

ONERA

THE FRENCH AEROSPACE LAB

retour sur innovation

www.onera.fr



Estimation et identification pour des modèles d'erreurs bornées

Méthodes et applications en aéronautique

H. Piet-Lahanier , ONERA-DPRS, h.piet-lahanier@onera.fr

*Séminaire du CAS, 4 Février, 2010
Paris*



retour sur innovation

Présentation

Cas linéaire

Cas non linéaire

Applications

Conclusion

Présentation

Contexte

Ensemble de vraisemblance

Cas linéaire

Cas non linéaire

Applications

Conclusion

Incertitude et estimation

Estimation des paramètres ou de l'état d'un système dynamique à partir de mesures :

- Incertitude \Rightarrow Erreurs des mesures mais également erreurs de modèles
- Outils disponibles \Rightarrow Différentes façons de tenir compte de l'incertitude

Classification des outils

- Pas de prise en compte explicite de l'incertitude
 - ▶ Estimation adaptative par modèle de référence
 - ▶ Observateur de Luenberger
- Représentation statistique des erreurs
 - ▶ Méthode du maximum de vraisemblance ou a posteriori
 - ▶ Filtre de Kalman
- Représentation des erreurs sous forme d'ensembles
 - ▶ Estimation d'ensemble de vraisemblance
 - ▶ Estimation erreur bornées

Notion de perturbation ensembliste

Représentation des perturbations

⇒ Appartenance à des ensembles connus

- Bruit de mesure
- Dynamique non modélisée
- Méconnaissance sur les paramètres

Représentation

Modèle

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{p}, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_k) \\ k = 1, \dots, N \end{cases}$$

- ▶ k : indice de temps
- ▶ \mathbf{x}_k : vecteur d'état
- ▶ \mathbf{y}_k : vecteur de sortie
- ▶ \mathbf{u}_k : vecteur d'entrée
- ▶ \mathbf{v}_k : vecteur de perturbation dynamique
- ▶ \mathbf{w}_k : vecteur de perturbation de sortie
- ▶ \mathbf{p} : vecteur de paramètres constant

Ensemble d'appartenance

Ensembles associés à chaque type de variable, à chaque temps

- ▶ \mathbf{X}_k : Ensemble contenant le vecteur d'état
- ▶ \mathbf{Y}_k : Ensemble contenant le vecteur de sortie
- ▶ \mathbf{U}_k : Ensemble contenant le vecteur d'entrée
- ▶ \mathbf{V}_k : Ensemble contenant le vecteur de perturbation dynamique
- ▶ \mathbf{W}_k : Ensemble contenant le vecteur de perturbation de sortie
- ▶ \mathbf{P} : Ensemble contenant le vecteur de paramètres constant

Ensemble d'appartenance

- Caractérisation de l'incertitude \Rightarrow Détermination des ensembles
- Valeur connue exactement \Rightarrow L'ensemble se réduit à un singleton
- Estimation/identification \Rightarrow Trouver la suite d'ensemble reliés par l'équation de modèle

Ensemble d'appartenance

Mesures et hypothèses :

- ▶ Hypothèses sur \mathbf{X}_0 et sur \mathbf{P}_0
- ▶ Hypothèses sur \mathbf{V}_k et sur \mathbf{W}_k
- ▶ Mesures de \mathbf{y}_k et de \mathbf{u}_k

Objectif : trouver les plus petits ensembles compatibles avec les mesures, le modèle et les ensembles initiaux

Initialisation : Définition de $\mathbf{X}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{W}_0, \mathbf{V}_0 : \Phi_0$

- ▶ Caractériser les ensembles précédents à un temps $k : \Phi_k$ dans \mathfrak{R}^n
- ▶ Prendre en compte les ensembles associés aux nouvelles mesures \mathbf{Y}_k et \mathbf{U}_k
- ▶ Déterminer l'image réciproque de cet ensemble $\Lambda(\mathbf{Y}_k, \mathbf{U}_k)$
- ▶ Trouver l'intersection $\Phi_k \cap \Lambda(\mathbf{Y}_k, \mathbf{U}_k)$

Présentation

Cas linéaire

Estimation

Identification

Cas non linéaire

Applications

Conclusion

Représentation

Modèle : entrée sortie

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{p}^t \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad k = 1, \dots, N$$

- ▶ k : indice de temps
- ▶ \mathbf{y}_k : vecteur de sorties mesuré
- ▶ \mathbf{u}_k : vecteur de régression
- ▶ \mathbf{w}_k : vecteur de perturbation de sortie
- ▶ \mathbf{p} : vecteur de paramètres constant à déterminer

Caractérisation géométrique avec régresseur connu

Choix initial sur \mathbf{P} : Hyper-rectangle de l'espace des paramètres

Hypothèse sur \mathbf{W}_k : Union d'intervalles de l'espace des mesures

Hypothèse sur \mathbf{U}_k : Singleton $\{\mathbf{u}_k\}$

L'ensemble \mathbf{P} (s'il existe) est un polyèdre convexe

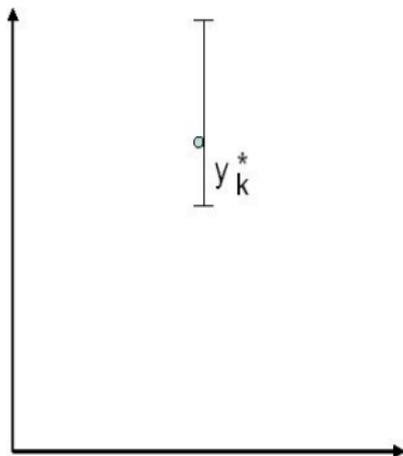
Caractérisation exacte et récursive

⇒ énumération des sommets et des hyperplans

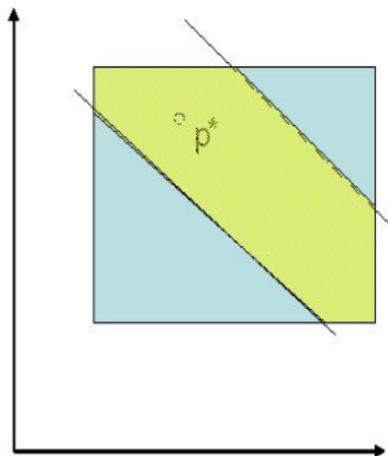
 E. Walter et H. Piet-Lahanier, Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded-error models, *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, 34, pp. 911-915, 1989.

 H. Piet-Lahanier et E. Walter, Exact description of feasible parameter sets and minimax estimation, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 8, pp. 5-14, 1994.

Caractérisation géométrique



Espace des mesures



Espace des paramètres

Caractérisation géométrique

Polyèdre :

- ▶ sommets
- ▶ liste des hyperplans associés
- ▶ liste des sommets adjacents
- Prise en compte des nouveaux hyperplans
- Séparation des sommets : conservés et rejetés
- Création des nouveaux sommets sur arêtes entre conservés et rejetés
- Mise à jour du polyèdre

Caractérisation géométrique approchée

Problème de Complexité \Rightarrow Choix d'ensembles à description de complexité fixe

Candidats

- ▶ pavés 📄 M. Milanese, and G. Belforte, Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors : linear families of models and estimators, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-27, pp. 408-414, 1986.
- ▶ parallélotopes 📄 A. Vicino et G. Zappa, Sequential approximation of uncertainty sets via parallelotopes, *Proc. Workshop on the Modeling of Uncertainty in Control Systems*, M. Dahleh, J. Doyle, and R. Smith, Eds., Springer-Verlag, 1992.
- ▶ ellipsoïdes 📄 L. Pronzato, E. Walter et H. Piet-Lahanier, Mathematical equivalent of two ellipsoid algorithms for bounded-error estimation, *Proc. 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, pp. 1952-1955, 1989.

Caractérisation géométrique approchée

Pavés :

- ▶ Valeurs minimales des composantes
- ▶ Valeurs maximales des composantes
- ▶ Directions principales
- Prise en compte des nouveaux hyperplans
- Détermination des nouvelles valeurs minimales et maximales (optimisation critère linéaire)
- Mise à jour

Caractérisation géométrique approchée par ellipsoïdes

Ellipsoïdes : $\Xi(\xi_c, P) = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - \xi_c)^t P^{-1} (x - \xi_c) \leq 1\}$

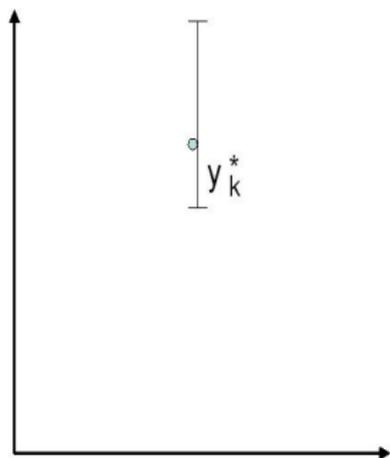
- ▶ Centre ξ_c ,
- ▶ Matrice P

Recherche d'ellipsoïdes de taille minimale \Rightarrow Minimisation de la trace ou du déterminant de la matrice

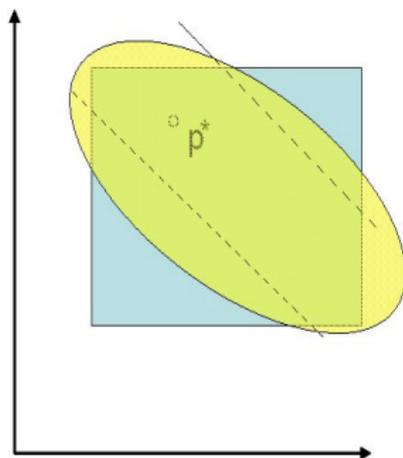
Approche :

- Description initiale des ensembles : ellipsoïdes
- Construction d'ellipsoïdes de taille minimale contenant un ensemble donné : recherche sur une famille donnée
- Construction d'ellipsoïdes de taille minimale contenant l'intersection de deux ellipsoïdes : recherche sur une famille donnée

Caractérisation géométrique approchée par ellipsoïdes



Espace des mesures



Espace des paramètres

Caractérisation géométrique approchée par ellipsoïdes

Intérêt :

- Description d'un ellipsoïde dans un espace de dimension n
 - ▶ Centre : vecteur de dimension n
 - ▶ Matrice caractéristique définie positive, de dimension $(n \times n)$
- Valeurs extrêmes : $2n$ sur les axes principaux
- Similitude avec estimateurs gaussien (moyenne et matrice de covariance)

Caractérisation géométrique avec régresseur mal connu

Modèle : entrée sortie

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{p}^t \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

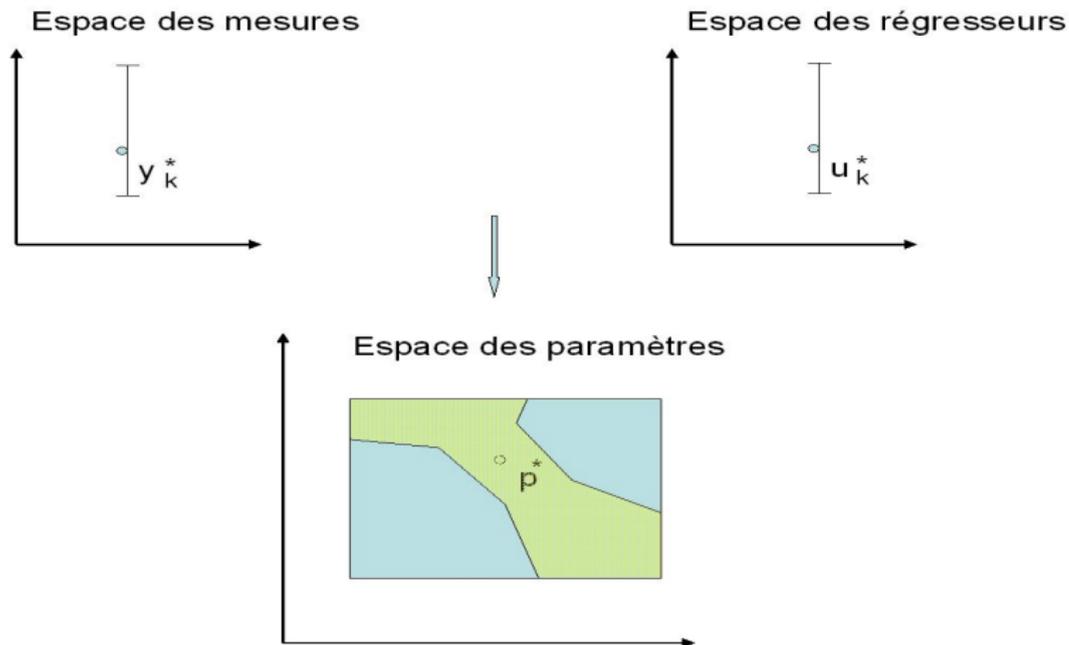
Choix initial sur \mathbf{P}_0 : Hyper-rectangle de l'espace des paramètres

Hypothèse sur \mathbf{W}_k : Union d'intervalles de l'espace des mesures

Hypothèse sur \mathbf{U}_k : Union d'intervalles de l'espace des entrées

⇒ Perte de la convexité

Caractérisation géométrique avec régresseur mal connu



Caractérisation géométrique avec régresseur mal connu

- ▶ ⇒ Approximation par enveloppe convexe ellipsoïdale
 - 📖 Chernousko, F. L. et Rokityanskii, D. Ya., Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations, *Journal of Optimization Theory and Applications*, pp. 1 - 19, 2000.
- ▶ ⇒ Approximation par caractérisation par intervalles (Recherche de la valeur minimale et maximale par Prog. Lin)
 - 📖 Polyak, B. T. et Nazin, S. A., Interval solution for interval algebraic equations, *Mathematics and Computing in Simulation*, pp. 207-217, 2004.

Représentation du système dynamique

Modèle

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = A(v, k)\mathbf{x}_{k-1} + B(k)\mathbf{u}_{k-1} + V(k)\mathbf{v}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k = C(w, k)\mathbf{x}_k + D(k)\mathbf{u}_k + W(k)\mathbf{w}_k \end{cases}$$

Hypothèses initiales

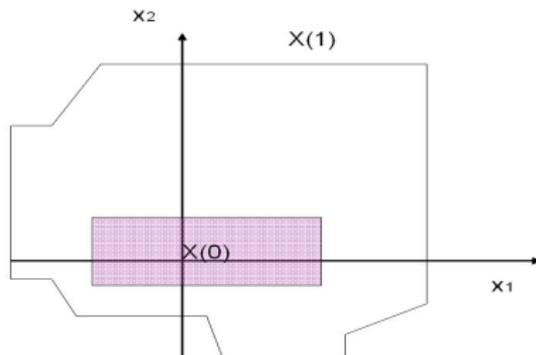
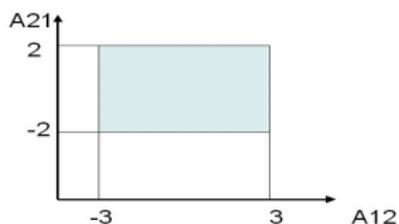
- ▶ \mathbf{X}_0 : Polyèdre de valeurs initiales de l'état
- ▶ \mathbf{U}_k : Singleton $\{\mathbf{u}_k\}$
- ▶ \mathbf{V}_k : Polyèdre de l'espace des perturbations dynamiques
- ▶ \mathbf{W}_k : Polyèdre de l'espace des perturbations de sortie

L'ensemble est un polyèdre.

Caractérisation géométrique

Incertitudes sur la matrice d'état

⇒ Ensemble potentiellement non convexe



$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + A_{12} x_2(k) \\ x_2(k+1) &= A_{21} x_1(k) + x_2(k)\end{aligned}$$

Exemple (Barmish Sankaran, 1979)

Caractérisation géométrique

Caractérisation de l'enveloppe convexe sous forme ellipsoïdale

- ▶ ⇒  Durieu C., Walter E. et Polyak, B., Multi-Input Multi-Output Ellipsoidal State Bounding *Journal of Optimization Theory and Applications*, pp. 273 - 303, 2001.
- ▶ ⇒  Shamma, J. et Tu, K. Y., Set-Valued Observers and Optimal Disturbance Rejection, *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, pp. 253-264, 1999.
- ▶ ⇒  DG. Maksarov, and JP. Norton, Computationally efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximations, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, pp. 411-434, 2002.

Présentation

Cas linéaire

Cas non linéaire

Estimation non linéaire

Identification non linéaire

Applications

Conclusion

Représentation

Modèle

$$\begin{cases} \mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{p}, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_k) \\ k = 1, \dots, N \end{cases}$$

- ▶ k : indice de temps
- ▶ \mathbf{y}_k : vecteur de sortie
- ▶ \mathbf{u}_k : vecteur d'entrée
- ▶ \mathbf{w}_k : vecteur de perturbation de sortie
- ▶ \mathbf{p} : vecteur de paramètres constant

Caractérisation

Ensemble potentiellement non-convexe et non-connexe
Recherche de caractérisation

- **Approximation par balayage de l'espace**
 - ▶ Critère initial d'appartenance (ex : Nombre d'inégalités satisfaites)
 - ▶ Recherche des valeurs intérieures à l'ensemble par tirage aléatoire
- **Fonctions polynomiales**
 - ▶ Recherche des valeurs extrêmes par optimisation signomiale
 - ▶ Caractérisation sous forme de pavés

Caractérisation

- Représentation par unions de pavés
 - ▶ Représentation initiale sous forme de pavés
 - ▶ Déterminations des pavés recouvrant l'ensemble
- Représentation par intervalles
 - ▶ Représentation initiale sous forme d'intervalles
 - ▶ Propagation des incertitudes par calcul intervalles
 - ▶ Déterminations des intervalles bornant extérieurement et intérieurement l'ensemble
- Recherche de solutions d'équations différentielles pour des modèles à paramètres incertains
 - ▶ Recherche de fonctions déterministes bornant ces solutions
 - ▶ Utilisation du théorème de Muller

Caractérisation

Ensemble potentiellement non-convexe et non-connexe Recherche de caractérisation

- **Approximation par balayage de l'espace**

 Kessman, K., Membership-set estimation using random scanning and principal component analysis, *Math. Comp. Simul.*, pp. 535-544, 1990.

- **Optimisation signomiale**

 Milanese, M. et Vicino A., Estimation theory for nonlinear models and set membership uncertainty, *Automatica*, pp. 403-408, 1991.

Caractérisation

- Détermination de sous-pavages

 Walter E., M. Kieffer, Interval analysis for guaranteed nonlinear estimation, *Proceedings of the 13th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, pp. 259-270, 2003

- Détermination d'intervalles

 L. Jaulin and E. Walter, Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation, *Automatica*, 29(4), pp. 1053-1064, 1993

- *Estimation de paramètres pour des modèles dynamiques*

 M. Kieffer, Walter E., Simeonov, I. , Guaranteed Nonlinear Parameter Estimation for Continuous-Time Dynamical Models, *Proceedings of the 14th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, 2006

Modèle dynamique

Modèle

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{p}, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_k) \quad k = 1, \dots, N \end{cases}$$

- ▶ k : indice de temps
- ▶ \mathbf{x}_k : vecteur d'état
- ▶ \mathbf{y}_k : vecteur de sortie
- ▶ \mathbf{u}_k : vecteur d'entrée
- ▶ \mathbf{v}_k : vecteur de perturbation dynamique
- ▶ \mathbf{w}_k : vecteur de perturbation de sortie
- ▶ \mathbf{p} : vecteur de paramètres constant

Caractérisation

Ensemble non-convexe, et/ou non-connexe

Recherche de caractérisation

- Zonotopes

- ▶ Polyèdre convexe représenté comme somme de Minkowski de segments $[a_i, b_i]$
- ▶ Recherche de fonction de réduction pour minimiser le zonotope contenant l'ensemble

- Représentation par ellipsoïdes

- ▶ Représentation initiale sous forme d'ellipsoïdes
- ▶ Propagation des incertitudes par système linéarisé tangent
- ▶ Déterminations de l'ellipsoïde bornant extérieurement l'ensemble

Caractérisation

- Détermination par analyse d'intervalles
 - ▶ Prédiction (discrète) de l'intervalle d'état par calcul intervalle
 - ▶ Inversion de l'intervalle associé à la mesure
 - ▶ Enveloppe convexe de l'intersection
- Réduction d'ensembles de satisfaction de contraintes
 - ▶ Définition d'ensembles par satisfaction des contraintes
 - ▶ Propagation des contraintes et contractions d'ensembles (e. g. algorithme de Waltz modifié)

Caractérisation

- Zonotopes

- 📖 Combastel C., A State Bounding Observer for Uncertain Non-linear Continuous-time Systems based on Zonotopes, *Proceedings of the 44th IEEE CDC*, pp. 7228-7234, 2005.

- Représentation par ellipsoïdes

- 📖 J. Shamma et K.-Y. Tu, Approximate set-valued observers for nonlinear systems, *IEEE Trans. on Autom. Contr.*,42, pp. 648-658, 1997

Caractérisation

- Utilisation de propagation d'intervalles

 M. Kieffer et E. Walter, Interval analysis for guaranteed non-linear parameter and state estimation, *Mathem and Comp. Model. of Dynamical Systems*, pp. 171-181, 2005

- Utilisation de propagation de contraintes sur des ensembles

 L. Jaulin, M. Kieffer, I. Braems et E. Walter, Guaranteed non-linear estimation using constraint propagation on sets, *Int. J. Control*, pp. 1772-1782, 2001

Présentation

Cas linéaire

Cas non linéaire

Applications

Applications en aéronautique

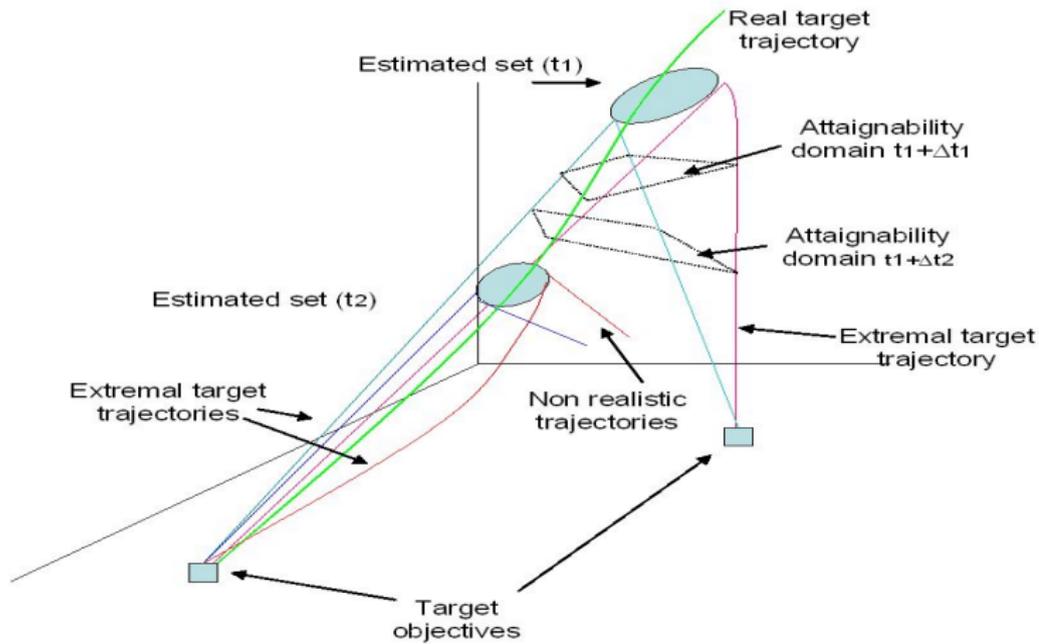
Conclusion

Caractérisation de domaine atteignable

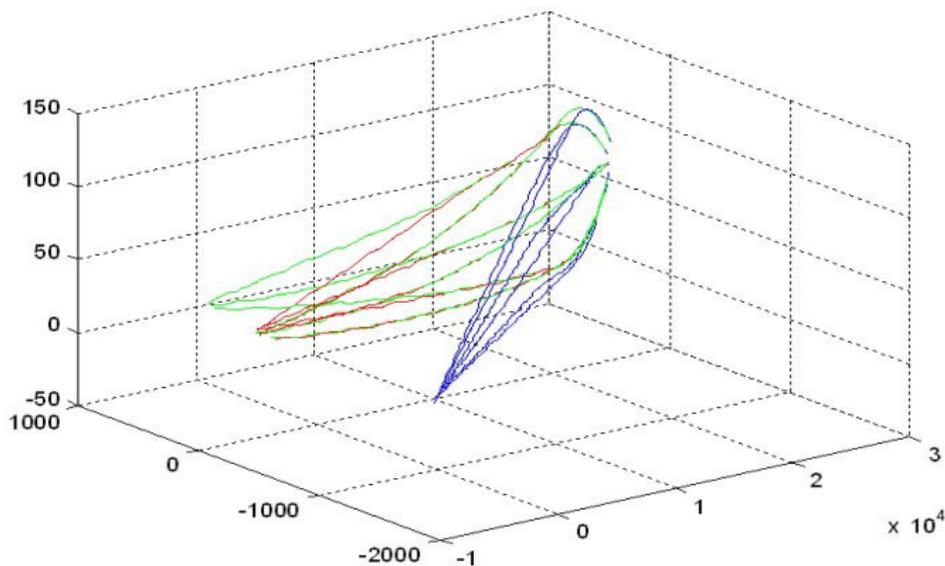
Intérêt : Représentation d'évolutions garanties

- Évolution de cibles avec manoeuvres (accélération limitée)
 - Évolution de véhicules en présence d'obstacles
 - Évaluation de l'état avec perturbations aérologiques
-
- ▶  D. Emilyanov, E. Rubinovitch, S. G. Pyatko, A. A. Fedotov, Information Set-Based Guidance Algorithm against a Decelerating Maneuvering Target, *IEEE. Trans. on Aerosp. and Electr. System.*,41, pp. 65-74, 2005
 - ▶  S. I. Kumkov, V. S. Patsko, S. G. Pyatko, A. A. Fedotov, Construction of the solvability set in a problem of guiding an aircraft under wind disturbance, *Tr. Inst. Mat. Mekh.*,pp. 149-159, 2005
 - ▶  W. Achour, H. Piet-Lahanier et H. Siguerdidjane, Estimation ensembliste des perturbations aérologiques agissant sur un hélicoptère miniature, soumis à *CIFA 2010 Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Nancy, France, 2-4 juin 2010

Détermination de domaines atteignables pour une cible



Trajectoires extrêmes



Guidage erreur bornée

Intérêt : Détermination de lois de guidage robuste, possibilité de tenir compte de pilotabilité

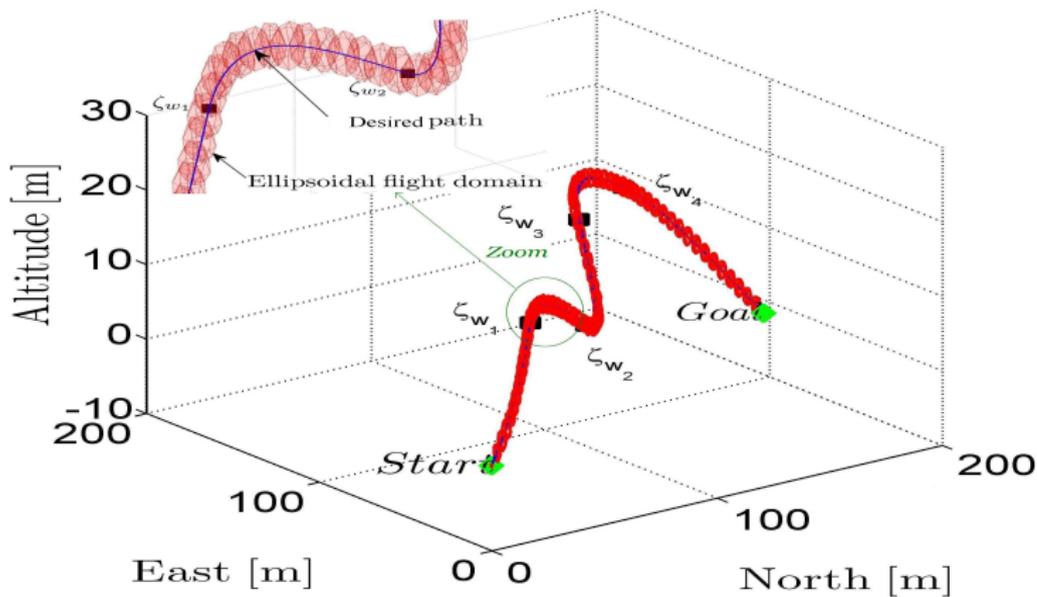
- Guidage prédictif

 C. Ramos., M. Martinez, J. Sanchis, J.V. Salcedo, Robust constrained receding-horizon predictive control via bounded data uncertainties, *Math. and Comput. in Simulation*, pp. 1452-1471, 2009

- Guidage avec identification d'ensemble

 W. Achour, H. Piet-Lahanier, H. Siguerdidjane, Wind field bounded error identification and robust guidance law design for a small-scaled helicopter, soumis à *18th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Nara, JAPAN, Sep.2010.

Trajectoires guidées



Détection de pannes

Intérêt : Détection d'intersection vide, Réaffectation

- Utilisation de zonotopes

 A. Ingimundarson, J. Bravo, V. Puig, T. Alamo, et P. Guerra, Robust fault detection using zonotope-based set-membership consistency test, *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, 2008

- Utilisation d'orthotopes

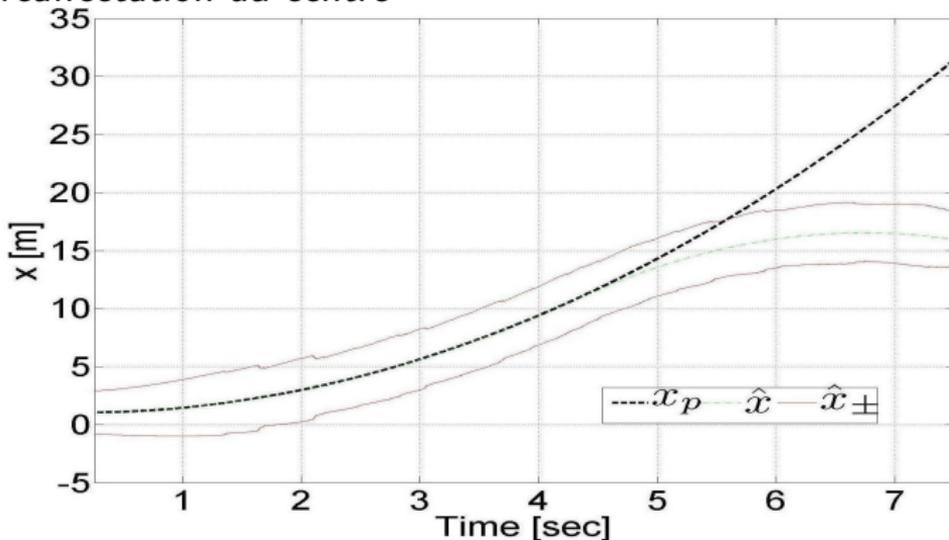
 V. Reppa, A. Tzes, Fault Detection based on Orthotopic Set Membership Identification for Robot Manipulators, *Proc. 17th IFAC World congress*, 2008

- Utilisation d'ellipsoïdes

 W. Achour, H. Piet-Lahanier et H. Siguerdidjane, Modelling and bounded-error estimation of a small-scaled helicopter in presence of wind gusts, *IFAC Workshop Aerospace Guidance, Navigation and Flight Control Systems*, Samara, juin 2009

Exemple de suivi par ellipsoïdes

Utilisation de modèles sans vent pour détection de rafales
Modification de l'algorithme d'estimation ellipsoïdal par
réaffectation du centre



Autres applications

- Commande des satellites

 Rokityanskiy, D. Ya. and Veres, S. M., Application of ellipsoidal estimation to satellite control design, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 11 : 2, pp. 239-249, 2005

- Détermination de guidage de type poursuite évasion

 V. Kuntsevich, A. Kuntsevich, Analysis of the pursuit-evasion process for moving plants under uncertain observation errors dependant on states, *Proc. 15th IFAC World congress*, 2002

- Localisation Navigation

 M. Kieffer, L. Jaulin, E. Walter, and D. Meizel. Robust autonomous robot localization using interval analysis. *Reliable Computing*, 6(3), pp. 337-362, 2000.

- Robotique

 N. Ramdani, P. Poignet, Robust Dynamic Experimental Identification of Robots With Set Membership Uncertainty, *IEEE Trans. on Mechatronics*, pp. 253-256, 2005

Présentation

Cas linéaire

Cas non linéaire

Applications

Conclusion

Conclusion

Conclusion

- Estimation et identification sous hypothèses d'erreur bornée
 - ▶ Méthodes variées pour le cas linéaire
 - ▶ Nombreuses études pour le cas non linéaire
 - ▶ Développements d'outils
- Intérêt
 - ▶ Méconnaissance de distribution
 - ▶ Prise en compte de simplification de modèle
 - ▶ Prise en compte de saturation
- Applications
 - ▶ Domaine atteignable : évaluation des commandes et des actionneurs
 - ▶ Caractérisation de l'incertitude pour commande robuste
 - ▶ Lois de guidage sur ensembles : lien avec l'approche par jeu (NEZ)

Références complémentaires

Calcul par intervalles

-  A. Neumaier. Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge University Press, Cambridge, 1990
-  L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit et E. Walter, Applied Interval Analysis, Springer, 2001

Références complémentaires

Numéros spéciaux, livres

- Numéros spéciaux Erreur bornée

- ▶  J.P. Norton (Ed.), Special issue on bounded-error estimation : Issue 1., *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 8(1), pp. 1-118, 1994
- ▶  J.P. Norton (Ed.), Special issue on bounded-error estimation : Issue 2., *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 8(1), pp. 1-132, 1995
- ▶  E. Walter (Ed.). Special issue on parameter identification with error bounds, *Mathematics and Computers in Simulation* , 32 (5-6), pp. 447-607, 1990
- ▶  F. Chernousko et B. Polyak, on the set membership modelling of uncertainties in dynamical systems, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 11 : 2, 2005

- Livre

- ▶  M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier, and E. Walter (Eds). *Bounding Approaches to System Identification*. Plenum Press, New York, 1996.

QUESTIONS ?

helene.piet-lahanier@onera.fr