivent l'évolution des paramètres orbitaux, képlériens ou équinoxiaux, lorsque l'accélération perturbatrice  $\vec{\gamma}_P$  est décrite dans un *repère local*, attaché au mobile avec lequel il évolue. Ces équations vont être exprimées à l'aide des éléments équinoxiaux, en décomposant l'accélération perturbatrice dans les deux repères orbitaux locaux que nous avons définis :

- le repère radial-transverse-normal :  $\vec{\gamma}_P = \gamma_R \vec{R} + \gamma_S \vec{S} + \gamma_Z \vec{Z}$  et ;
- le repère tangentiel-normal :  $\vec{\gamma}_P = \gamma_T \vec{T} + \gamma_N \vec{N} + \gamma_Z \vec{Z}$

Nous allons pour cela nous baser sur l'article [20], pour essayer de retrouver les équations de la thèse [11], que nous utiliserons par la suite. L'article [20] formule les équations de Gauss suivant les deux types d'éléments orbitaux, dans les deux repères précédents. Il y a toutefois un « mais » à souligner. Dans la définition des éléments équinoxiaux, nous avons vu que le 6<sup>e</sup> paramètre, donnant la position angulaire sur orbite pouvait varier suivant la longitude choisie : vraie, excentrique ou moyenne. La thèse [11] travaillant avec la longitude vraie et le repère tangentiel-normal, quelques calculs sont nécessaires au préalable avant d'aboutir aux équations voulues.

Le point de départ est formé des équations de Gauss avec les éléments équinoxiaux et l'accélération perturbatrice exprimée dans le repère radial-transverse-normal,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{a}{A^{\frac{1}{2}}} [(f \sin L - g \cos L) \gamma_R + W \gamma_S] \\ \frac{df}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{W} [W \sin L \gamma_R + A(L) \gamma_S - g (h \sin L - k \cos L) \gamma_Z] \\ \frac{dg}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{W} [-W \cos L \gamma_R + B(L) \gamma_S + f (h \sin L + k \cos L) \gamma_Z] \\ \frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{W} \left[ \frac{1}{2} B \cos L \right] \gamma_Z \\ \frac{dk}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{W} \left[ \frac{1}{2} B \sin L \right] \gamma_Z \\ \frac{dL}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} W^2 + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{W} (h \sin L - k \cos L) \gamma_Z, \end{array} \right. \quad (E_{G1})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A(L) = f + \cos L (1 + W), \\ B(L) = g + \sin L (1 + W). \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Grâce aux identités

$$\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{W} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{W} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1}{A^{\frac{3}{2}}},$$

ainsi qu'à la relation de passage du repère radial-transverse-normal au repère tangential-normal ( $P_2$ ), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{D}{A^{\frac{3}{2}}} \gamma_T \\ \frac{df}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{W} \left[ \frac{2(f+\cos L)W}{D} \gamma_T + \frac{1}{D} (-2g - 2fg \cos L + (f^2 - g^2 - 1) \sin L) \gamma_N - g (h \sin L - k \cos L) \gamma_Z \right] \\ \frac{dg}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{W} \left[ \frac{2(g+\sin L)W}{D} \gamma_T + \frac{1}{D} (2f + (1 + f^2 - g^2) \cos L + 2fg \sin L) \gamma_N + f (h \sin L + k \cos L) \gamma_Z \right] \\ \frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{W} \left[ \frac{1}{2} B \cos L \right] \gamma_Z \\ \frac{dk}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{W} \left[ \frac{1}{2} B \sin L \right] \gamma_Z \\ \frac{dL}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{W^2}{A^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{W} (h \sin L - k \cos L) \gamma_Z, \end{array} \right. \quad (E_{G2})$$

On peut maintenant écrire le système final, cette fois sous forme matricielle, en notant  $x$  le vecteur  $(a, f, g, h, k)^\top$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x, L) \vec{\gamma}_P \\ \frac{dL}{dt} = g_0(x, L) + g_1(x, L) \vec{\gamma}_P, \end{array} \right. \quad (E_{G3})$$

où

$$f(x, L) = \frac{A^{\frac{1}{2}}}{(n\mu)^{\frac{1}{3}} W} \begin{pmatrix} \frac{2aDW}{A} & 0 & 0 \\ \frac{2(f+\cos L)W}{D} & \frac{1}{D} (-2g - 2fg \cos L + (f^2 - g^2 - 1) \sin L) & -g (h \sin L - k \cos L) \\ \frac{2(g+\sin L)W}{D} & \frac{1}{D} (2f + (1 + f^2 - g^2) \cos L + 2fg \sin L) & f (h \sin L + k \cos L) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} B \cos L \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} B \sin L \end{pmatrix}, \quad (f)$$

et

$$g_0(x, L) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{W^2}{A^{\frac{3}{2}}}, \quad g_1(x, L) = \left( 0, 0, \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{W} (h \sin L - k \cos L) \right). \quad (g)$$

### Distinction entre les variables orbitales

Si l'on observe plus attentivement les équations ( $M_K^*$ ) et ( $M_P^*$ ), donnant la variation temporelle des éléments orbitaux képlériens, on peut remarquer deux niveaux d'évolution :

- une évolution « rapide » pour le paramètre définissant la position angulaire sur orbite (anomalie/longitude vraie, excentrique ou moyenne) : celui-ci va varier beaucoup sur une période orbitale donnée, avec présence de perturbations ou non ;
- une évolution « lente » pour les éléments caractérisant la forme et la position de l'orbite : ceux-ci vont peu changer sur une période orbitale, et même rester constants en absence de perturbations.

On peut ainsi classer les paramètres orbitaux en deux types : les variables « lentes » et les variables « rapides ».

## 1.3 Perturbations orbitales

Dans la sous-section 1.2.5, nous avons introduit brièvement la notion de perturbation orbitale, en la divisant en deux catégories distinctes :

- les perturbations *gravitationnelles* ;
- et celles dites *non gravitationnelles*.

Dans tous les cas, ces perturbations sont toujours supposées *faibles* devant le terme principal képlérien. En effet, considérons par exemple un satellite en orbite quasi-circulaire à une altitude de 800 km. Supposons l'attraction centrale terrestre d'ordre 1, et regardons les ordres de grandeur de quelques autres forces. On a les magnitudes suivantes (issues de [7])

- $10^{-3}$  pour la perturbation due à l'aplatissement terrestre ;
- $10^{-6}$  pour les perturbations issues d'autres inhomogénéités terrestres ;
- $10^{-7}$  pour l'attraction lunaire ;
- $10^{-8}$  pour l'attraction solaire.

Ces valeurs confirment bien la validité de l'hypothèse effectuée. Certaines de ces perturbations seront décrites de manière plus détaillée, en précisant leur expression.

### 1.3.1 Perturbations gravitationnelles

On parle de perturbations *gravitationnelles* car il s'agit de forces résultant de l'attraction universelle de Newton. Dérivant d'un potentiel, elles sont conservatives. Toutes les forces issues de l'attraction de tout corps céleste sont de ce type. Elles s'écrivent sous la forme générale

$$\vec{\gamma}_P^G = \nabla U_P.$$

Dans ce qui suit, nous allons décrire plus précisément un exemple de perturbation gravitationnelle, l'*attraction luni-solaire*, en détaillant l'expression de l'accélération et du potentiel associé. Cette démarche s'inscrit dans un processus de traitement général, applicable à n'importe quelle perturbation gravitationnelle. Elle se divise en trois grandes étapes, nécessaire pour l'inclusion de cette perturbation dans les équations de Gauss :

1. on exprime le potentiel gravitationnel  $U_P$  en fonction des coordonnées cartésiennes du mobile, dans le repère inertiel équatorial ;
2. on écrit l'accélération  $\vec{\gamma}_P^G$ , en calculant le gradient du potentiel précédent. Ce que l'on peut écrire de façon formelle

$$\vec{\gamma}_P^G = \nabla U_P = \gamma_P^I \vec{I} + \gamma_P^J \vec{J} + \gamma_P^K \vec{K} = \frac{\partial U_P}{\partial X} \vec{I} + \frac{\partial U_P}{\partial Y} \vec{J} + \frac{\partial U_P}{\partial Z} \vec{K},$$

en restant toujours dans le repère équatorial ;

3. les composantes de l'accélération perturbatrice sont cette fois exprimées à l'aide des éléments équinoxiaux, via les identités données par  $(R_1)$ . On exprime ensuite cette accélération dans le repère local tangentiel-normal, grâce à la relation de passage  $(P_3)$ ,

$$\vec{\gamma}_P^G = \gamma_P^T \vec{T} + \gamma_P^N \vec{N} + \gamma_P^Z \vec{Z}.$$

## Perturbation luni-solaire

La perturbation luni-solaire résulte de l'attraction gravitationnelle exercée par la Lune et le Soleil. Ces deux astres sont notamment à l'origine du mouvement des masses terrestres et océaniques, contribuant à rendre la Terre non homogène. Ces forces perturbatrices doivent être prises en compte lors de l'étude de satellites en orbite terrestre, afin d'obtenir un modèle dynamique précis et pertinent. Nous allons écrire l'expression de son accélération ainsi que de son potentiel, en suivant la procédure générale citée ci-dessus.

**Étape 1.** Expliquons brièvement dans un 1<sup>er</sup> temps comment l'expression du potentiel d'attraction d'un astre perturbateur  $A$ , supposé ponctuel de masse  $M_A$ , sur un mobile donné est obtenue. Le mouvement du satellite étant étudié dans un repère attaché à la Terre, on regarde en réalité l'attraction différentielle exercée par l'astre sur cet engin. En omettant le détail des calculs intermédiaires (ce qui est décrit dans [8]), le potentiel attractif de l'astre  $A$  sur l'objet céleste peut s'écrire

$$U_A = GM_A \left[ \frac{1}{\rho_A} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_A}{r_A^3} - \frac{1}{r_A} \right],$$

où l'on note,

- $\mu_A = GM_A$  la constante gravitationnelle de l'astre  $A$ ,
- $\vec{r}$  et  $\vec{r}_A$  les vecteurs position du mobile et de l'astre  $A$ ,
- $\vec{\rho}_A$  le vecteur  $\vec{r}_A - \vec{r}$ .

En considérant ici la Lune et le Soleil comme étant nos astres perturbateurs ponctuels, le potentiel luni-solaire va s'écrire dans le repère équatorial

$$U_{LS} = \sum_{A=L,S} GM_A \left[ \frac{1}{\rho_A} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_A}{r_A^3} - \frac{1}{r_A} \right], \quad (U_{LS1})$$

en associant les notations précédentes à la Lune et au Soleil. Pour calculer ensuite l'accélération perturbatrice associée à ce potentiel, ce dernier doit être exprimé à l'aide des coordonnées  $(X, Y, Z)$  de l'engin, ainsi avec celles de la Lune  $(X_L, Y_L, Z_L)$  et du Soleil  $(X_S, Y_S, Z_S)$ . Or on dispose des relations, pour  $A = L, S$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad r_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}, \quad \rho_A = \sqrt{(X_A - X)^2 + (Y_A - Y)^2 + (Z_A - Z)^2},$$

nous permettant d'écrire,

$$U_{LS} = \sum_{A=L,S} GM_A \left[ \frac{1}{\sqrt{(X_A - X)^2 + (Y_A - Y)^2 + (Z_A - Z)^2}} - \frac{XX_A + YY_A + ZZ_A}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}^3} - \frac{1}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}} \right]. \quad (U_{LS2})$$

**Étape 2.** L'accélération perturbatrice est obtenue en calculant le gradient de  $(U_{LS2})$ . Comme, pour  $A = L, S$ ,

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{(X_A - X)^2 + (Y_A - Y)^2 + (Z_A - Z)^2}} \right) &= \left( \frac{X_A - X}{\rho_A^3}, \frac{Y_A - Y}{\rho_A^3}, \frac{Z_A - Z}{\rho_A^3} \right)^\top, \\ \nabla \left( \frac{XX_A + YY_A + ZZ_A}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}^3} \right) &= \left( \frac{X_A}{r_A^3}, \frac{Y_A}{r_A^3}, \frac{Z_A}{r_A^3} \right)^\top \quad \text{et} \quad \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}} \right) = (0, 0, 0)^\top, \end{aligned}$$

les composantes de l'accélération luni-solaire dans le repère inertiel équatorial  $(\vec{T}, \vec{J}, \vec{K})$  s'écrivent

$$\begin{aligned}\gamma_{LS}^I &= \sum_{A=L,S} GM_A \left[ \frac{X_A - X}{\sqrt{(X_A - X)^2 + (Y_A - Y)^2 + (Z_A - Z)^2}^3} - \frac{X_A}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}^3} \right], \\ \gamma_{LS}^J &= \sum_{A=L,S} GM_A \left[ \frac{Y_A - Y}{\sqrt{(X_A - X)^2 + (Y_A - Y)^2 + (Z_A - Z)^2}^3} - \frac{Y_A}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}^3} \right], \\ \gamma_{LS}^K &= \sum_{A=L,S} GM_A \left[ \frac{Z_A - Z}{\sqrt{(X_A - X)^2 + (Y_A - Y)^2 + (Z_A - Z)^2}^3} - \frac{Z_A}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}^3} \right].\end{aligned}\tag{A_{LS1}}$$

**Étape 3.** Afin de pouvoir inclure cette accélération dans les équations de Gauss ( $E_{G3}$ ), on doit l'exprimer dans le repère tangential-normal  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{Z})$  lié au mobile. Il nous faut également écrire les coordonnées cartésiennes  $(X, Y, Z)$  de l'engin en fonction des éléments orbitaux équinoxiaux, ce qui est possible grâce à la relation ( $R_1$ ), que nous reprécisons ici

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = a \frac{A}{BW} \begin{pmatrix} (1 + h^2 - k^2) \cos L + 2hk \sin L \\ 2hk \cos L + (1 - h^2 + k^2) \sin L \\ 2(h \sin L - k \cos L) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}A &= 1 - f^2 - g^2, \\ B &= 1 + h^2 + k^2, \\ W &= 1 + f \cos L + g \sin L.\end{aligned}$$

Le passage dans le repère tangential-normal est ensuite réalisée grâce à la relation ( $P_3$ ), dépendante des éléments équinoxiaux du mobile. On en déduit donc

$$\vec{\gamma}_{LS} = \begin{pmatrix} \gamma_{LS}^I \\ \gamma_{LS}^J \\ \gamma_{LS}^K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{LS}^I \\ \gamma_{LS}^J \\ \gamma_{LS}^K \end{pmatrix} \cdot \left( M_3 \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{Z} \end{pmatrix} \right) = \left( M_3^\top \begin{pmatrix} \gamma_{LS}^I \\ \gamma_{LS}^J \\ \gamma_{LS}^K \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{Z} \end{pmatrix}\tag{A_{LS2}}$$

En ce qui concerne les positions  $(X_A, Y_A, Z_A)$ ,  $A = L, S$  de la Lune et du Soleil, ces dernières vont être exprimées en fonction du temps. Leurs mouvements respectifs seront simulés grâce à l'utilisation d'éphémérides tabulées, données par exemple par le système HORIZONS développé par le Jet Propulsion Laboratory (JPL) de la NASA, et disponible à l'adresse Internet suivante

<http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top>.

Le choix des données à interpoler va dépendre de la date choisie. En effet, les coordonnées cartésiennes de la Lune et du Soleil sont exprimées en réalité dans un repère géocentrique équatorial *quasi-inertiel*, appelé J2000, qui dépend de la *date*.

### 1.3.2 Perturbations non gravitationnelles

On classe dans cette catégorie toutes les forces perturbatrices qui ne dépendent pas de la masse de l'objet spatial. Par le Principe Fondamental de la Dynamique, on peut montrer que leurs accélérations sont inversement proportionnelles à cette masse. De plus, contrairement aux forces dites gravitationnelles, elles ne dérivent pas d'un potentiel et sont donc non conservatives.

Ces forces sont ainsi nécessairement à l'origine d'un gain ou d'une perte d'énergie du système. Leurs accélérations présentent également une particularité importante : étant dépendantes de la masse du mobile et de ses propriétés géométriques et physiques, elles peuvent permettre d'exercer un *contrôle* sur cet objet. Cependant, cette dépendance entraîne forcément une certaine difficulté de modélisation. Font partie de cette catégorie :

- le frottement atmosphérique ;
- la pression de radiation solaire ;
- la *poussée*, dépendante de la technologie utilisée : propulseurs électro-ionique, ou à réponse impulsionnelle, etc.

Parmi ces exemples, seule la force de poussée sera prise en compte en tant que perturbation non gravitationnelle exercée sur le mouvement du satellite.

### Poussée et propulsion électro-ionique

Un engin spatial, par exemple dans le cas du transfert orbital, nécessite d'être *propulsé* pour pouvoir être mis en mouvement. Ce qui est assuré par différents systèmes motorisés : électro-ioniques, ou chimiques à réponse impulsionnelle. Dans notre cadre d'étude, on s'intéresse tout particulièrement aux systèmes électro-ioniques, en plein développement. Présentons brièvement leur fonctionnement. Ces moteurs fournissent une force de propulsion ou force de *poussée* par ionisation de gaz (« carburant » tels que le xénon) et non par combustion comme les moteurs classiques. Si l'on note  $v_e$  la vitesse d'éjection des ions, et  $q_m$  le débit massique d'éjection, la magnitude de cette force de réaction  $\vec{F}$  s'écrit

$$F = v_e q_m. \quad (P)$$

Ces systèmes disposent de nombreux avantages, suscitant un intérêt grandissant pour leur utilisation dans diverses missions spatiales : maintien à poste ou contrôle d'attitude de satellites, transfert orbital, trajectoires interplanétaires, etc. En effet, leur grande vitesse d'éjection permet une consommation moindre de carburant, augmentant leur rendement par rapport aux moteurs chimiques impulsionnels. D'ailleurs, l'énergie nécessaire pour l'ionisation ne nécessite pas d'être transporté, des panneaux solaires fournissent cette énergie électrique. Ces propriétés permettent d'accroître la charge utile envisageable de transporter. Toutefois, ils présentent un inconvénient de taille : ils engendrent une poussée, certes continue, mais *faible* (de l'ordre de quelques Newtons), ce qui ne permet pas de les utiliser par exemple pour le lancement de véhicules spatiaux.

Cependant, cette force de poussée, certes de magnitude faible, va nous permettre de *contrôler* l'engin spatial. Cette commande va apparaître dans les équations de Gauss par le biais de son accélération, en notant dès lors  $\vec{F} = \vec{u}$ ,

$$\vec{\gamma}_u = \frac{\vec{u}}{m} \quad (A_u)$$

perturbant continûment le mouvement képlérien de l'engin. La prise en compte de cette perturbation non gravitationnelle fait apparaître de nouvelles difficultés de modélisation, notamment dans la situation du transfert orbital. La faible poussée conduit à des temps de transfert importants : les paramètres orbitaux équinoxiaux *non angulaires* n'évoluent que très peu sur une période orbitale (le paramètre *angulaire* évoluant toujours rapidement), obligeant à effectuer un nombre de révolutions élevé afin d'atteindre l'orbite voulue.

## 1.4 Récapitulatif

Précédemment, nous avons décrit le mouvement de notre engin spatial en donnant l'évolution *temporelle* des paramètres orbitaux. Nous disposons ainsi des équations de Gauss ( $E_{G3}$ ), écrites

sous forme matricielle, pour une accélération perturbatrice quelconque  $\overrightarrow{\gamma_P}$  exprimée dans le repère tangentiel-normal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, L)\overrightarrow{\gamma_P} \\ \frac{dL}{dt} = g_0(x, L) + g_1(x, L)\overrightarrow{\gamma_P}, \end{cases}$$

où  $x = (a, f, g, h, k)^\top$  désigne les paramètres équinoxiaux non angulaires,  $L$  la variable angulaire de position sur orbite, avec les fonctions  $f$ ,  $g_0$  et  $g_1$  données par ( $f$ ) et ( $g$ ). Il nous faut toutefois maintenant préciser l'expression de cette accélération perturbatrice. On choisit ici de considérer les perturbations orbitales dues à la propulsion électro-ionique de l'engin, et à l'attraction de la Lune et du Soleil. Les accélérations issues de ces deux phénomènes sont définies par les relations ( $A_u$ ) et ( $A_{LS2}$ )

$$\overrightarrow{\gamma_P}(x, L) = \overrightarrow{\gamma_u} + \overrightarrow{\gamma_{LS}}(x, L) = \frac{\overrightarrow{u}}{m} + \overrightarrow{\gamma_{LS}}(x, L),$$

où seule  $\overrightarrow{\gamma_{LS}}$  dépend des paramètres équinoxiaux du mobile. L'engin étant propulsé, son mouvement est associé à une perte de masse continue due à la consommation de carburant, dont on doit tenir compte dans les équations. On ajoute ainsi la masse de l'engin  $m$  comme nouvelle variable d'état, dont l'évolution est donnée par ( $P$ )

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\|u\|}{v_e}, \quad (M)$$

comme  $q_m = -\frac{dm}{dt}$ , et avec  $\|u\| = \sqrt{u_T^2 + u_N^2 + u_Z^2}$  la norme de  $\overrightarrow{u}$  dans le repère tangentiel-normal. Dans ce cadre, on dispose des équations, où figure cette fois la commande  $\overrightarrow{u}$  qui va nous intéresser

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, L)\frac{\overrightarrow{u}}{m} + f(x, L)\overrightarrow{\gamma_{LS}}(x, L) \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{\|u\|}{v_e} \\ \frac{dL}{dt} = g_0(x, L) + g_1(x, L)\frac{\overrightarrow{u}}{m} + g_1(x, L)\overrightarrow{\gamma_{LS}}(x, L). \end{cases} \quad (E_u)$$

# Chapitre 2

## Formulation contrôle optimal

Jusqu'à présent, nous avons pu décrire de manière précise en quoi consiste le transfert orbital d'un engin à faible poussée, du point de vue physique. On a ainsi pu établir :

- les paramètres et les repères nécessaires à la description de son mouvement ;
- sa dynamique, *non képlérienne*, car soumise aux perturbations liées à la poussée générée par le moteur du satellite, ainsi qu'à l'attraction exercée par la Lune et le Soleil ;
- les caractéristiques propres à la propulsion électro-ionique ;

en l'illustrant par l'exemple de la mise à poste géostationnaire d'un satellite de type télécommunications. Cette première étude va s'élargir à la situation où l'on souhaite réaliser ce transfert de manière « optimale », c'est-à-dire en minimisant un certain critère de performance à préciser. Cette problématique va s'inscrire dans le domaine du *contrôle optimal*, dont nous rappelons quelques notions nécessaires.

### 2.1 Quelques notions en contrôle optimal

Nous précisons ici quelques définitions et résultats importants en contrôle optimal, utilisés dans le cadre du problème de mécanique spatiale étudié dans ce manuscrit. De nombreuses références relatives à ce domaine existent, parmi lesquelles [5] ou [22].

#### 2.1.1 Forme générale d'un problème de contrôle optimal

Considérons le système de contrôle général

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.1)$$

munies des conditions aux limites

$$x(t_0) \in M_0 \quad x(t_f) \in M_f, \quad M_0, M_f \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

au sein duquel on désigne par

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  l'état du système ;
- $u(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  le contrôle, paramètre permettant d'agir sur le système ;
- $t \in [t_0, t_f]$  la variable indépendante, représentant généralement le temps. L'instant final pouvant être fixé ou non ;

et où la fonction  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposée être de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ces hypothèses permettent d'assurer, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'existence d'une unique solution maximale  $x = x_u$  pour tout contrôle  $u$  donné. On définit ainsi l'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}_{t_f}$ , correspondant aux commandes pour lesquelles la trajectoire associée est bien définie.

Le problème de contrôle optimal peut dès lors s'énoncer de la manière suivante. Parmi toutes les solutions du système de contrôle (2.1) reliant  $x(t_0)$  à  $x(t_f)$ , il s'agit de déterminer celle *minimisant* un certain critère ou fonction coût

$$J(t_f, x(t_f), u(t_f)) = g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.3)$$

éventuellement sous contraintes sur le contrôle ou sur l'état, où les fonctions  $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $C^1$ . Lorsque une telle trajectoire existe, elle est dite *optimale* pour le critère de performance choisi. La régularité des fonctions mises en jeu peut être affaiblie.

Plusieurs méthodes sont à notre disposition pour résoudre un tel problème. Deux grandes approches existent, l'une fondée sur le Principe du Maximum de Pontryagin, et l'autre sur le principe de programmation dynamique de Bellman.

### 2.1.2 Le principe du Maximum de Pontryagin

Ce théorème fondamental, développé par Lev Pontryagin et ses collaborateurs dans les années 50, constitue une généralisation de certains théorèmes issus du calcul des variations. Il fournit une condition *nécessaire* d'optimalité et permet d'exprimer le contrôle optimal en fonction de l'état du système et de l'état dit « adjoint ». Plusieurs variantes de ce principe existent, suivant la présence ou l'absence de contrainte sur le contrôle ou sur l'état, ou bien selon les hypothèses réalisées sur les espaces fonctionnels mis en jeu. En voici un énoncé, issu de [22].

#### Énoncé

On se place dans le cadre général de contraintes sur la commande,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ , aboutissant au Principe du Maximum de Pontryagin *fort*.

**Théorème 2.1.** *Si le contrôle  $u$  associé au système de contrôle (2.1) est optimal pour le coût (2.3), alors il existe une application  $p : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel  $p^0 \leq 0$ , tels que le couple  $(p, p^0)$  soit non trivial, et tels que les équations suivantes soient vérifiées pour presque tout  $t \in [t_0, t_f]$*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \end{aligned} \quad (EQH)$$

où  $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$  est le Hamiltonien du système. De plus, on a la condition de maximisation suivante presque partout sur  $[t_0, t_f]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) \quad (C_M)$$

**Remarque 2.1.** *Dans le cas d'absence de contrainte sur le contrôle,  $\Omega = \mathbb{R}^m$ , la condition de maximisation se réduit à une simple équation, dite de stationnarité ou de contrainte*

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0_{\mathbb{R}^m}. \quad (C_S)$$

On parle alors de Principe du Maximum faible.

**Remarque 2.2.** *Suivant la convention choisie sur le signe de la variable duale du coût  $p^0$ , on aboutit soit au Principe du Maximum (lorsque  $p^0 \leq 0$  comme précédemment), soit au Principe du Minimum (si  $p^0 \geq 0$ ).*

#### Conditions de transversalité

Suivant les hypothèses effectuées sur le temps final  $t_f$  ou sur les conditions finales, on aboutit à des conditions supplémentaires, dites de transversalité.

**Sur le Hamiltonien.** Si le temps final  $t_f$  pour joindre la cible  $M_1$  est *libre*, on dispose de la condition suivante à l'instant final

$$\max_{v \in \Omega} H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)), \quad (2.4)$$

ou bien

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)), \quad (CT_H)$$

dans le cas où la commande  $u$  est continue au temps  $t_f$ .

**Sur le vecteur adjoint.** Si les deux ensembles  $M_0$  et  $M_f$  (ou juste l'un des deux), sont des variétés de  $\mathbb{R}^n$  ayant des espaces tangents en  $x(0) \in M_0$  et  $x(t_f) \in M_f$ , alors le vecteur adjoint peut être construit de sorte à vérifier les conditions suivantes aux deux extrémités

$$p(t_0) \perp T_{x(t_0)}M_0 \quad \text{et} \quad p(t_f) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \perp T_{x(t_f)}M_f. \quad (CT_A)$$

### 2.1.3 Problème aux limites

Les conditions nécessaires d'optimalité apportées par le Principe du Maximum du Pontryagin nous permettent très souvent, via la condition de maximisation ( $C_M$ ), ou bien l'équation de stationnarité ( $C_S$ ), d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de l'état du système  $x(t)$  et l'état adjoint  $p(t)$

$$u(t) = U(x(t), p(t)), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (2.5)$$

Il peut ensuite se substituer dans les équations ( $EQH$ ), conduisant à un système différentiel vérifié par le couple  $(x(t), p(t))$  seulement

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, U(x(t), p(t))), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, U(x(t), p(t))) \quad t \in [t_0, t_f], \end{aligned} \quad (2.6)$$

auquel s'ajoute les conditions aux limites sur l'état et les éventuelles conditions de transversalité sur le vecteur adjoint. On aboutit dès lors à un « simple » *problème aux limites*, que l'on peut résoudre par les méthodes numériques usuelles de traitement de cette classe de problèmes (typiquement, méthode de *tir* et méthode de *collocation*).

Ci-dessous, on propose une formalisation des problèmes de transfert orbital à faible poussée sous la forme « contrôle optimal », qui s'inscrit dans les notions décrites précédemment.

## 2.2 Transfert optimal à faible poussée

L'objectif du problème de transfert *optimal* à faible poussée est typiquement de :

Propulser *continûment* un engin spatial à propulsion électro-ionique d'une orbite initiale à une orbite finale, de manière **performante**.

Une telle problématique s'inscrit dans le cadre du contrôle optimal. Il peut ainsi s'écrire sous la forme générale (2.1)-(2.2)-(2.3). Il nous faudra donc identifier :

1. l'état et la commande permettant de le contrôler,
2. le critère de performance à satisfaire,
3. la dynamique mise en jeu, à laquelle on ajoute les conditions initiales et finales que l'état doit vérifier.

### 2.2.1 Critère à minimiser

Deux types de critères seront considérés, conduisant à deux problèmes de transfert orbital différents. Dans le premier, on souhaite pouvoir l'effectuer en temps minimal, c'est-à-dire en minimisant la durée nécessaire pour atteindre l'orbite finale. Typiquement, cela revient à écrire

$$J = t_f, \quad (T)$$

où le temps final  $t_f$  est considéré comme *libre*. Dans le second, il s'agit de réduire la masse de carburant consommé par l'engin. Ce qui équivaut à maximiser sa masse totale en fin de transfert, puisque qu'elle correspond à la masse de carburant à laquelle s'ajoute la masse dite *sèche*, qui elle demeure constante. On a ainsi, à horizon final  $t_f$  *fixé*

$$J = -m(t_f); \quad (M)$$

où  $m$  désigne la masse de l'engin, qui est donc variable.

### 2.2.2 État et contrôle du système

L'état va simplement se constituer des paramètres permettant de décrire le mouvement de l'engin spatial, autrement dit ses éléments orbitaux *équinoxiaux*  $(a, f, g, h, k, L)$  auxquels vont s'ajouter sa masse  $m$ , dont l'évolution est donnée par l'équation  $(P)$ , rappelée ici

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\|\vec{u}\|}{v_e}. \quad (M_d)$$

La variable  $\vec{u}$  intervenant dans  $(M_d)$  représente la poussée de l'engin, *commande* qui va nous permettre d'agir sur le mouvement du satellite. La propulsion étant électro-ionique, cette dernière va être caractérisée par une magnitude faible

$$\|\vec{u}\| \leq u_{max}, \quad u_{max} > 0. \quad (C_u)$$

où  $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_T^2 + u_N^2 + u_Z^2}$  désigne la norme de  $\vec{u}$  dans le repère local tangentiel-normal.

### 2.2.3 Dynamique et conditions aux limites

On souhaite à partir d'une position *donnée* sur l'orbite initiale

$$(a_0, f_0, g_0, h_0, k_0, L_0),$$

atteindre une autre position *fixée* sur l'orbite finale

$$(a_f, f_f, g_f, h_f, k_f, L_f),$$

sous la dynamique de contrôle spécifiée par les équations  $(M_d)$  et  $(E_{G3})$ , redonnées conjointement ici,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, L) \frac{\vec{u}}{m} + f(x, L) \overrightarrow{\gamma_{LS}}(x, L) \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{\|\vec{u}\|}{v_e} \\ \frac{dL}{dt} = g_0(x, L) + g_1(x, L) \frac{\vec{u}}{m} + g_1(x, L) \overrightarrow{\gamma_{LS}}(x, L). \end{cases} \quad (Dy)$$

La longitude  $L_f$  finale étant fixée, on ne parle pas d'un simple transfert, mais d'un *rendez-vous*.

## **Deuxième partie**

# **Résolution des problèmes de transfert et rendez-vous orbitaux à faible poussée : moyennisation**

# Chapitre 3

## Approche théorique

Dans le Chapitre 1, après la définition de la notion de perturbation orbitale, nous avons pu mettre en évidence la caractéristique principale des problèmes de transfert orbital à faible poussée, à savoir la présence de plusieurs échelles d'évolution dans la dynamique. Cette spécificité oblige à recourir à des méthodes spécifiques de résolution telle que la *moyennisation*, ce qui va s'avérer être particulièrement adapté. En effet, cette dernière va permettre d'approcher (en un sens à préciser) le problème considéré via l'introduction d'un nouveau problème, dit *moyenné*.

Dans la première section, deux types de moyennisation vont être décrites, la seconde constituant une amélioration de la première. Nous verrons ensuite que la démarche réalisée pour la résolution des problèmes à faible poussée se situera au croisement de ces deux méthodes.

### 3.1 Moyennisation en contrôle optimal

#### 3.1.1 Moyennisation au sens de Chaplais

Cette méthode a été mise en œuvre par F. Chaplais lors de sa thèse [9]. Il s'agit d'une adaptation aux problèmes de contrôle optimal à dynamique « perturbée » des techniques de moyennisation qui existaient déjà pour les systèmes différentiels, entrant dans le cadre des perturbations *singulières*. Nous en présentons une brève description de ses concepts. Pour une revue complète et documentée des méthodes de moyennisation en général, voir [11].

#### Problème générique

Afin de mieux comprendre les principes sous-jacents à cette technique, considérons le problème de contrôle optimal suivant, dit « rapidement oscillant ». Il s'agit de trouver la commande  $u$  contrainte,  $u \in \Omega$ , minimisant le critère intégral

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt, \quad (3.1)$$

sous la dynamique à valeur initiale et à horizon fixé

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, \frac{t}{\varepsilon}, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $x$  représente classiquement l'état du système,  $\varepsilon > 0$  un paramètre *petit* relativement aux autres grandeurs et  $f$  une fonction  $\omega$ -périodique par rapport à la variable  $\frac{t}{\varepsilon}$ . Un tel système présente, implicitement, deux échelles d'évolution différentes au sein de sa dynamique. En effet,

en posant  $s = \frac{t}{\varepsilon}$  et en exprimant (3.2) en fonction de cette variable on obtient

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \varepsilon f(\varepsilon s, s, x(s), u(s)) \\ \frac{ds}{ds} = 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Au regard de ces équations, on va qualifier les variables  $x$  et  $t$  respectivement de mouvement et de temps *lents*, et  $\frac{t}{\varepsilon}$  de temps *rapide*.

La résolution du problème de contrôle optimal (3.1)-(3.2) conduit à l'application du Principe du Minimum de Pontryagin faible. Les conditions nécessaires d'optimalité prennent la forme suivante

$$\begin{cases} u(t, \frac{t}{\varepsilon}, x(t), p(t)) = \operatorname{argmin}_{v \in \Omega} H(t, \frac{t}{\varepsilon}, x(t), p(t), p^0, v) \\ \frac{dx}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, \frac{t}{\varepsilon}, x(t), p(t), p^0, u(t, \frac{t}{\varepsilon})) \\ \frac{dp}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, \frac{t}{\varepsilon}, x(t), p(t), p^0, u(t, \frac{t}{\varepsilon})) \\ x(t_0) = x_0 \\ p(t_f) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $H(t, \frac{t}{\varepsilon}, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, \frac{t}{\varepsilon}, x, u) \rangle + p^0 L(t, x, u)$  désigne le Hamiltonien du système,  $p$  la variable adjointe associée à l'état  $x$  et  $p^0 \geq 0$  la variable duale du coût. On se retrouve face à un système différentiel (en supposant que la minimisation du Hamiltonien puisse s'effectuer formellement), où cette fois, le couple  $(x, p)$  représente le mouvement lent, et  $(t, \frac{t}{\varepsilon})$  les temps lent et rapide. Les différentes vitesses d'évolution, présentes dans la dynamique du système initial (3.2) subsistent au sein du système extrémal (3.4), rendant sa résolution difficile du point de vue numérique. Pour y remédier, on va procéder à l'élimination du temps rapide  $\frac{t}{\varepsilon}$ , pour obtenir un système plus simple à résoudre car ne dépendant que du temps lent  $t$ . Cette élimination se traduit par un processus de *moyennisation*.

### Problème moyenné

On introduit le système extrémal *moyenné* suivant

$$\begin{cases} \tilde{u}(t, \frac{t}{\varepsilon}, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t)) = \operatorname{argmin}_{v \in \Omega} H(t, \frac{t}{\varepsilon}, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), p^0, v) \\ \frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \tilde{p}}(t, \cdot, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), p^0, \tilde{u}(t, \cdot)) \\ \frac{d\tilde{p}}{dt}(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \tilde{x}}(t, \cdot, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), p^0, \tilde{u}(t, \cdot)) \\ \tilde{x}(t_0) = x_0 \\ \tilde{p}(t_f) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

qui approche le système (3.4), où l'on désigne par

- $\tilde{x}$  l'état moyenné,
- $\tilde{p}$  l'état adjoint moyenné associé à  $\tilde{x}$ , et
- $\bar{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, p^0, u) = \overline{\langle \tilde{p}, f(t, \cdot, \tilde{x}, \tilde{u}(t, \cdot)) \rangle} + p^0 \overline{L(t, \tilde{x}, \tilde{u}(t, \cdot))}$  le Hamiltonien moyenné.

Précisons que l'opérateur de moyenne  $\bar{\cdot}$  est défini par

$$\overline{f(t, x, \cdot)} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t, x, \theta) d\theta,$$

pour une fonction  $(t, x, \theta) \mapsto f(t, x, \theta)$   $\omega$ -périodique par rapport à la variable  $\theta$ . La commande  $\tilde{u}$ , qualifiée également de moyennée, possède, contrairement aux variables  $\tilde{x}$  et  $\tilde{p}$  deux composantes : une lente via  $t$ , et une rapide via  $\frac{t}{\varepsilon}$ . Elle est donc à variation rapide. On peut montrer que

le système moyenné (3.5) correspond en réalité aux conditions nécessaires d'optimalité d'un nouveau problème de contrôle optimal, dit *moyenné*, dans lequel la commande optimale moyennée  $\tilde{u}$  minimise le coût

$$J(\tilde{u}) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt, \quad (3.6)$$

sachant que

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \overline{f(t, \cdot, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t, \cdot))} \\ \tilde{x}(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.7)$$

où le temps final  $t_f$  reste fixé. Ce problème moyenné constitue une approximation satisfaisante du problème de contrôle optimal initial, dans le sens où ce dernier « converge » vers le problème moyenné lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. En effet, puisque le système (3.5) coïncide avec l'approximation asymptotique première des conditions nécessaires d'optimalité du problème initial générique. On peut ainsi utiliser la solution du problème moyenné (3.6)-(3.7) pour approcher la solution de (3.1)-(3.2), à condition que  $\varepsilon$  reste « suffisamment » petit.

### Problème induit

On peut également avoir recours à la commande moyennée pour contrôler la dynamique (3.2) du système d'origine. Il s'agit alors d'approcher la solution de l'équation différentielle suivante, qualifiée de *induite*

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = f(t, \frac{t}{\varepsilon}, \hat{x}(t), \tilde{u}(t)) \\ \hat{x}(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

F. Chaplais a établi des résultats d'erreur entre la solution d'un tel système, la solution moyennée et la solution du problème générique. Cette erreur est en  $O(\varepsilon)$  pour l'état (en norme  $L^\infty$ ), et le contrôle (en norme  $L^2$ ). En ce qui concerne le coût, l'erreur est en  $O(\varepsilon^2)$ .

S. Geffroy a, lors de sa thèse [11], généralisé ces résultats et la notion de moyennisation au cas de problème de contrôle optimal à variable indépendante finale  $t_f$  libre, et à état final  $x(t_f)$  fixé. Toutefois, malgré ces améliorations, cette moyennisation « au sens de Chaplais » présente quelques limites, dans le sens où

- il ne permet pas de prendre en compte la situation où le critère à minimiser dépendrait éventuellement de la variable rapide  $\frac{t}{\varepsilon}$  ;
- l'hypothèse de périodicité par rapport à  $\frac{t}{\varepsilon}$  reste restrictive, rendant la méthode inapplicable dans le cas contraire ;
- l'approximation asymptotique empêche l'écriture de résultats d'erreur adaptés au phénomène numérique, par exemple en considérant  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ .

Toutes ces raisons ont conduit au développement d'une nouvelle technique de moyennisation, purement numérique, détachée de ces contraintes.

### 3.1.2 Moyennisation par fenêtres

Cette nouvelle méthode de moyennisation se situe à la croisée entre contrôle optimal et traitement du signal. Elle a également été développée par F. Chaplais, mais S. Bernard, étudiante à l'ENS Cachan, a confirmé la validité de cette méthode en démontrant des résultats d'erreurs similaires à ceux de la moyennisation ci-dessus, mais *non asymptotiques* [1]. On verra que certains des concepts décrits précédemment vont être conservés, auxquels vont s'ajouter de nouveaux outils.

## Problème générique

On s'intéresse à la résolution du problème de contrôle optimal suivant. Trouver  $u$  contrôle non contraint,  $\Omega = \mathbb{R}^m$ , minimisant le coût intégral

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt, \quad (3.9)$$

sous la dynamique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.10)$$

à variable indépendante finale fixée. La variable  $t$  intervenant dans l'expression des fonctions  $L$  et  $f$  représente ici les *perturbations* extérieures du système.

La commande  $u$  optimale, solution de ce problème est obtenue en appliquant le Principe de Minimum de Pontryagin faible. Les conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u) = 0 \\ \frac{dx}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u) \\ \frac{dp}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u) \\ x(t_0) = x_0 \\ p(t_f) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Tout l'enjeu va résider dans l'élimination des perturbations, qui persistent dans ce système extrémal (3.11) (via la présence de la variable  $t$  dans les seconds membres), rendant souvent compliqué sa résolution numérique, et pouvant engendrer des coûts de calcul rédhibitoires.

## Problème moyenné

Introduisons pour cela le filtre passe-bas linéaire croissant, que l'on peut voir comme un opérateur de moyenne par morceaux

$$LP[f](\cdot, x) = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x) dt, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (LP)$$

pour une subdivision  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_f$  donnée. La moyennisation du système (3.11) conduit aux relations

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), p^0, \tilde{u}) = 0 \\ \frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \tilde{p}}(\cdot, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), p^0, u(\cdot)) \\ \frac{d\tilde{p}}{dt}(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \tilde{x}}(\cdot, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), p^0, \tilde{u}(\cdot)) \\ \tilde{x}(t_0) = x_0 \\ \tilde{p}(t_f) = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

dont on peut montrer qu'elles correspondent aux conditions nécessaires d'optimalité d'un problème de contrôle optimal *moyenné*, où la commande  $\tilde{u}$  minimise

$$J(\tilde{u}) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt, \quad (3.13)$$

sachant que

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = LP[f(\cdot, \tilde{x}(t), \tilde{u}(\cdot))] \\ \tilde{x}(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.14)$$

à horizon fixé. On désigne ainsi par

- $\tilde{x}$  l'état moyenné,
- $\tilde{p}$  l'état adjoint moyenné, associé à l'état  $\tilde{x}$ ,
- $\bar{H}(\tilde{x}, \tilde{p}, p^0, \tilde{u}) = \langle \tilde{p}, LP[f(\cdot, \tilde{x}, \tilde{u}(\cdot))] \rangle + p^0 LP[L(\cdot, \tilde{x}, \tilde{u}(\cdot))]$  le Hamiltonien moyenné.

Le problème de contrôle optimal moyenné (3.13)-(3.14) défini de la sorte, approche le problème initial (3.9)-(3.10) dans le sens où les quantités

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \int_{t_0}^t f - LP[f] ds \\ \Gamma(t) &= \int_{t_0}^t L - LP[L] ds.\end{aligned}\tag{3.15}$$

sont *uniformément* petites, ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre inférieur à deux par rapport aux variables  $x$  et  $u$ . Ainsi la quantité que l'on considère comme « petite » ici est

$$\alpha = \sup \left( \left\| \frac{\partial^{p+q} \Delta}{\partial x^p \partial u^q} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial^{p+q} \Gamma}{\partial x^p \partial u^q} \right\|_{\infty}, p + q \leq 2 \right).\tag{3.16}$$

### Problème induit

Cette fois, on dispose de résultats d'erreur reliant la solution du problème de contrôle optimal initial (3.9)-(3.10) à celle du système différentiel suivant, dit *induit*

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = f(t, \hat{x}(t), \tilde{u}(t)) \\ \hat{x}(t_0) = x_0, \end{cases}\tag{3.17}$$

dépendants du paramètre  $\alpha$ , et valable sur un intervalle du type  $[0, \alpha_0[$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,

$$\begin{aligned}\|\hat{x} - \tilde{x}\|_2 &\leq k_x \alpha \\ \|u - \tilde{u}\|_2 &\leq k_u \alpha \quad \text{et} \\ J(u) &\leq J(\tilde{u}) \leq J(u) + k_J \alpha^2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Les constantes  $\alpha_0$ ,  $k_x$ ,  $k_u$  et  $k_J$  sont connues. Le caractère asymptotique qui était propre aux techniques « classiques » de moyennisation n'est plus présent, ce qui rend cette nouvelle méthode d'autant plus robuste et adaptée aux considérations numériques.

Cette brève introduction à deux principales techniques de moyennisation, au sens de Chaplais et par fenêtres, a permis de mettre en évidence leurs points communs et leurs différences, et surtout de souligner les améliorations apportées par la seconde aux points faisant défaut la première. La seconde méthode de moyennisation va être appliquée aux problèmes de transferts optimaux à faible poussée décrits au Chapitre 2. Toutefois, nous montrerons que leur dynamique pourra s'écrire sous la forme (3.2), forme qui sera retenue pour appliquer la méthode de moyennisation par fenêtres.

## 3.2 Démarche réalisée

Le processus de résolution des problèmes de transfert optimal à faible poussée se situe au croisement des deux techniques de moyennisation précédentes. Dans le sens où, deux phases sont distinguées dans leur traitement :

1. la dynamique (*Dy*), et plus généralement le problème de commande optimale associé, est transformée sous la forme « standard de Chaplais » (3.2) permettant de séparer en variable *angulaire* (ce terme sera précisé par la suite) les mouvements lents du système, de la variable angulaire rapide ;
2. cette distinction étant réalisée, on procède à l'élimination de ce terme perturbateur via le processus de moyennisation par fenêtres, consistant à moyenniser le système sur *chaque* période orbitale.

### 3.2.1 Transformation de la dynamique

Cette transformation se traduit par la mise sous forme *standard de Chaplais*, permettant d'isoler la variable rapide, la longitude vraie  $L$  de position de l'engin spatial sur son orbite, afin de procéder à son élimination ultérieure. Les paramètres non angulaires décrivant le mouvement du satellite vont dépendre ainsi d'une longitude *lente*, introduite artificiellement. Cette démarche s'inspire de celle réalisée par S. Geffroy durant sa thèse [11]. Cette transformation va se diviser en trois étapes :

1. une mise à l'échelle des variables dimensionnées ;
2. une formulation angulaire de l'ensemble des paramètres ;
3. un passage sous forme standard.

#### Mise à l'échelle

Cette mise à l'échelle permet d'obtenir des variables sans dimension et proche de 1. Ce procédé va également faire apparaître plusieurs paramètres dans les équations :

- $\varepsilon$  liée à la *faible* poussée de l'engin ;
- $\varepsilon_L$  au mouvement de la Lune et ;
- $\varepsilon_S$  au mouvement du Soleil ;

Numériquement, on constatera que

$$\varepsilon \ll \varepsilon_L \ll \varepsilon_S.$$

Les variables auront ensuite la même magnitude, ce qui facilitera la résolution numérique ultérieure. Introduisons

$$\underline{t} = \sqrt{\frac{\mu}{a_f^3}} t \quad \underline{a} = \frac{a}{a_f} \quad \underline{m} = \frac{m}{m_0} \quad \underline{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{u_{max}} \quad (VME)$$

**Influence sur la dynamique.** Cette dernière va prendre la forme suivante, où par souci de clarté, les notations ont été simplifiées

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{d\underline{t}} = \varepsilon f(\underline{x}, \underline{L}) \frac{\underline{\vec{u}}}{m} + \sum_{A=L,S} \varepsilon_A f(\underline{x}, \underline{L}) \underline{\vec{\gamma}}_A \\ \frac{d\underline{m}}{d\underline{t}} = -\frac{u_{max}}{m_0 v_e} \sqrt{\frac{a_f^3}{\mu}} \|\underline{\vec{u}}\| \\ \frac{d\underline{L}}{d\underline{t}} = g_0(\underline{x}, \underline{L}) + \varepsilon g_1(\underline{x}, \underline{L}) \frac{\|\underline{\vec{u}}\|}{m} + \sum_{A=L,S} \varepsilon_A g_1(\underline{x}, \underline{L}) \underline{\vec{\gamma}}_A, \end{cases} \quad (3.19)$$

où l'accélération associée à l'attraction luni-solaire s'écrit sous la forme modifiée suivante. Pour  $A = L, S$

$$\underline{\vec{\gamma}}_A = \mu_A \left[ M_3^\top \begin{pmatrix} \underline{\vec{\gamma}}_A^I \\ \underline{\vec{\gamma}}_A^J \\ \underline{\vec{\gamma}}_A^K \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \underline{\vec{T}} \\ \underline{\vec{N}} \\ \underline{\vec{Z}} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

où les composantes de cette accélération dans le repère inertiel équatorial  $(\underline{\vec{T}}, \underline{\vec{J}}, \underline{\vec{K}})$  s'écrivent

$$\underline{\vec{\gamma}}_A^I = \frac{1}{a_f^2} \left[ \frac{\frac{X_A}{a_f} - X}{\sqrt{\left(\frac{X_A}{a_f} - X\right)^2 + \left(\frac{Y_A}{a_f} - Y\right)^2 + \left(\frac{Z_A}{a_f} - Z\right)^2}} - \frac{X_A}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}} \right],$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_A^J &= \frac{1}{a_f^2} \left[ \frac{\frac{Y_A}{a_f} - Y}{\sqrt{\left(\frac{X_A}{a_f} - X\right)^2 + \left(\frac{Y_A}{a_f} - Y\right)^2 + \left(\frac{Z_A}{a_f} - Z\right)^2}} - \frac{Y_A}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}} \right], \\ \bar{\gamma}_A^K &= \frac{1}{a_f^2} \left[ \frac{\frac{Z_A}{a_f} - Z}{\sqrt{\left(\frac{X_A}{a_f} - X\right)^2 + \left(\frac{Y_A}{a_f} - Y\right)^2 + \left(\frac{Z_A}{a_f} - Z\right)^2}} - \frac{Z_A}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}} \right].\end{aligned}$$

Cette fois, les coordonnées cartésiennes,  $(X, Y, Z)^\top$  du satellite dans le repère inertiel équatorial s'écrivent à l'aide des éléments orbitaux équinoxiaux *normalisés*, toujours grâce à la relation  $(R_1)$ . Les paramètres  $\varepsilon_L$  et  $\varepsilon_S$  valent quant à eux

$$\varepsilon_L = \mu_L \frac{a_f^2}{\mu}, \quad \varepsilon_S = \mu_S \frac{a_f^2}{\mu}, \quad (3.21)$$

dans lesquels  $\mu_L = Gm_L$  et  $\mu_S = Gm_S$  désignent les constantes gravitationnelles lunaire et solaire.

**Influence sur la contrainte sur le contrôle.** La poussée est maintenant *normalisée*, ce qui se traduit sur la contrainte par

$$\|\vec{u}\| \leq 1. \quad (3.22)$$

**Influence sur le coût.** Pour le critère temps minimum on a

$$J = \sqrt{\frac{a_f^3}{\mu}} t, \quad (3.23)$$

alors que pour le critère consommation minimum, la fonction coût  $J$  s'écrit

$$J = -m_0 m(t_f). \quad (3.24)$$

**Influence sur les conditions aux limites.** Seules les conditions liées au demi-grand axe  $a$  et à la masse de l'engin  $m$  sont modifiées

$$\begin{aligned}a(t_0) &= \frac{a_0}{a_f} & a(t_f) &= \frac{a_f}{a_f} = 1 \\ p(t_0) &= p_0 & p(t_f) &= p_f \quad \text{pour } p = f, g, h, k \\ L(t_0) &= L_0 & L(t_f) &= L_f \\ m(t_0) &= 1 & m(t_f) &\text{ libre.}\end{aligned} \quad (3.25)$$

### Formulation angulaire

On va effectuer un reparamétrage de ces équations, en adoptant une formulation *angulaire* : on exprime l'évolution des différents paramètres en fonction de la variable angulaire rapide  $L$  et non du temps. Ce dernier va alors apparaître en tant que variable d'état, la position sur orbite devenant la nouvelle variable libre. Il va d'ailleurs subir une autre transformation, devenant à évolution « lente »

$$\tau = \varepsilon \underline{t}. \quad (3.26)$$

Ce changement est nécessaire à la mise sous forme standard qui va succéder.

**Influence sur la dynamique.** Si l'on désigne par  $q$ , la variable  $x$ ,  $L$  ou  $m$ , on peut écrire de manière générale

$$\frac{dq}{dL} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{dL},$$

et

$$\frac{d\tau}{dL} = \varepsilon \frac{d\tau}{dt},$$

pour obtenir les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dL} = \frac{\varepsilon f(x, L) \frac{\vec{u}}{m} + \sum_{A=L,S} \varepsilon_A f(x, L) \vec{\gamma}_A}{g_0(x, L) + \varepsilon g_1(x, L) \frac{\|\vec{u}\|}{m} + \sum_{A=L,S} \varepsilon_A g_1(x, L) \vec{\gamma}_A} \\ \frac{dm}{dL} = - \frac{\frac{u_{max}}{m_0 v_e} \sqrt{\frac{a_f^3}{\mu}} \|\vec{u}\|}{g_0(x, L) + \varepsilon g_1(x, L) \frac{\|\vec{u}\|}{m} + \sum_{A=L,S} \varepsilon_A g_1(x, L) \vec{\gamma}_A} \\ \frac{d\tau}{dL} = \frac{\varepsilon}{g_0(x, L) + \varepsilon g_1(x, L) \frac{\|\vec{u}\|}{m} + \sum_{A=L,S} \varepsilon_A g_1(x, L) \vec{\gamma}_A}. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Ce système va être légèrement simplifié : on suppose que la variable angulaire  $L$  de position sur orbite n'est influencée par *aucune* perturbation orbitale, ce qui nous conduit à la dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dL} = \frac{1}{g_0(x, L)} \left[ \varepsilon f(x, L) \frac{\vec{u}}{m} + \sum_{A=L,S} \varepsilon_A f(x, L) \vec{\gamma}_A \right] \\ \frac{dm}{dL} = - \frac{1}{g_0(x, L)} \left[ \frac{u_{max}}{m_0 v_e} \sqrt{\frac{a_f^3}{\mu}} \|\vec{u}\| \right] \\ \frac{d\tau}{dL} = \frac{\varepsilon}{g_0(x, L)}. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

**Influence sur le coût.** Le critère temps minimum agit maintenant sur le temps lent  $\tau$

$$J = \sqrt{\frac{a_f^3}{\mu}} \frac{1}{\varepsilon} \tau(L_f). \quad (3.29)$$

Le critère consommation minimum de carburant s'écrit quant à lui

$$J = -m_0 m(L_f). \quad (3.30)$$

**Influence sur les conditions aux limites.** On dispose de

$$\begin{array}{l} a(L_0) = \frac{a_0}{a_f} \quad a(L_f) = 1 \\ p(L_0) = p_0 \quad p(L_f) = p_f \quad \text{pour } p = f, g, h, k \\ \tau(L_0) = \varepsilon t_0 \quad \tau(L_f) \text{ libre} \\ m(L_0) = 1 \quad m(L_f) \text{ libre.} \end{array} \quad (3.31)$$

### Mise sous forme standard

On se ramène à la forme standard de Chaplais en considérant le changement de variable angulaire suivant

$$l = \varepsilon L, \quad (3.32)$$

nouvelle variable *indépendante*.

**Influence sur la dynamique.** Les seconds membres des équations associés aux variables  $x$ ,  $m$  et  $\tau$  sont divisés par  $\varepsilon$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dl} = \frac{1}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \left[ f(x, \frac{l}{\varepsilon}) \frac{\vec{u}}{m} + \sum_{A=L,S} \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon} f(x, \frac{l}{\varepsilon}) \vec{\gamma}_A \right] \\ \frac{dm}{dl} = -\frac{\delta}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \|\vec{u}\| \\ \frac{d\tau}{dl} = \frac{1}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})}, \end{cases} \quad (3.33)$$

où la constante  $\delta$  vaut  $\frac{1}{v_e} \sqrt{\frac{\mu}{a_f}}$ .

**Influence sur le coût.** Le coût temps minimum prend la forme suivante

$$J = \sqrt{\frac{a_f^3}{\mu}} \frac{1}{\varepsilon} \tau(l_f), \quad (3.34)$$

et le critère consommation minimum

$$J = -m_0 m(l_f). \quad (3.35)$$

**Influence sur les conditions aux limites.** Ces derniers s'écrivent

$$\begin{aligned} a(l_0) &= \frac{a_0}{a_f} & a(l_f) &= 1 \\ p(l_0) &= p_0 & p(l_f) &= p_f \quad \text{pour } p = f, g, h, k \\ \tau(l_0) &= \varepsilon t_0 & \tau(l_f) & \text{ libre} \\ m(l_0) &= 1 & m(l_f) & \text{ libre.} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Si l'on récapitule, le problème de transfert orbital à faible poussée sous perturbation luni-solaire consiste à :

Trouver  $\vec{u}$  vecteur poussée *optimal* minimisant le temps de transfert

$$J = \sqrt{\frac{a_f^3}{\mu}} \frac{1}{\varepsilon} \tau(l_f), \quad (C_T)$$

ou bien le carburant consommé

$$J = -m_0 m(l_f), \quad (C_M)$$

permettant, à partir d'une position donnée sur l'orbite initiale, d'atteindre la position voulue sur l'orbite finale

$$\begin{aligned} a(l_0) &= \frac{a_0}{a_f} & a(l_f) &= 1 \\ p(l_0) &= p_0 & p(l_f) &= p_f \quad \text{pour } p = f, g, h, k \\ \tau(l_0) &= \varepsilon t_0 & \tau(l_f) & \text{ libre} \\ m(l_0) &= 1 & m(l_f) & \text{ libre,} \end{aligned} \quad (C_L)$$

sous la dynamique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dl} = \frac{1}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \left[ f(x, \frac{l}{\varepsilon}) \frac{\vec{u}}{m} + \sum_{A=L,S} \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon} f(x, \frac{l}{\varepsilon}) \vec{\gamma}_A(x, \frac{l}{\varepsilon}) \right] \\ \frac{dm}{dl} = -\frac{\delta}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \|\vec{u}\| \\ \frac{d\tau}{dl} = \frac{1}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})}, \end{cases} \quad (D)$$

### 3.2.2 Moyennisation sur chaque période orbitale

Afin de résoudre le problème de contrôle optimal *transformé*, défini par  $(C_T)$ - $(C_M)$ - $(C_L)$ - $(D)$  (cas temps minimum) ou bien  $(C_M)$ - $(C_M)$ - $(C_L)$ - $(D)$  (cas consommation minimum), on va moyenniser la dynamique sur *chaque* période orbitale, en éliminant le mouvement rapide représenté par la variable  $\frac{l}{\varepsilon}$ . Cette approximation apparaît tout de suite valide, du moins au niveau physique puisque les paramètres orbitaux équinoxiaux de l'engin, ainsi que sa masse ne varie que peu sur chaque période orbitale.

On introduit alors l'opérateur de moyenne par morceaux  $LP$ , défini par  $(LP)$ , en subdivisant l'intervalle  $[L_0, L_f]$  (à laquelle appartient la variable par rapport à laquelle on moyenne) en  $N$  sous-intervalles de longueur  $2\pi$ . L'entier naturel  $N$  représentant le nombre total de révolutions de l'engin autour de la Terre, que l'on fixe. Le problème de contrôle optimal *moyenné* va s'écrire

Trouver  $\vec{u}$  vecteur poussée *optimal* minimisant le temps de transfert

$$J = \sqrt{\frac{a_f^3}{\mu}} \frac{1}{\varepsilon} \tau(l_f), \quad (C_T)$$

ou bien le carburant consommé

$$J = -m_0 m(l_f), \quad (C_M)$$

permettant, à partir d'une position donnée sur l'orbite initiale, d'atteindre la position voulue sur l'orbite finale

$$\begin{aligned} a(l_0) &= \frac{a_0}{a_f} & a(l_f) &= 1 \\ p(l_0) &= p_0 & p(l_f) &= p_f \quad \text{pour } p = f, g, h, k \\ \tau(l_0) &= \varepsilon t_0 & \tau(l_f) & \text{ libre} \\ m(l_0) &= 1 & m(l_f) & \text{ libre,} \end{aligned} \quad (C_L)$$

sous la dynamique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dl} = LP \left[ \frac{1}{g_0(x, \cdot)} \left[ f(x, \cdot) \frac{\vec{u}(l, \cdot)}{m} + \sum_{A=L,S} \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon} f(x, \cdot) \vec{\gamma}_A(x, \cdot) \right] \right] \\ \frac{dm}{dl} = -LP \left[ \frac{\delta}{g_0(x, \cdot)} \|\vec{u}(l, \cdot)\| \right] \\ \frac{d\tau}{dl} = LP \left[ \frac{1}{g_0(x, \cdot)} \right], \end{cases} \quad (D)$$

Passons maintenant à sa résolution.

### 3.3 Structure du contrôle optimal

Le problème de transfert optimal à faible poussée étant maintenant sous la forme requise pour l'application de la méthode de moyennisation, il ne nous reste plus qu'à s'intéresser à sa résolution effective. Cette résolution repose essentiellement sur l'application du Principe du Minimum de Pontryagin dans sa version forte. Ce théorème va nous permettre d'obtenir l'expression de la commande optimale solution, ainsi que de la trajectoire optimale associée. Concentrons nous dans un premier temps sur le calcul effectif de cette commande particulière. Pour cela, on écrit d'abord l'expression du Hamiltonien *non moyenné* associé au système de contrôle

$$\begin{aligned} H(x, \tau, m, p_x, p_\tau, p_m, u, \frac{l}{\varepsilon}) &= \frac{1}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \left[ \frac{1}{m} \langle p_x, f(x, \frac{l}{\varepsilon}) \vec{u} \rangle + \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon} \langle p_x, f(x, \frac{l}{\varepsilon}) \vec{\gamma}_L \rangle + \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon} \langle p_x, f(x, \frac{l}{\varepsilon}) \vec{\gamma}_S \rangle + p_\tau - \delta p_m \|\vec{u}\| \right], \\ &= \frac{1}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \left[ \frac{1}{m} \langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{u} \rangle + \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon} \langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{\gamma}_L \rangle + \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon} \langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{\gamma}_S \rangle + p_\tau - \delta p_m \|\vec{u}\| \right] \end{aligned} \quad (H)$$

où  $p_x = (p_a, p_f, p_g, p_h, p_k)^\top$ ,  $p_\tau$  et  $p_m$  représentent respectivement les états adjoints associés aux paramètres orbitaux équinoxiaux non angulaires  $x = (a, f, g, h, k)^\top$ , au temps lent  $\tau$  et à la masse  $m$ . Le contrôle optimal est alors solution du problème de *minimisation* suivant

$$H(x, \tau, m, p_x, p_\tau, p_m, \vec{u}, \frac{l}{\varepsilon}) = \min_{\|\vec{v}\| \leq 1} H(x, \tau, m, p_x, p_\tau, p_m, \vec{v}, \frac{l}{\varepsilon}). \quad (C_{min})$$

Afin de résoudre ce problème d'optimisation, on va effectuer la décomposition suivante

$$\vec{u} = nu_n, \quad (3.37)$$

où  $n$  désigne la norme de  $\vec{u}$  dans le repère local tangentiel-normal, et  $u_n$  le vecteur direction, de norme égale à 1. Cette écriture du contrôle va permettre de découpler la minimisation du Hamiltonien, puisque

$$\vec{u} \in \mathcal{B}(0, 1) \iff 0 \leq n \leq 1 \text{ et } u_n \in \mathcal{S}(0, 1). \quad (3.38)$$

Écrivons alors cet Hamiltonien en fonction de ces nouvelles variables

$$H(x, \tau, m, p_x, p_\tau, p_m, n, u_n, \frac{l}{\varepsilon}) = \frac{1}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \left[ n \left( \frac{1}{m} \left\langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, u_n \right\rangle - \delta p_m \right) + \frac{\varepsilon L}{\varepsilon} \left\langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{\gamma}_L \right\rangle + \frac{\varepsilon S}{\varepsilon} \left\langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{\gamma}_S \right\rangle + p_\tau \right], \quad (H_1)$$

et procédons à son optimisation.

### 3.3.1 Première minimisation

Minimiser  $(H_1)$  par rapport à la variable  $u_n \in \mathcal{S}(0, 1)$  équivaut à minimiser la fonction suivante

$$J_1 = \left\langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, u_n \right\rangle. \quad (3.39)$$

Sa solution est donnée par le théorème de Karush-Kuhn-Tucker d'optimisation sous contraintes

$$u_n = - \frac{f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x}{\|f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x\|}, \quad (S_1)$$

que l'on remplace ensuite dans l'expression du Hamiltonien  $(H_1)$

$$H(x, \tau, m, p_x, p_\tau, p_m, n, \frac{l}{\varepsilon}) = \frac{1}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \left[ n \left( -\frac{1}{m} \|f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x\| - \delta p_m \right) + \frac{\varepsilon L}{\varepsilon} \left\langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{\gamma}_L \right\rangle + \frac{\varepsilon S}{\varepsilon} \left\langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{\gamma}_S \right\rangle + p_\tau \right]. \quad (H_2)$$

### 3.3.2 Seconde minimisation

La minimisation du Hamiltonien  $(H_2)$  par rapport à  $n \in [0, 1]$  se réduit à la minimisation de la fonction

$$J_2 = \left( -\frac{1}{m} \|f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x\| - \delta p_m \right) n, \quad (3.40)$$

dont le signe dépend de la fonction  $\phi = \frac{1}{m} \|f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x\| + \delta p_m$ , appelée fonction de commutation,

$$n = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi < 0 \\ 1 & \text{si } \phi > 0. \end{cases} \quad (S_2)$$

Le contrôle optimal vaut donc

$$\vec{u} = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi < 0 \\ - \frac{f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x}{\|f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x\|} & \text{si } \phi > 0. \end{cases} \quad (S)$$

a priori quelque soit le problème de transfert orbital considéré, à temps minimum ou à consommation minimum. Cependant, dans le cas du transfert à temps minimum, ce contrôle optimal ne reste pas discontinu.

### 3.3.3 Cas du transfert à temps minimum

Dans cette situation, le signe de la fonction de commutation  $\phi$  peut être déterminée précisément. Son signe dépend de celui de la variable adjointe associée à la masse  $m$ ,  $p_m$ , dont l'évolution est donnée par

$$\frac{dp_m}{dl} = \frac{1}{m^2 g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \left\langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{u} \right\rangle = -\frac{n}{m^2 g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \|f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x\| < 0. \quad (3.41)$$

Ainsi, le paramètre  $p_m$  est strictement décroissant. De plus, puisque  $m(l_f)$  est libre, on dispose de la condition de transversalité suivante,  $p_m(l_f) = 0$ , ce qui nous permet de déduire que  $p_m$  est une fonction positive. La fonction de commutation  $\phi$  est donc de même signe, conduisant à la stratégie de poussée optimale suivante

$$\vec{u} = -\frac{f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x}{\|f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x\|}. \quad (S_T)$$

## Chapitre 4

# Approche numérique : outils et méthodes

On s'intéresse dans ce chapitre à la mise en œuvre effective du point de vue *numérique* des techniques permettant de résoudre les problèmes de transferts orbitaux à faible poussée sous perturbation luni-solaire. On montre dans un premier temps que l'application du Principe du Minimum de Pontryagin au problème **moyenné**, effectué « partiellement » dans le chapitre précédent pour le calcul de la commande optimale, conduit à l'écriture d'un *problème aux limites*, où figure entre autres la dynamique **moyennée** du problème de transfert étudié. Ceci étant fait, on décrit le processus réalisé pour résoudre ce *problème aux deux bouts* (autre dénomination pour problème aux limites), au niveau des outils utilisés.

### 4.1 Problème aux limites

Dans le chapitre précédent, nous avons, pour résoudre le problème de transfert orbital à faible poussée *moyenné* sous perturbation luni-solaire, eu recours au Principe du Minimum de Pontryagin fort. Ce dernier a été utilisé d'abord pour l'écriture de l'expression de la commande *moyennée* optimale, donnée par  $(S)$  (et en particulier  $(S_T)$  pour le critère temps minimum), dont on remarque qu'elle présente deux composantes : une *lente* via la variable indépendante  $l$ , et une *rapide* via la variable  $\frac{l}{\varepsilon}$ . Ce qui est caractéristique des techniques de moyennisation en contrôle optimal. Sa substitution dans le système extrémal *moyenné*, obtenu par différentiation du Hamiltonien *moyenné*, conduit aux équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dl}(l) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_x}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l), u(l, \cdot)) \\ \frac{d\tau}{dl}(l) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_\tau}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l), u(l, \cdot)) \\ \frac{dm}{dl}(l) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_m}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l), u(l, \cdot)) \\ \frac{dp_x}{dl}(l) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l), u(l, \cdot)) \\ \frac{dp_\tau}{dl}(l) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \tau}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l), u(l, \cdot)) \\ \frac{dp_m}{dl}(l) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial m}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l), u(l, \cdot)) \end{array} \right. \quad (SE_1)$$

où  $\bar{H}$  désigne le Hamiltonien *moyenné*  $\bar{H}(l, \cdot, x, \tau, m, p_x, p_\tau, p_m, u) = LP[H(l, \cdot, x, \tau, m, p_x, p_\tau, p_m, u(l, \cdot))]$ . Ce système extrémal est vérifié pour tout  $l \in [l_0, l_f]$ , où l'on désigne de manière inchangée par  $x$  les paramètres orbitaux non angulaires  $(a, f, g, h, k)^\top$ ,  $\tau$  le temps lent et  $m$  la masse de l'engin, avec  $p_x$ ,  $p_\tau$  et  $p_m$  les états adjoints associés. Ces

équations peuvent s'écrire de manière équivalente en faisant intervenir le Hamiltonien *minimisé*, correspondant à l'inclusion de l'expression du contrôle optimal ( $S$ ) dans le Hamiltonien ( $H$ ). Par exemple, pour le problème de transfert à *temps minimum* ce dernier s'écrit

$$H_{min}(x, \tau, m, p_x, p_\tau, p_m, l, \frac{l}{\varepsilon}) = \frac{1}{g_0(x, \frac{l}{\varepsilon})} \left[ -\frac{1}{m} \|f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x\| + \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon} \left\langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{\gamma}_L \right\rangle + \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon} \left\langle f(x, \frac{l}{\varepsilon})^\top p_x, \vec{\gamma}_S \right\rangle + p_\tau - \delta p_m \right], \quad (H_{min})$$

d'où l'on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dl}(l) = LP \left[ \frac{\partial H_{min}}{\partial p_x}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l)) \right] \\ \frac{d\tau}{dl}(l) = LP \left[ \frac{\partial H_{min}}{\partial p_\tau}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l)) \right] \\ \frac{dm}{dl}(l) = LP \left[ \frac{\partial H_{min}}{\partial p_m}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l)) \right] \\ \frac{dp_x}{dl}(l) = -LP \left[ \frac{\partial H_{min}}{\partial x}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l)) \right] \\ \frac{dp_\tau}{dl}(l) = -LP \left[ \frac{\partial H_{min}}{\partial \tau}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l)) \right] \\ \frac{dp_m}{dl}(l) = -LP \left[ \frac{\partial H_{min}}{\partial m}(l, \cdot, x(l), \tau(l), m(l), p_x(l), p_\tau(l), p_m(l)) \right] \end{array} \right. \quad (SE_2)$$

A ce système extrémal doit s'ajouter naturellement les conditions que doit vérifier l'état aux bornes du domaine d'intégration, données par ( $C_L$ ), et précisées ici

$$\begin{aligned} a(l_0) &= \frac{a_0}{a_f} & a(l_f) &= 1 \\ p(l_0) &= p_0 & p(l_f) &= p_f \quad \text{pour } p = f, g, h, k \\ \tau(l_0) &= \varepsilon t_0 & \tau(l_f) & \text{libre} \\ m(l_0) &= 1 & m(l_f) & \text{libre;} \end{aligned} \quad (C_E)$$

ainsi que les conditions de transversalité que doivent vérifier les états adjoints concernés, à longitude lente finale  $l_f$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_\tau(l_f) = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{a_f^2}{\mu}} \\ p_m(l_f) = 0, \end{array} \right. \quad (C_{AT})$$

pour le critère temps minimum, et

$$\left\{ \begin{array}{l} p_\tau(l_f) = 0 \\ p_m(l_f) = -m_0, \end{array} \right. \quad (C_{AC})$$

pour le critère consommation minimum.

Concernant le problème de transfert orbital à *consommation minimum*, quelques remarques s'imposent. En effet, la *discontinuité* de la commande optimale obtenue ( $S$ ) entraîne une discontinuité au sein du second membre du problème aux limites donné par le Principe du Minimum de Pontryagin, rendant sa résolution numérique par les méthodes usuelles particulièrement compliquée, car les routines existantes ne permettent généralement pas de gérer ces difficultés. Pour y remédier, on a très souvent recours à deux types de techniques, afin de donner au second membre un caractère continu :

- les méthodes *homotopiques*. Ces méthodes ont été notamment appliquées avec succès pour le traitement du problème de transfert orbital à faible poussée à critère consommation minimum, sans perturbation environnementale (Thèse de T. Haberkorn [13]);
- les méthodes de *pénalisation intérieure* [18].

On dispose dès lors de toutes les conditions permettant de garantir le caractère bien posé de ce *problème aux deux bouts*. Tout l'enjeu réside maintenant dans la détermination du processus de résolution numérique *approprié* au traitement d'un tel problème.

## 4.2 Résolution numérique du problème aux deux bouts

Passons à l'exposé de la démarche mise en œuvre pour la résolution du *problème aux limites* ( $SE_2$ )-( $C_E$ )-( $C_{AT}$ ). Rappelons que l'on ne s'intéresse qu'au problème de transfert orbital à faible poussée à *temps minimum* sous perturbation luni-solaire, car dégagé de tout inconvénient de discontinuité.

### 4.2.1 Processus mis en œuvre

Décrivons dans un premier temps l'environnement choisi pour l'implémentation effective sur ordinateur. Le choix du langage de programmation s'est porté sur Matlab. Plus précisément, la version 2015a a été utilisée, sous PC Asus à 8 Gb de RAM avec un processeur à 2.3 GHz. En ce qui concerne le processus de résolution, celui-ci se réduit principalement aux *deux* étapes suivantes :

1. l'expression de la dynamique du problème aux deux bouts doit être obtenue *explicitement*. Ce procédé va faire appel à des méthodes de différentiation, d'interpolation et de moyennisation numérique ;
2. une fois le second membre bien défini, il nous faut choisir un algorithme de résolution de problèmes aux limites. Le choix se portera sur une *méthode de tir multiple* (nous verrons par la suite pourquoi cette méthode s'est avérée être la plus pertinente, et surtout efficace).

### 4.2.2 Obtention de la dynamique

La définition de la dynamique du système extrémal ( $SE_2$ ) *moyenné* nécessite d'avoir recours à de la différentiation, de l'interpolation et de l'intégration numérique (pour la moyennisation). Ce qui nous allons voir de manière précise ci-dessous.

#### Différentiation

La différentiation du Hamiltonien minimisé ( $H_{min}$ ), nécessaire à l'obtention de la dynamique des variables adjointes  $p_x$ ,  $p_\tau$ , et  $p_m$  a été réalisée de deux façons différentes : *formellement* pour  $p_x$  et  $p_m$ , et *numériquement* pour  $p_\tau$ . La différentiation numérique est nécessaire puisque le Hamiltonien ( $H_{min}$ ) ne dépend du temps lent  $\tau$  que via les positions de la Lune et du Soleil

$$(X_L, Y_L, Z_L), \quad (X_S, Y_S, Z_S),$$

connues par le biais d'*éphémérides*. Une étape d'interpolation préalable est donc nécessaire.

La différentiation *formelle* a été réalisée via une toolbox spécifique de Matlab, dénommée Symbolic Math Toolbox, permettant également de générer les fonctions Matlab des expressions calculées. Pour la différentiation *numérique*, une méthode de différences finies *centrée* a été choisie pour approcher la dérivée partielle de ( $H_{min}$ ) par rapport à  $\tau$  en un point donné. Cette approximation est d'ordre deux par rapport au pas de subdivision choisi  $h$ .

#### Interpolation

La simulation du mouvement de la Lune et du Soleil, nécessaire à l'écriture de l'accélération perturbatrice luni-solaire, nécessite l'interpolation d'éphémérides tabulées, comme précisé en section 1.3.1 lors de l'écriture de son expression. Cette interpolation a été réalisée via une fonction Matlab, appelée `griddedInterpolant`, permettant, à partir des données temporelles et de position associées, de créer une structure, représentant l'interpolant, qui peut ensuite être évalué. Cette fonction présente également une option permettant de choisir le type d'interpolation : linéaire, cubique, spline, etc. Pour l'interpolation des éphémérides de la Lune et du Soleil, l'interpolation par des fonctions splines a été choisie.

## Moyennisation

La moyennisation par fenêtres a été réalisée par intégration numérique, en utilisant une formule *composite de Simpson*. Il s'agit d'une formule de quadrature interpolatoire obtenue en approchant la fonction à intégrer par son polynôme d'interpolation de degré 0, sur l'intervalle d'intégration. Elle repose sur une formule de type point-milieu [19].

### 4.2.3 Résolution du système différentiel

Supposons maintenant que nous avons à notre disposition la dynamique de notre problème aux limites bien définie, munie des conditions aux bords à satisfaire. Il faut dès lors procéder à la sélection de la méthode de résolution la plus appropriée pour cette catégorie de problèmes. Généralement, on distingue deux classes d'algorithmes pour résoudre les *problèmes aux deux bouts* [10] :

- les méthodes faisant intervenir des *problèmes à valeur initiale*. Le problème aux limites est transformé en une succession de problèmes de Cauchy, résolus grâce à des intégrateurs numériques. La méthode de *tir multiple* en est un exemple. Ces méthodes sont particulièrement adaptées lorsque la variable indépendante du système représente un *temps*, ou une variable ayant le même comportement qu'un temps ;
- les méthodes de *discrétisation globale*, comme par exemple les méthodes de *différences finies* ou de *collocation*. Ces méthodes conviennent plutôt lorsque la variable indépendante du problème aux limites correspond à une variable *spatiale*.

Au vu de ces remarques, la méthode de tir multiple paraît être la plus appropriée pour le traitement des problèmes de transfert à faible poussée sous perturbation luni-solaire. En effet, la variable indépendante étant la longitude, plus précisément la longitude lente, elle se comporte comme une variable temporelle. Auquel on peut ajouter que de tels problèmes ne peuvent pas se généraliser sous la forme d'équations aux dérivées partielles. La méthode de tir multiple présente d'autres avantages, telles que la très grande précision numérique, particulièrement importante pour ce type de problèmes. Toutefois, nous allons voir qu'elle présente un inconvénient de taille pouvant rendre son utilisation assez difficile. Expliquons brièvement en quoi cette méthode consiste.

### Principe de la méthode de tir multiple [10]

Considérons le problème aux deux bouts suivant, autonome ou non (choisi autonome ici par souci de clarté)

$$\begin{cases} y' = f(y) & t \in ]a, b[ \\ r(y(a), y(b)) = 0 & y \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (BVP)$$

où les fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont supposées de classe  $\mathcal{C}^2$ . On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $m - 1$  sous-intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$ . Les points  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  forment les *nœuds* de la partition, auxquels on définit les estimations  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  de la solution recherchée de (BVP). Introduisons les  $m - 1$  problèmes de *Cauchy*, chacun étant défini sur un intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$

$$\begin{cases} y' = f(y) & t \in ]t_i, t_{i+1}[ \\ y(t_i) = x_i, \end{cases} \quad (IVP)$$

dont la solution, notée  $y_i$ , peut s'exprimer en terme de flot  $\Phi$

$$y_i(t) = \Phi^{t, t_i} x_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, \dots, m - 1. \quad (S_i)$$

Afin de déterminer la solution « globale » de (BVP), il nous faut joindre *continûment* les sous-trajectoires  $y_j$  aux nœuds intérieurs, conduisant aux *conditions de continuité* suivantes

$$F_i(x_i, x_{i+1}) = \Phi^{t_{i+1}, t_i} x_i - x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (C_c)$$

auxquelles s'ajoutent naturellement les conditions aux deux extrémités de l'intervalle  $[a, b]$

$$F_m(x_1, x_m) = r(x_1, x_m) = 0. \quad (C_b)$$

On se réduit ainsi à la détermination des valeurs approchées  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  de la solution de (BVP) aux nœuds de la subdivision choisie (appelés également points de tir) satisfaisant les conditions (C<sub>c</sub>) et (C<sub>b</sub>). Ce qui nous conduit à l'équation *non linéaire*

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_m) \end{pmatrix}_{m \times m} = 0, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (F)$$

La méthode incontournable pour résoudre un tel système non linéaire reste sans conteste la méthode *de Newton* :

$$\begin{cases} F'(x^k) \Delta x^k = -F(x^k), & x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad k = 0, 1, \dots \\ x_0 \text{ choisi.} \end{cases} \quad (N)$$

La détermination des corrections nécessaires  $\Delta x^k$  nécessite le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne  $F'(x^k)$  à chaque itération  $k$

$$\Delta x^k = -F'(x^k)^{-1} F(x^k), \quad (LS)$$

ce qui peut s'avérer particulièrement coûteux. Le recours à la méthode de Newton, à convergence *locale*, oblige à choisir une initialisation  $x_0$  suffisamment proche de la solution de (F), pour assurer la convergence de la méthode. Ce qui peut être particulièrement délicat.

### Routines sélectionnées

P. Deufflard, G. Bader et L. Weismann ont écrit une routine *Fortran*, baptisée BVPSOL (présente dans la bibliothèque CodeLib) permettant de résoudre des problèmes aux limites *linéaires* ou *non linéaires* grâce aux méthodes de tir simple ou multiple. Elle utilise une méthode de Gauss-Newton avec au choix deux solveurs pour la résolution du système linéaire (LS) : une « locale » basée sur un algorithme de *réduction* (au lieu de décomposer la matrice jacobienne  $F'(x^k)$  à chaque itération  $k$  pour l'inverser, on décompose une matrice spécifique, notée  $E$ , et ce une seule fois, de taille inférieure, ce qui réduit très nettement les coûts de calcul), et une « globale » (décomposition QR). Cette routine permet également de choisir l'intégrateur que l'on souhaite utiliser pour résoudre les problèmes de Cauchy sous-jacents, suivant qu'ils soient *raides* ou non, comme par exemple DOPRI [15] (systèmes différentiels du 1<sup>er</sup> ordre non raides) ou RADAU [14] (systèmes différentiels du 1<sup>er</sup> ordre raides).

Pour le traitement du problème de transfert orbital traité dans ce manuscrit, nous avons choisi d'utiliser la routine BVPSOL accompagné de l'intégrateur RADAU5 sous **Matlab**. En effet, il est possible d'utiliser des routines *Fortran* (ou C, C++) sous **Matlab**, en utilisant des fichiers MEX (pour **Matlab executable**). Concernant la routine RADAU5, il s'agit d'une méthode de Runge-Kutta implicite (RADAU IIA) d'ordre 5, avec contrôle du pas d'intégration. Elle a été écrite par E. Hairer et G. Wanner [14] et est particulièrement adaptée pour les systèmes différentiels *raides* d'ordre 1.

## Chapitre 5

# Résultats obtenus et interprétations

On présente dans ce chapitre les résultats obtenus en appliquant la stratégie de résolution décrite au Chapitre 4 au problème de mise à poste *optimale* géostationnaire électro-ionique (décrit plus précisément à la section 1.1), exemple particulier de transfert orbital à faible poussée. Plus précisément, seule la situation du transfert *plan* est traitée ; dans un premier temps sans perturbation environnementale (seule la poussée est considérée en tant que perturbation orbitale), puis avec perturbation luni-solaire.

### 5.1 Caractéristiques de la mission

La mission consiste à transférer le satellite de télécommunications sur l'orbite géostationnaire, décrite par les éléments orbitaux non angulaires suivants

$$\begin{cases} a_f = 24505.9 \text{ km} \\ e_f = 0 \\ i_f = 0 \text{ rad} \end{cases} \implies \begin{cases} a_f = 24505.9 \text{ km} \\ f_f = 0.725 \\ g_f = 0 \\ h_f = 6.116 \times 10^{-2} \\ k_f = 0, \end{cases} \quad (GEO)$$

et la longitude finale

$$L_f = 190 \times 2\pi \text{ rad}. \quad (L_f)$$

On fixe de plus, via cette longitude donnée, le nombre total de révolutions de l'engin autour de la Terre à 190. L'orbite de départ, dite de transfert, correspond à celle délivrée par un lanceur Ariane 4

$$\begin{cases} a_0 = 42165 \text{ km} \\ e_0 = 0.725 \\ \omega_0 = 0 \text{ rad} \\ i_0 = 0.122 \text{ rad} \\ \Omega_0 = 0 \text{ rad} \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = 42165 \text{ km} \\ f_0 = 0 \\ g_0 = 0 \\ h_0 = 0 \\ k_0 = 0, \end{cases} \quad (GTO)$$

où la longitude initiale vaut

$$L_0 = 0 \text{ rad}. \quad (L_0)$$

Ce transfert orbital, ou plutôt ce *rendez-vous* (car la longitude finale est précisée), est réalisé grâce à un système de propulsion électro-ionique présentant les spécifications suivantes [11] : le module de poussée maximal est fixé à

$$u_{max} = 0.35 \text{ N}, \quad (M_u)$$

et la vitesse d'éjection des ions à

$$v_e = 19.620 \text{ km.s}^{-1}. \quad (V_e)$$

La masse de l'engin est variable, et sa masse initiale est égale à

$$m_0 = 2000 \text{ kg.} \quad (m_0)$$

Concernant les données physiques, les constantes d'attraction de la Terre, de la Lune et du Soleil valent

$$\begin{aligned} \mu &= 398600.47 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2} \\ \mu_L &= 4902.798 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2} \\ \mu_S &= 1.327154 \cdot 10^{11} \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

L'ensemble de ces données numériques nous permettent d'en déduire la valeur des paramètres  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_L$ ,  $\varepsilon_S$  et  $\delta$ , extraits des équations du mouvement après mise à l'échelle des équations

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{u_{max} a_f^2}{m_0 \mu} = 7.8055 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_L &= \mu_L \frac{a_f^2}{\mu} = 2.1868 \cdot 10^7 \\ \varepsilon_S &= \mu_S \frac{a_f^2}{\mu} = 5.9194 \cdot 10^{14} \\ \delta &= \frac{1}{v_e} \sqrt{\frac{\mu}{a_f}} = 0.1567. \end{aligned} \quad (5.2)$$

On remarque ainsi clairement que

$$\varepsilon \ll \varepsilon_L \ll \varepsilon_S. \quad (5.3)$$

Rappelons que l'on étudie seulement le transfert orbital *plan*, en identifiant dans les équations étudiées le plan du mouvement au plan équatorial ( $\vec{I}$ ,  $\vec{J}$ ), et en orientant les accélérations perturbatrices  $\vec{\gamma}_P$  (que ce soit l'accélération due à la poussée ou à l'attraction luni-solaire) dans ce plan. On ne considère ainsi que les paramètres orbitaux équinoxiaux  $(a, f, g)^\top$  (puisque  $h = k = 0$ ), et les paramètres orbitaux képlériens  $(a, e)$  (car lorsque l'inclinaison  $i$  est nulle, l'argument du périégée  $\omega$  et la longitude du nœud ascendant  $\Omega$  sont non définis).

Afin d'avoir un point de comparaison avec des résultats précédemment obtenus sur des problèmes de transfert orbital à faible poussée *similaires* (données numériques issues de la Thèse de S. Geffroy [11]), on adopte une présentation adaptée à l'interprétation des résultats, permettant d'identifier directement les points de concordance ou de divergence. On va ainsi donner, que ce soit pour la mise à poste à temps minimum avec ou sans perturbation luni-solaire

- les coûts de transfert, en terme de durée  $\Delta t = t_f - t_0$ , et de variation de masse (carburant consommé)  $\Delta m = m_0 - m_f$ ;
- l'évolution temporelle des paramètres orbitaux képlériens (plus « parlant » du point de vue physique), des rayons de périégée  $r_p = a(1 - e)$  (distance entre le centre de la Terre et le périégée de l'orbite) et d'apogée  $r_a = a(1 + e)$  (distance entre le centre de la Terre et l'apogée de l'orbite), de la masse du satellite et de la longitude vraie;
- l'évolution angulaire de la loi de poussée tout au long du transfert : composantes  $(u_T, u_N)$  dans le repère local tangentiel-normal, direction de poussée (angle  $\psi$ ) dans le plan orbital (correspondant au plan équatorial). Le module de poussée ne sera pas représenté, étant constant et maximal (égal à 1) ;
- la trajectoire du satellite dans le repère géocentrique inertiel équatorial.

On présente également en annexe à ce manuscrit l'évolution des états du système (éléments orbitaux équinoxiaux, temps lent et masse) en parallèle de leurs variables adjointes, en fonction du temps.

## 5.2 Mise à poste sans perturbation environnementale

On ne considère ici que les perturbations orbitales issues de la *poussée* de l'engin. L'objectif du traitement de ce problème est de vérifier si l'application de la méthode de moyennisation par fenêtres permet, dans la situation où les perturbations environnementales sont négligées, de retrouver des résultats très similaires à ceux établis par S. Geffroy lors de sa thèse. La méthode de moyennisation au sens de Chaplais y avait été appliquée. Voici les résultats obtenus.

Les coûts de transfert valent

$$\begin{aligned} \Delta t &= 135.4457 \text{ j} \\ \Delta m &= 208.7603 \text{ kg.} \end{aligned} \quad (CT_1)$$

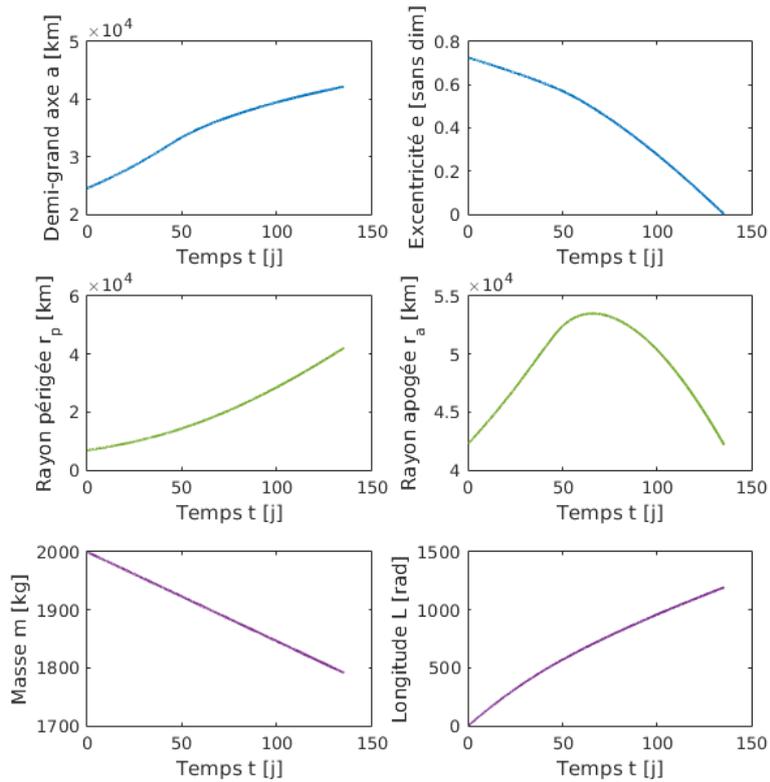


FIGURE 5.1 – Évolution des paramètres physiques *sans* perturbation luni-solaire

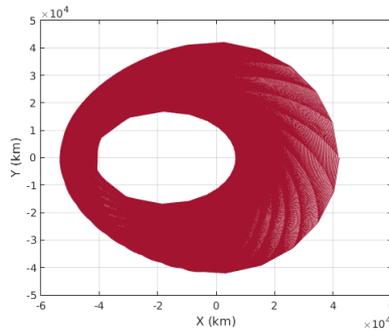


FIGURE 5.2 – Trajectoire *sans* perturbation luni-solaire

Les figures 5.1 et 5.2 représentent respectivement l'évolution des paramètres physiques (caractéristiques orbitales et masse) en fonction du temps, et la trajectoire du satellite, dans le repère inertiel équatorial. La figure 5.3 donne quant à elle l'évolution des composantes tangentielle et normale du vecteur poussée optimal, en fonction de la longitude (position de l'engin spatial sur son orbite). On précise également la valeur d'un certain angle, noté  $\psi$ , qui permet de caractériser la direction de poussée par rapport au vecteur vitesse (de même direction que le vecteur de base  $\vec{T}$ ) dans le plan orbital (qui coïncide dans le cas du transfert plan avec le plan équatorial)

$$\begin{cases} u_T = \|\vec{u}\| \cos \psi = \cos \psi \\ u_N = \|\vec{u}\| \sin \psi = \sin \psi. \end{cases} \quad (5.4)$$

Dans la figure 5.3 représentant la commande optimale, on effectue également un zoom sur une période orbitale donnée.

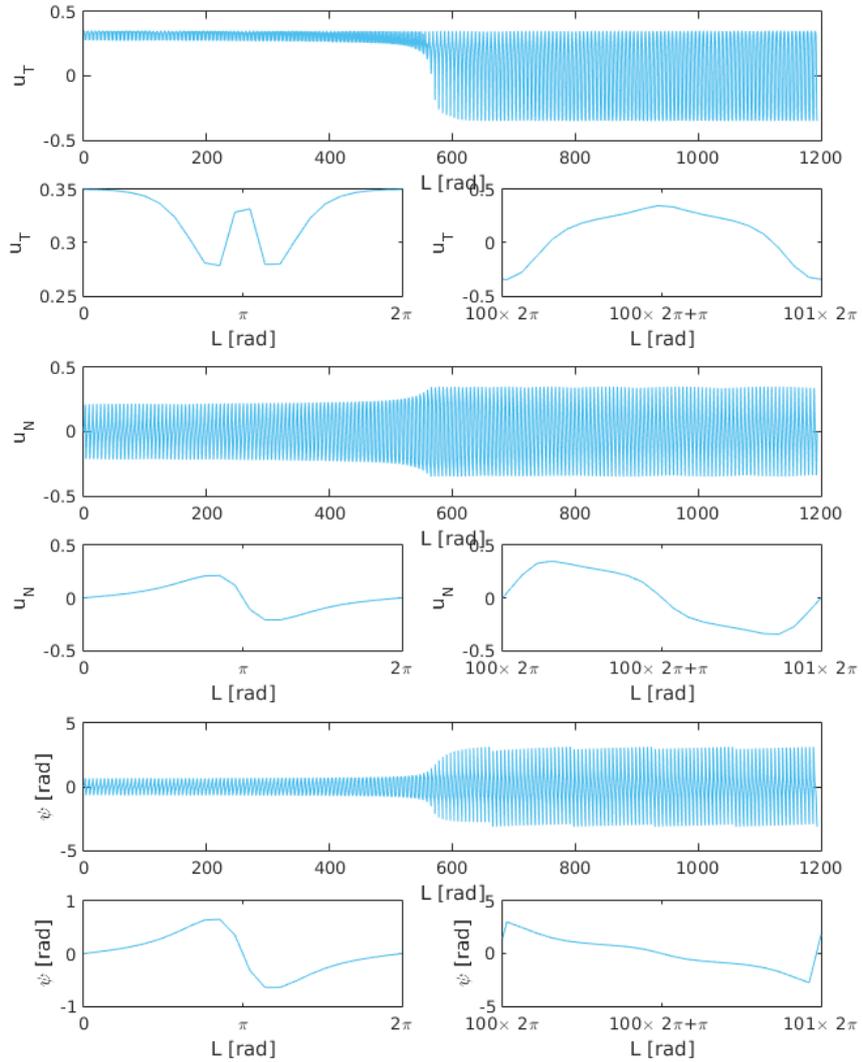


FIGURE 5.3 – Poussée *sans* perturbation luni-solaire

Ces graphiques, à première vue, permettent de souligner le résultat fondamental de la méthode de moyennisation, déjà mis en évidence théoriquement, à savoir que la commande moyennée présente bien une composante *rapide* (présence d'oscillations dans la figure 5.3), contrairement aux états moyennés qui sont à évolution *lente*.

Analysons maintenant de plus près la *stratégie de poussée*. Celle-ci va consister essentiellement à déformer la taille et la forme de l'orbite, autrement dit son demi-grand axe  $a$  et son excentricité  $e$ . La stratégie obtenue est *quasiment identique* à celle mise en évidence par S. Geffroy [11] (dans le cas général du transfert 3D), à savoir la présence de *deux phases* différentes :

1. une phase dite d'*accélération* : le satellite est propulsé dans le sens de son vecteur vitesse (dans la même direction que le vecteur de base  $\vec{T}$ ) au niveau du périégée et de l'apogée, ce qui entraîne une augmentation des rayons de périégée et d'apogée ;
2. une phase de *décélération* : l'engin spatial subit une poussée dirigée vers le vecteur vitesse à l'apogée, mais dans le sens opposé au niveau du périégée, ce qui conduit à une augmentation du rayon de périégée et à une diminution du rayon d'apogée.

Le changement de phase se déroule légèrement avant mi-transfert. On remarque ainsi que l'apogée est plus élevée que l'altitude géostationnaire, ce qui définit une orbite *supersynchrone*. On comprend ainsi mieux la seconde phase de poussée, permettant de réduire le rayon d'apogée en réalisant des corrections au niveau de l'apogée de l'orbite, là où la vitesse du satellite y est moindre.

### 5.3 Mise à poste sous perturbation luni-solaire

Passons maintenant à l'étude de la mise à poste géostationnaire sous perturbation luni-solaire. Ce transfert, dépendant du mouvement de la Lune et du Soleil, dépend de la *date* sélectionnée pour le début de la mission. Nous avons choisi la date du 1<sup>er</sup> septembre 2015, à minuit. A priori, l'attraction luni-solaire n'altérant que très faiblement le mouvement orbital de l'engin, on ne devrait pas observer de modification très sensible des résultats par rapport aux résultats précédents. On se demandera donc si :

- l'on observe des évolutions similaires pour les paramètres orbitaux, la masse de l'engin et les rayons de périégée et d'apogée ?
- la stratégie de poussée est bien équivalente à celle mise en évidence en l'absence de perturbation environnementale ?
- les coûts de transfert sont proches ?

Pour les coûts de transfert, on obtient cette fois

$$\begin{aligned} \Delta t &= 135.0423 \text{ j} \\ \Delta m &= 208.1386 \text{ kg.} \end{aligned} \tag{CT_2}$$

Ce qui représente un écart avec le cas précédent de 9.69 h sur la durée de transfert, et de 621.7 g sur la consommation de carburant. On a ainsi un léger surcoût.

Comme précédemment, on a représenté l'évolution des paramètres physiques caractérisant l'orbite et l'engin spatial en fonction du temps, ou bien de la longitude de position sur orbite pour la commande optimale (Figures 5.4, 5.5 et 5.6).

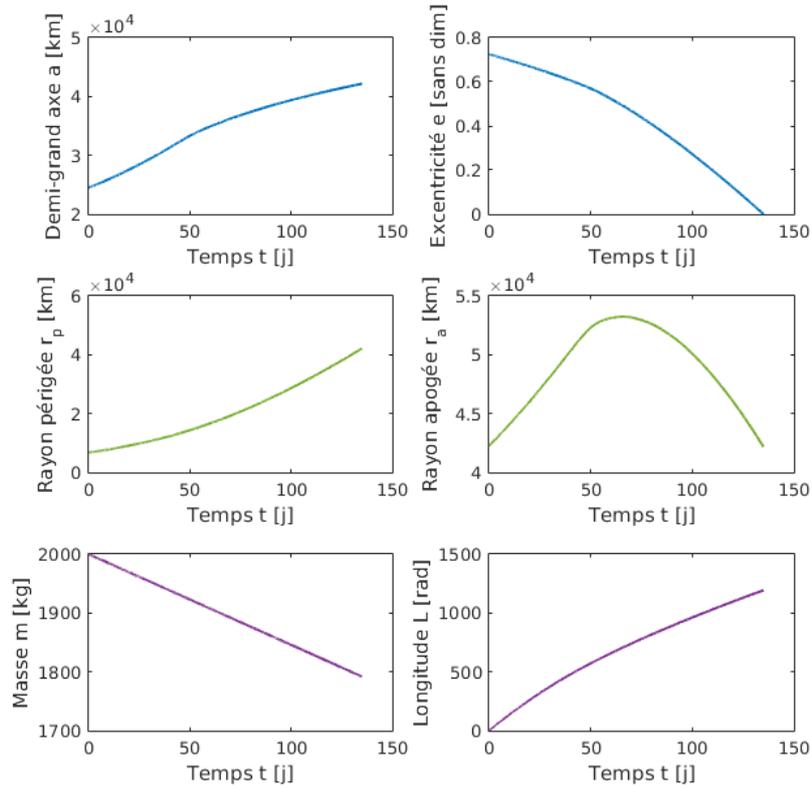


FIGURE 5.4 – Évolution des paramètres physiques *avec* perturbation luni-solaire

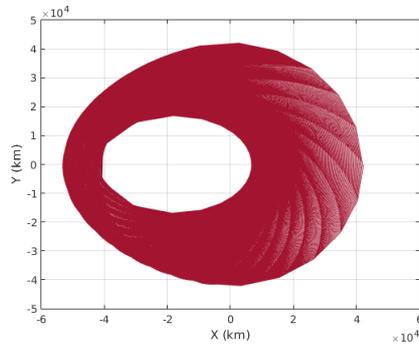


FIGURE 5.5 – Trajectoire *avec* perturbation luni-solaire

Le comportement des éléments orbitaux képlériens, des rayons de périégée et d’apogée, et de la masse reste inchangée, de même que la trajectoire de l’engin spatial. Concernant la stratégie de poussée, celle-ci reste quasiment identique. On peut ainsi répondre *positivement* aux questions posées ci-dessus.

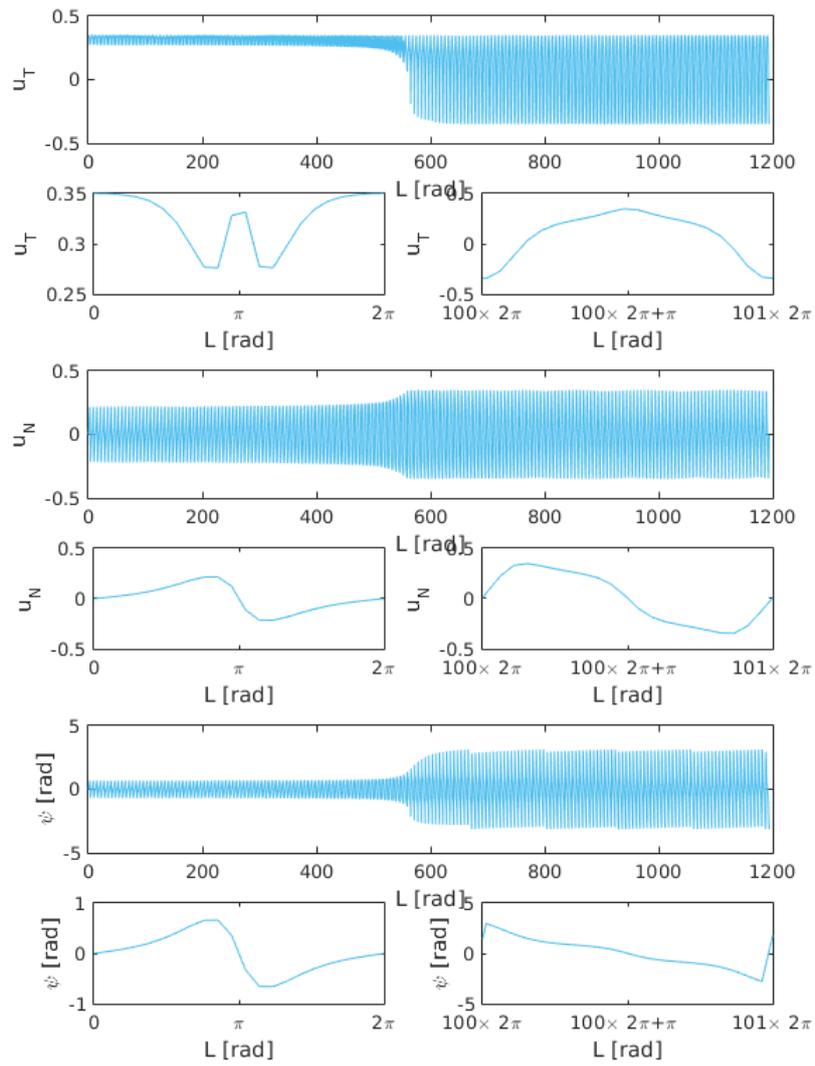


FIGURE 5.6 – Poussée *avec* perturbation luni-solaire

# Conclusion et perspectives

La technique de *moyennisation par fenêtres*, appliquée à la résolution des problèmes de contrôle optimal des transferts orbitaux à faible poussée, s'avère ainsi particulièrement fructueuse. Dans le sens où, elle fonctionne aussi bien dans le cas dit « képlérien » (seule la poussée est considérée comme perturbation orbitale), ou lorsque l'on considère les forces d'attraction luni-solaire. Les simulations numériques, appliquées au problème de mise à poste géostationnaire à temps minimum d'un satellite de télécommunications, conduisent à des résultats probants, qui ont pu être comparés (à données numériques identiques) à des résultats antérieurs, établis par S. Geffroy [12] avec la méthode de moyennisation au sens de Chaplais (dans lequel l'hypothèse de périodicité est nécessaire).

Cette méthode de moyennisation s'applique, comme nous l'avons vu, au traitement des problèmes de transfert optimaux à consommation minimum. Nous avons pu mettre en évidence, grâce à l'application du Principe du Maximum de Pontryagin, le caractère *discontinu* de la commande optimale associée. Cette discontinuité se maintient dans le problème aux limites résultant, vérifié par les états du système mécanique et les états adjoints, ce qui complique sa résolution. Pour y remédier, une approche consiste à recourir aux méthodes de *pénalisation intérieure*, décrites dans [18]. Cette technique a été appliquée, durant le stage, du point de vue théorique pour les problèmes de transfert à consommation minimum, et nécessite seulement une implémentation numérique, en combinant la stratégie de résolution numérique présentée dans ce manuscrit, avec les méthodes de *continuation*.

# Bibliographie

- [1] S. BERNARD, *Moyennisation et traitement du signal en contrôle optimal*, research report, MINES ParisTech, Sept. 2014.
- [2] A. BOMBRUN, *Low thrust orbital transfer : optimality and feedback*, theses, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Mar. 2007.
- [3] B. BONNARD, L. FAUBOURG, AND E. TRÉLAT, *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, New York, NY, Sept. 2005.
- [4] R. A. BROUCKE AND P. J. CEFOLA, *On the equinoctial orbit elements*, *Celestial mechanics*, 5 (1972), pp. 303–310.
- [5] A. E. BRYSON, *Applied Optimal Control : Optimization, Estimation and Control*, CRC Press, revised ed., Jan. 1975.
- [6] J.-B. CAILLAU, *Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal des transferts orbitaux*, PhD thesis, 2000. Thèse de doctorat dirigée par Noailles, Joseph Mathématiques appliquées Toulouse, INPT 2000.
- [7] M. CAPDEROU, *Satellites : Orbits and missions*, Springer Science & Business Media, 2005.
- [8] J.-P. CARROU, *Mécanique Spatiale 2 Tomes*, Cépaduès Editions, 1995.
- [9] F. CHAPLAIS, *Averaging and deterministic optimal control*, theses, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Nov. 1984.
- [10] P. DEUFLHARD, *Newton Methods for Nonlinear Problems : Affine Invariance and Adaptive Algorithms*, Springer Science & Business Media, Sept. 2011.
- [11] S. GEFFROY, *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal : application aux problèmes de transfert et rendez-vous orbitaux à poussée faible*, Toulouse, INPT, Jan. 1997.
- [12] S. GEFFROY AND R. EPENOV, *Optimal low-thrust transfers with constraints—generalization of averaging techniques*, *Acta Astronautica*, 41 (1997), pp. 133–149.
- [13] T. HABERKORN, *Transfert orbital à poussée faible avec minimisation de la consommation : résolution par homotopie différentielle*, PhD thesis, 2004. Thèse de doctorat dirigée par Noailles, Joseph Mathématiques appliquées Toulouse, INPT 2004.
- [14] E. HAIRER, S. P. NØRSETT, AND G. WANNER, *Solving Ordinary Differential Equations II : Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer Science & Business Media, 1993.
- [15] E. HAIRER, S. P. NØRSETT, AND G. WANNER, *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*, Springer Science & Business Media, Apr. 2008.
- [16] D. LOSA, *High vs Low Thrust Station Keeping Maneuver Planning for Geostationary Satellites*, phdthesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Feb. 2007.
- [17] P. MALISANI, *Pilotage dynamique de l'énergie du bâtiment par commande optimale sous contraintes utilisant la pénalisation intérieure*, PhD thesis, 2012. Thèse de doctorat dirigée par Petit, Nicolas Mathématique et automatique Paris, ENMP 2012.

- [18] P. MALISANI, F. CHAPLAIS, AND N. PETIT, *An interior penalty method for optimal control problems with state and input constraints of nonlinear systems*, Optimal Control Applications and Methods, (2014), pp. n/a–n/a.
- [19] A. QUARTERONI, R. SACCO, AND F. SALERI, *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*, Springer Science & Business Media, Feb. 2007.
- [20] E. ROTH, *The gaussian form of the variation-of-parameter equations formulated in equinoctial elements—Applications : Airdrag and radiation pressure*, Acta Astronautica, 12 (1985), pp. 719–730.
- [21] Z. TARZI, J. SPEYER, AND R. WIRZ, *Fuel optimum low-thrust elliptic transfer using numerical averaging*, Acta Astronautica, 86 (2013), pp. 95–118.
- [22] E. TRÉLAT, *Contrôle optimal : Théorie et applications*, Vuibert, Paris, 2e édition ed., Nov. 2008.

# Annexe A

## Quelques résultats supplémentaires

Dans cette annexe, on précise quelques résultats complémentaires à ceux présentés au Chapitre 5. Notamment concernant les états adjoints du problème de contrôle optimal *moyenné*, dont on donne l'évolution au cours du temps.

### A.1 Mise à poste sans perturbation environnementale

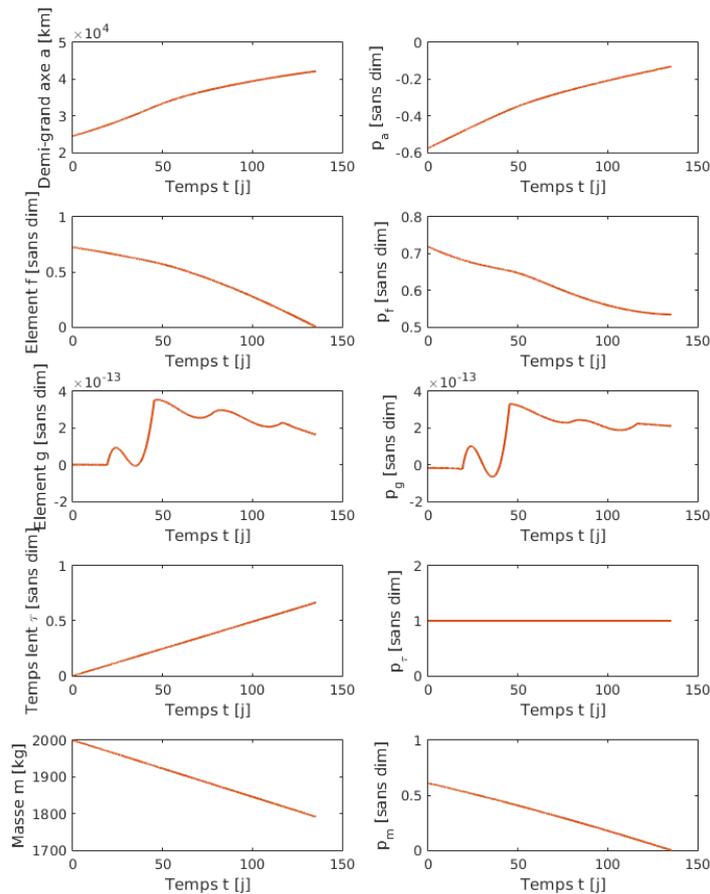


FIGURE A.1 – États et variables adjointes

## A.2 Mise à poste sous perturbation luni-solaire

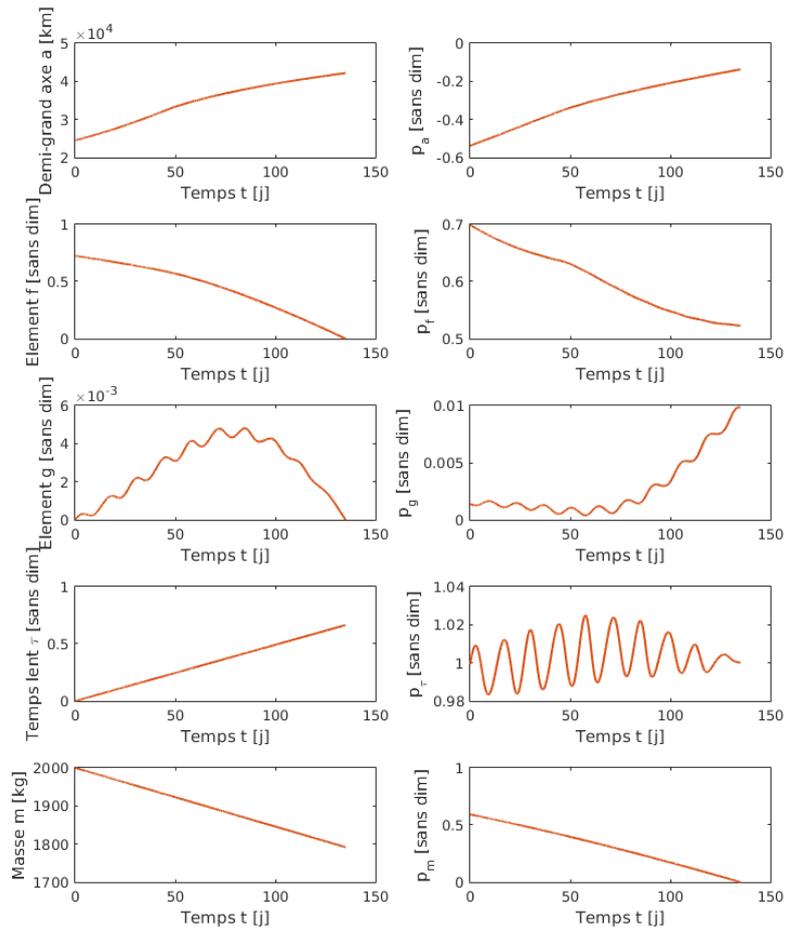


FIGURE A.2 – États et variables adjointes